

算 数 ・ 数 学 科

小学校第6学年および中学校第3学年について

目 次

I 研究の目的	95
II 研究の内容と方法	96
1 研究の対象にした学年と内容	96
(1) 研究の対象にした学年	96
(2) 分析の対象にした全国学力調査問題	96
① 学力調査問題	96
② 分野・領域と問題のねらい	98
③ これらの問題をとりあげた理由	99
2 研究の方法	100
(1) 研究の方法	100
① 予備調査	100
② ペーパー・テストによる調査	100
③ 附帯調査	100
(2) 分析的問題とそのねらい	100
① 小学校第6学年	100
② 中学校第3学年	106
(3) ペーパー・テストによる調査の対象児童・生徒について	112
(4) ペーパー・テストによる調査の実施計画	112
III 研究の結果とその考察	115
1 小学校第6学年	115
(1) 調査問題 12 について	115
① 問題のねらいの妥当性	115
② 子どものつまずき	118

(2) 調査問題 14	について	121
①	この問題の欠点	121
②	子どものつまずきとその指導	125
(3) 調査問題 15	について	131
①	対称な図形についての子どもの理解の実態	131
②	この問題の文章のむずかしさと子どもの読解力	132
③	問題の吟味	138
2	中学校第3学年	140
(1) 調査問題 6	について	140
①	子どもの応答とその傾向	140
②	理解することと表現すること	145
(2) 調査問題 10	1 について	147
①	数量間の関係の把握	147
②	連立二元一次方程式を解くこと	151
(3) 調査問題 12	について	152
①	12 1 について	152
②	12 2 について	155

I 研究の目的

全国学力調査の結果に関する分析的研究を行なうに当たって、算数・数学科の研究を担当する者が、研究の目的としたことは、主として次の三点である。

a 全国学力調査問題の妥当性などを吟味すること。

文部省では、全国学力調査の実施に当たって、調査問題ごとにそのねらいを発表している。全国学力調査の目的の一つは「学習指導の改善」に役立てることにあるから、教師たちにとって、この問題のねらいは学習指導を改善するためのたいせつな手がかりとなるものである。だから、調査問題は、問題のねらいが達成されるような問題でなければならない。いいかえれば、その調査問題を解こうとする子どもの学力と、問題のねらいに示された学力とは同じものでなければならない。そうでなければ、学習指導を改善しようとする方向は、正しい方向からズレてしまうことになる。

この研究では、このことに着目して、問題が問題のねらいに合っているか、ということを中心に問題そのものの吟味を一つの目的としている。

b 子どもの思考過程や、つまずきやすい点を明らかにすること。

全国学力調査の問題は、その作成方針に示されているように、理解の深さや応用力、考え方などをみることができるように配慮されている。しかし、この調査の性格と、この調査が受けているいろいろな制約とによって、個々の問題について、それを解くときの子どもの思考過程やつまずきやすい点を明らかにすることについては必ずしもじゅうぶんであるとはいえない。

また、算数・数学科においては、昨年度にくらべて自由記入の問題が多くなったが、自由記入の問題についての応答には、無答という分析不能の応答があり、また、答えだけからでは思考過程を推測できない応答もある。

この研究では、ある調査問題を解こうとする子どもの思考過程の各分節に位置づけられるような問題や、その調査問題を解く子どもの学力の側面だけをうきぼりにすることができるような問題を作って、これらを分析的問題と名づけ、これを子どもに解かせた結果を吟味することによって、その調査問題を解くときの子どもの思考過程やつまずきをさぐるとした。

c 指導内容および指導方法を改善するいとぐちを見つけること。

この目的は、bにひきつづく目的である。

各地域・各学校・各学級において、指導内容や指導方法が改善されようとするとき、全国学力調査の結果は有力な資料となるであろう。この研究では、目的のbに述べたように、子どもの思考過程やつまずきを明らかにすることによって、全国学力調査の結果がいっそう活用されるようにしようとしている。しかし、あとに述べるように、この研究は、調査問題のうちのごく一部について行なうものであり、研究方法も調査を主にしたものであるし、調査対象児童・生徒もごく少数であるので、改善の方向またはいとぐちを示すに留まるであろう。

Ⅱ 研究の内容と方法

1 研究の対象にした学年と内容

(1) 研究の対象にした学年

全国学力調査は、小学校第5学年および第6学年、中学校第2学年および第3学年について行なわれたが、この研究は、小学校第6学年および中学校第3学年だけを対象にして行なった。対象学年を限定した理由は、すでに述べられているとおりである(注1)。

(2) 分析の対象にした全国学力調査問題

① 学力調査問題

分析の対象にした全国学力調査問題の問題番号および問題は次のとおりである。

小学校第6学年 12 14 15
 中学校第3学年 6 10₁ 12_{1, 2}

小学校第6学年

12 ある市で展覧会を開くのに、展示するポスターの数をこの市の全生徒数のおよそ5%になるように計画し、各学校からは、それぞれの生徒数の4%以上6%未満の範囲で、作品を出すことにしました。

生徒数360人の学校では、出品するポスターを何枚から何枚の範囲でえらばなければなりませんか。答えを の中に書きなさい。

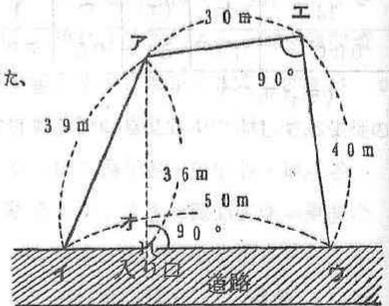
枚から 枚まで

14 右の図のような四角形の小公園があります。

アのところから入り口のオまでひいた直線は、道路に垂直になっています。また、エのところは直角になっています。

この公園の面積は、何平方メートルですか。答えを の中に書きなさい。

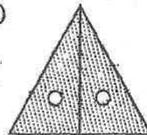
m^2



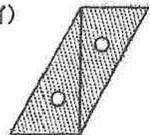
15 形も大きさも同じ三角定木(30°と60°の角をもつもの)2枚を組み合わせて、つぎの1、2、3、4の四とおりの図形ができるかどうかを考えてみることにしました。

- 1 直線についても、点についても対称である図形
- 2 直線について対称であるが、点については対称でない図形
- 3 点について対称であるが、直線については対称でない図形
- 4 直線についても、点についても対称でない図形

(ア)

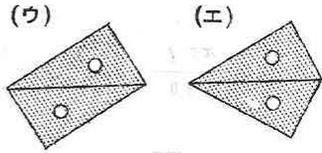


(イ)



右の図で示した四つの図形は、そのときに、はるおくんが作ったものです。

この(ア)、(イ)、(ウ)、(エ)の図形で、上の1、2、3、4の四とおりのものが、できているでしょうか。できていないものがあつたら、その番号を の中に書きなさい。

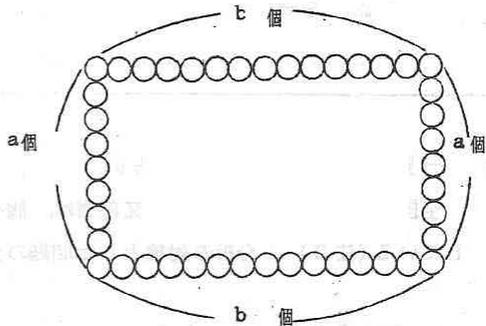


中学校第3学年

6 右の図のように、おはじきがたてに a 個、横に b 個ならんでいます。

このとき、おはじきの全部の数を表わす式だけを、次のアからオまでの中からすべて選んで、解答用紙のそれらの記号を○で囲みなさい。

- ア $2(a+b)$
- イ $2(a+b) - 1$
- ウ $2(a+b) - 2$
- エ $2a + 2(b - 2)$
- オ $ab - (a - 1)(b - 1)$



(解答用紙)

ア イ ウ エ オ

10 次の1、2の問いの答えを、解答用紙に書きなさい。

1 木村さんの住んでいる都市の1か月分の水道料金は、 11 m^3 以上の水を使用した場合は、 $(ax + b)$ 円で計算されるという。ただし、 a 、 b は定数で、 x は1か月分の使用量(単位は立方メートル)を表わしている。

木村さんのうちでは、昭和39年の四月分の使用量は 16 m^3 で、料金は502円、五月分は 20 m^3 で650円であつた。このことから a 、 b の値を求めよ。

(解答用紙)

$a =$
 $b =$

12 半径が $r \text{ cm}$ で、中心角が x° であるおうぎ形の弧の長さを l 、面積を $S \text{ cm}^2$ とすると、次の二つの関係があります。

$$l = \frac{\pi r x}{180} \dots\dots\dots (1)$$

$$S = \frac{\pi r^2 x}{360} \dots\dots\dots (2)$$

このとき、次の1、2の問いの答えを、1については、アからオまでの中から一つ選んで、解答用紙のその記号を○で囲み、2については、答えを解答用紙に書きなさい。

1 (1) の式から x を求める式はどれであるか。

ア $x = \frac{\pi r l}{180}$

イ $x = \frac{180 l}{\pi r}$

ウ $x = \frac{l}{180 \pi r}$

エ $x = 180 l - \pi r$

オ $x = l - \frac{\pi r}{180}$

2 (2) の式と 1 で求めた式から、 S を求める式を、 r と l を用いて、最も簡単な形で表わせ。

(解答用紙)

1 アイウエオ

2 S =

② 分野・領域と問題のねらい

全国学力調査問題について、文部省は、個々の問題の属する分野・領域と、問題のねらいを発表している(注2)。分析の対象とした問題の分野・領域と、問題のねらいは次のようになっている。

小学校第6学年

問題	分野・領域等	ね ら い
12	数量関係	百分率(第2用法)についての問題を処理する能力 (以上、未満の理解を含む)
14	量と測定	平面図形の求積に関する問題を処理する能力
15	図形	平面図形の対称性についての理解

中学校第3学年

6	式	具体的な事गरらについて、文字を用いて数量を式に表わす能力
10	1 式	連立二元一次方程式を用いて問題を解決する能力
12	1 式	おうぎ形の弧の公式において、中心角を未知数とみて求める能力
	2	おうぎ形の面積の公式の中の文字に式を代入する能力

③ これらの問題をとりあげた理由

この研究の基礎資料とするために、当研究所では、県内の小学校第6学年児童および中学校第3学年生徒をそれぞれ100名抽出し、それらの児童・生徒について、全国学力調査の算数・数学の応答調査を行なった。

この研究は、さきに述べられている理由(注3)によって、学力調査の全問題を対象にすることができないので、学力調査問題、学力調査問題のねらい、この応答調査の結果などを研究の目的に即して吟味し、上述の学力調査問題をとりあげることにしたのである。個々の問題についての具体的な理由は、叙述の都合であとに書くことにし、ここでは、小・中学校別にいくつかの理由を書くことにする。

a 小学校第6学年について

ア 当研究所では、「全国学力調査の結果に関する分析的研究」を昭和38年度から始めた。

昭和38年度には算数の学力調査は行なわれなかったので、算数についての研究は今年度が初めてである。それで、なるべく多くの領域にわたって分析の対象とする問題を選ぼうとした。

イ 本県における全国学力調査の中間報告から、領域ごとの正答率を計算すると、次のようになる。

数と計算 50.6% 量と測定 23.3% 数量関係 22.9%
図形 45.1%

この結果から、数と計算をのぞく三つの領域から分析の対象とする問題を選んだ。

ウ 分析の対象として選んだ問題の本県における正答率は次のとおりであって、それぞれの領域の問題のうち、最も正答率が低い問題である。

12 2.5% 14 11.0% 15 28.7%

エ 応答調査の結果では、いわゆる自由記入の問題の中には、無答の多いものがあり、それらは分析的研究を行なわなければ、つまづきの原因をみつけることが困難であろうと思われた。問題12および14などはこれに含まれる。

b 中学校第3学年について

ア 数学については、昭和38年度において、図形について、「全国学力調査の結果に関する分析的研究」を行なった(注4)ので、今年度は昨年度と異なる領域の問題について研究しようとした。

イ 本県における全国学力調査の中間報告から、領域ごとの正答率を計算すると、次のようになる。

数 44.2% 式 30.2% 数量関係 40.2% 図形 36.0%

この結果によって、式の領域の問題の中から分析の対象とする問題を選んだ。

ウ 分析の対象として選んだ問題の本県における正答率は次のとおりであって、式の領域の問題の中でも正答率が低い問題である。

6 15.4% 10 113.0% 12 136.5% 12 26.1%

2 研究の方法

(1) 研究の方法

研究の方法は、予備調査、ペーパー・テストによる調査と、その附帯調査とに大別される。

① 予備調査

全国学力調査の各問題に対する子どもの応答のようすを調べるために、県内の小学校第6学年児童および中学校第3学年生徒をそれぞれ100名ずつ抽出し、これらの児童・生徒の応答を調査して、その結果を、次の資料として用いた。

- a 分析の対象とする学力調査問題を決定するときの資料とする。
- b ペーパー・テストの内容を決定するときの資料とする。
- c 研究の結果を吟味するときの資料とする。

予備調査の対象児童・生徒を抽出する手順は次のとおりである。

- o 県内の小・中学校の中から、地域類型・学校規模などに着目して、小・中学校それぞれ10校を選ぶ。
- o それらの学校の第6学年（小学校）、第3学年（中学校）の学級の中から1学級ずつを無作為に選ぶ。
- o 選ばれた学級の児童・生徒の中から、小学校・中学校それぞれ100名ずつを無作為に選ぶ。

② ペーパー・テストによる調査

分析の対象にした全国学力調査問題（以後「調査問題」とよぶ）について、問題の吟味するための問題、子どもの思考過程やつまずきを明らかにするための問題、指導の手がかりを得るための問題などを作成し、これを分析的問題とよぶことにした。この分析的問題を、後に述べる調査対象児童・生徒に対して、ペーパー・テストとして与え、それに対する応答を分析することによって研究のねらいを達成しようとした。

③ 附帯調査

- a 面接調査 ペーパー・テストによる結果だけでは、じゅうぶんに明らかにできなかったことを、子どもとの面接によって確かめようとした。
- b 調査対象児童・生徒の学力の調査 ペーパー・テストの結果を吟味する資料とするために、調査対象児童・生徒の算数・数学科の学力や、文章読解力などを担任教師からきくことにした。
- c 教科書の内容調査 子どもが使っている算数・数学教科書の内容が、調査問題の応答にかなり大きな影響をもっているのではないかと思われるので、教科書の内容について調査することにした。

(2) 分析的問題とそのねらい (A0, B1, C2)などの記号は、分析的問題の番号である)

① 小学校第6学年

a 調査問題12の分析的問題

A0 調査問題12と同じ問題 (A0)では、式も書かせるようになっている

A₁ A₀ の数量関係をつかむ能力をみる問題

A₂ 比の第二用法を理解しているかどうかみる問題

A₃ 比の第二用法を理解しているかどうかみる問題

A₄ 連続量について、以上、未満について理解しているかどうかみる問題

A₅ 分離量について、以上、未満について理解しているかどうかみる問題

A₆ A₀ の内容について、以上、未満について理解しているかどうかみる問題

A₀ ある市で展覧会を開くのに、展示するポスターの数をこの市の全生徒数のおよそ5%になるように計画し、各学校からは、それぞれの生徒数の4%以上6%未満の範囲で、作品を出すことにしました。

生徒数360人の学校では、出品するポスターを何枚から何枚の範囲でえらばなければなりませんか。式と答えを書きなさい。

(式)

(答) 枚から 枚まで

A₁ つぎの問題を読んで、その下の問に答えなさい。

ある市で展覧会を開くのに、展示するポスターの数をこの市の全生徒数のおよそ5%になるように計画し、各学校からは、それぞれの生徒数の4%以上6%未満の範囲で、作品を出すことにしました。

生徒数360人の学校では、出品するポスターを何枚から何枚の範囲でえらばなければなりませんか。

(問い) この問題を解くのに必要だと思う式を、下の式の中からえらんで、その記号を○でかこみなさい。

ア $360 \div 4$	カ $360 \div 0.6$	サ 360×5	タ 360×0.04
イ $360 \div 5$	キ $360 \div 0.04$	シ 360×6	チ 360×0.05
ウ $360 \div 6$	ク $360 \div 0.05$	ス 360×0.4	ツ 360×0.06
エ $360 \div 0.4$	ケ $360 \div 0.06$	セ 360×0.5	
オ $360 \div 0.5$	コ 360×4	ソ 360×0.6	

A₂ 400人の15%は何人でしょうか。

(式)

(答)

A₃ 21mの9%は何メートルでしょうか。

(式)

(答)

A4 下の表は、あきらさんの学級の男子の体重を表わしています。体重が28kg以上30kg未満の生徒のなまえに○をつけなさい。

6年1組男子の体重

なまえ	体 重	なまえ	体 重	なまえ	体 重
あきら	27.3 kg	くろう	28.1 kg	つとむ	29.9 kg
いさむ	28.8	けんじ	33.4	はじめ	28.0
おさむ	31.4	しずお	29.0	ひろし	27.9
かずお	24.5	すすむ	27.8	みつお	29.5
きくお	30.0	たかお	25.5	やすお	26.2

A5 「10枚以上20枚未満の範囲」というとき、10枚は、その範囲の中にはいるでしょうか。

(答)

また、20枚は、その範囲の中にはいるでしょうか。

(答)

A6 つぎの問題を読んで、その下の問いに答えなさい。

ポスターが147枚あります。この中の4%以上6%未満のポスターを、展覧会に出品することになりました。展覧会に出品するポスターを、何枚から何枚の範囲でえらばなければなりませんか。

(問い) 147枚の4%を求めたら、次のようになりました。

$$147 \times 0.04 = 5.88$$

また、147枚の6%を求めたら、つぎのようになりました。

$$147 \times 0.06 = 8.82$$

出品するポスターは何枚から何枚の範囲でえらばよいでしょうか。つぎのAからクまでの答えのうち、正しいと思うものを一つえらんで、その記号を の中に書きなさい。

- | | | | |
|---|----------------|---|----------|
| ア | 5.88枚から8.82枚まで | オ | 5枚から7枚まで |
| イ | 5.88枚から8.81枚まで | カ | 6枚から9枚まで |
| ウ | 5枚から9枚まで | キ | 6枚から8枚まで |
| エ | 5枚から8枚まで | ク | 6枚から7枚まで |

(答)

b 調査問題 14 の分析的問題

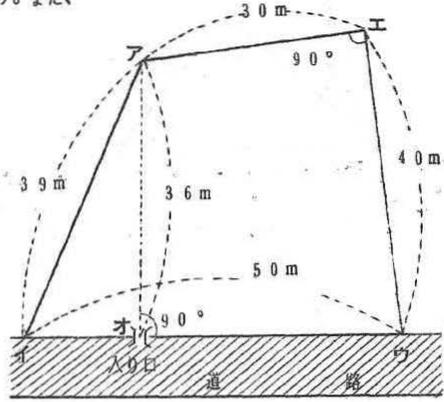
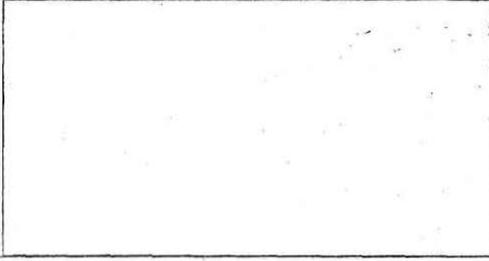
- B0 調査問題 14 と同じ問題 (B0 では、式も書かせるようになっている)
- B1 三角形および各種の四角形の面積を求める公式を理解しているかどうかみる問題
- B2 B0 の四角形の面積を求めるとき、その四角形をどのような形に分割して求めればよいかを理解しているかどうかみる問題
- B3 多角形の面積の求めかた(求積のための必要条件)を理解しているかどうかみる問題
- B4 三角形、平行四辺形の面積の求めかたを理解しているかどうかみる問題

B₀ 右の図のような四角形の小公園があります。

アのところから入り口のオまでひいた直線は、道路に垂直になっています。また、エのところは直角になっています。

この公園の面積は、何平方メートルですか。式と答えを書きなさい。

(式)

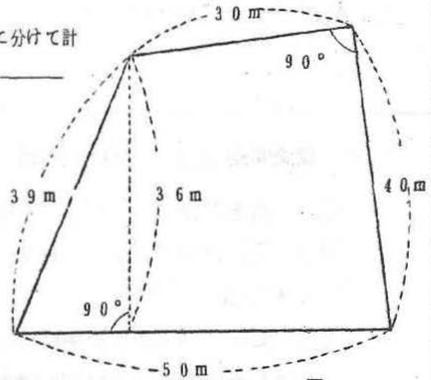


(答) m²

B₁ つぎのそれぞれの形の面積を求める公式を書きなさい。

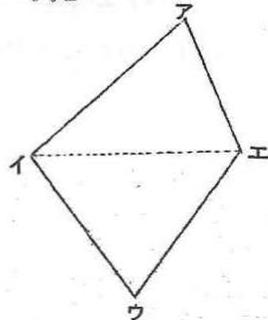
- ① 正方形 (答) (正方形の面積) =
- ② 長方形 (答) (長方形の面積) =
- ③ 平行四辺形 (答) (平行四辺形の面積) =
- ④ 台形 (答) (台形の面積) =
- ⑤ 三角形 (答) (三角形の面積) =

B₂ 右の図のような四角形の土地の面積を求めるには、この四角形をどのように分けて計算すればよいでしょうか。その分けかたがわかるように、図に赤えんぴつで _____ をひきなさい。

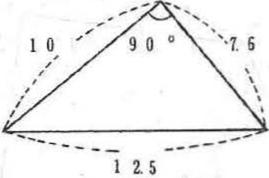


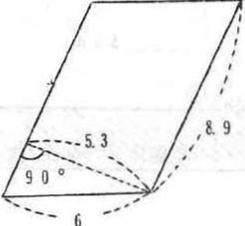
B₃ 右の図のような四角形の土地があります。イからエまでの長さははかたら 9 m でした。

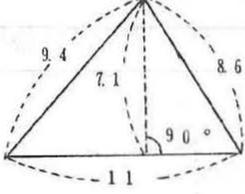
この土地の面積を求めるには、イからエまでの長さのほかに、どことどここの長さははからなければなりません。はからなければならないところがわかるように、赤えんぴつで _____ をひきなさい。

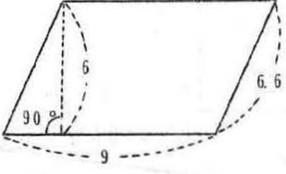


B4 つぎの図の面積を求めなさい。(図の長さの単位はどれもmです。)

①  (式) (答)

②  (式) (答)

③  (式) (答)

④  (式) (答)

c 調査問題 **15** の分析的問題

C0 調査問題 **15** と同じ問題

C1 **C0** の問題場面を単純化した問題 (平面図形の対称性について理解しているかどうかみる問題)

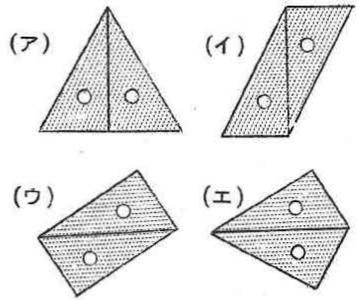
C2 **C1** の問題場面を単純化し、さらに、四つの図形に対する応答をもみることができるようにした問題 (平面図形の対称性について理解しているかどうかみる問題)

C3 線対称点対称についての基本的な理解の程度をみる問題

Q₀ 形も大きさも同じ三角定木 (30°と60°角をもつもの) 2枚を組み合わせて、つぎの1、2、3、4の四とおりの図形ができるかどうかを考えてみることにしました。

- 1 直線についても、点についても対称である図形
- 2 直線について対称であるが、点については対称でない図形
- 3 点について対称であるが、直線については対称でない図形
- 4 直線についても、点についても対称でない図形

右の図で示した四つの図形は、そのときに、はるおくんが作ったものです。
この(ア)、(イ)、(ウ)、(エ)の図形で、上の1、2、3、4の四とおりのものができているでしょうか。



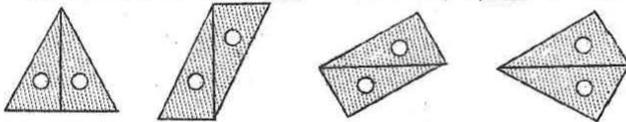
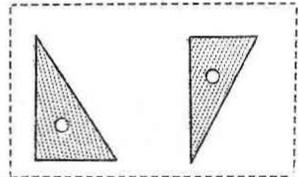
できていないものがあつたら、その番号を「」の中に書きなさい。

(答)

C₁ 形も大きさも同じ三角定木 (右の図) を2枚組み合わせて、つぎの1、2、3、4の四とおりの図形ができるかどうかを考えてみることにしました。

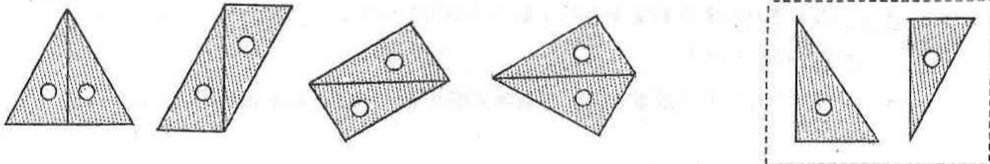
- 1 直線についても、点についても対称である図形
- 2 直線について対称であるが、点については対称でない図形
- 3 点について対称であるが、直線については対称でない図形
- 4 直線についても、点についても対称でない図形

はるおさんは、つぎの図形を作りました。この中に、上の1、2、3、4の四とおりの図形があるでしょうか。ないものがあつたらその番号を「」の中に書きなさい。



(答)

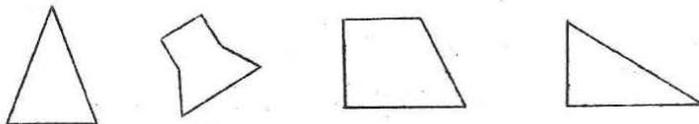
C₂ 右の の中の図のように形も大きさも同じ三角定木を2枚組み合わせて、つぎの四とおりの図形を作りました。



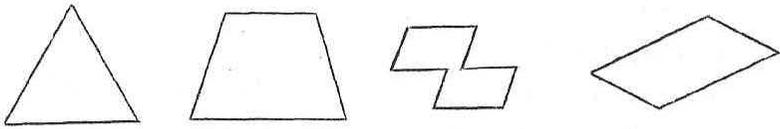
- ① これらの図形の中に「直線についても、点についても対称である図形」があるでしょうか。あつたら、その図形に1と書きなさい。
- ② これらの図形の中に「直線について対称であるが、点については対称でない図形」があるでしょうか。あつたら、その図形に2と書きなさい。
- ③ これらの図形の中に「点について対称であるが、直線については対称でない図形」があるでしょうか。あつたら、その図形に3と書きなさい。
- ④ これらの図形の中に「直線についても、点についても対称でない図形」があるでしょうか。あつたら、その図形に4と書きなさい。
- ⑤ 1、2、3、4のうち、なかつたのはどれでしょうか。 (答)

C₃ つぎの問に答えなさい。

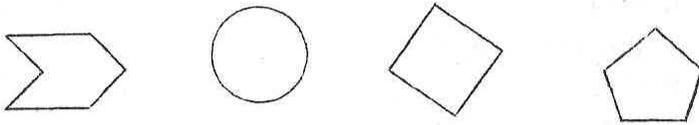
- ① つぎの図形のうち、直線について対称な図形に○をつけなさい。



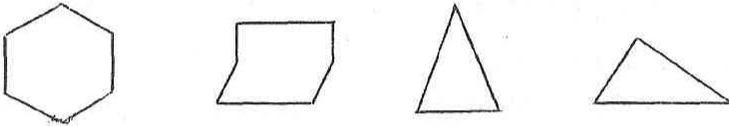
② つぎの図形のうち、点について対称な図形に○をつけなさい。



③ つぎの図形のうち、直線について対称で、点についても対称な図形に○をつけなさい。



④ つぎの図形のうち、直線についても、点についても対称でない図形に○をつけなさい。



② 中学校第3学年

中学校の調査問題では、解答を解答用紙に書くようになっていたが、分析的問題では、問題用紙に解答を書くようにした。

a 調査問題 6 の分析的問題

A₀ 調査問題 6 と同じ問題

A₁ 図示されたある数量を表わす数字式が正しいかどうかを見ぬく力をみる問題 (**A₀** と同じ形の図について)

A₂ 図示されたある数量を表わす数字式が正しいかどうかを見ぬく力をみる問題 (**A₀** と同じ形の図について)

A₃ **A₀** の図について、図と文字式との関係をとらえる力をみる問題

A₄ **A₀** と同じ形の図について、文字を用いて数量を式に表わす力をみる問題

A₅ ある数量 (**A₀** と同じ) を表わす文字式が正しいかどうかを見ぬく力をみる問題 (**A₀** は多肢選択法であるが、**A₅** は真偽法である。)

A₀ 右の図のように、おはじきがたてに a 個、横に b 個ならんでいます。

このとき、おはじきの全部の数を表わす式だけを、次のアからオまでの中からすべて選んで、それらの記号を○で囲みなさい。

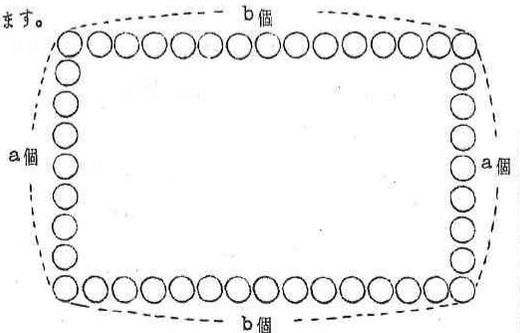
ア $2(a+b)$

イ $2(a+b)-4$

ウ $2(a+b)-2$

エ $2a+2(b-2)$

オ $ab-(a-1)(b-1)$



A₁ 右の図のように、おはじきがたてに6個、横に9個ならんでいます。

このとき、おはじきの全部の数を表わす式だけを、次のアからオまでの中からすべて選んで、それらの記号を○で囲みなさい。

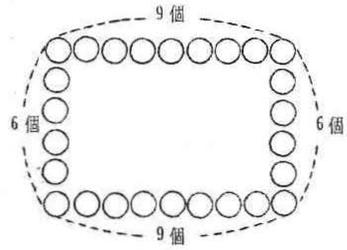
ア $2(6+9)-2$

イ $2(6+9)$

ウ $2(6+9)-4$

エ $6 \times 9 - (9-1)(6-1)$

オ $2 \times 6 + 2(9-2)$



A₂ 右の図のように、おはじきがたてに7個、横に12個ならんでいます。このとき、おはじきの全部の数を表わす式だけを、次のアからオまでの中からすべて選んで、それらの記号を○で囲みなさい。

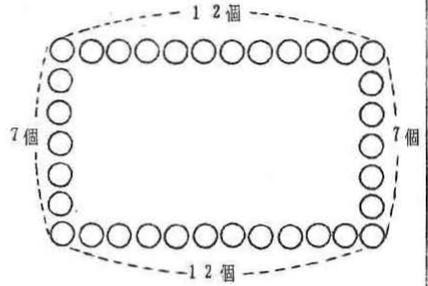
ア $2(7+12)-2$

イ $2(7+12)$

ウ $2(7+12)-4$

エ $7 \times 12 - (12-1)(7-1)$

オ $2 \times 7 + 2(12-2)$



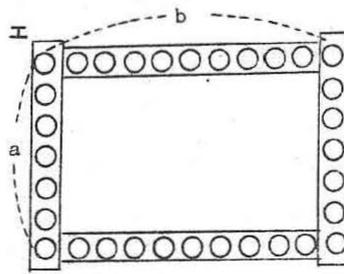
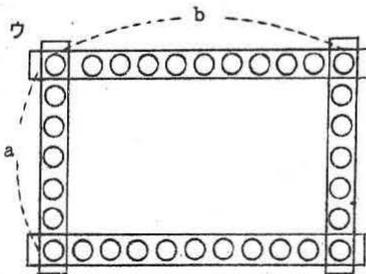
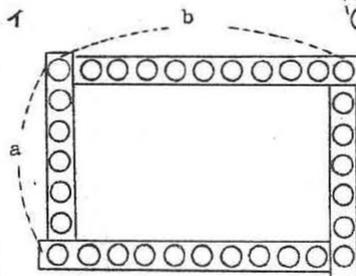
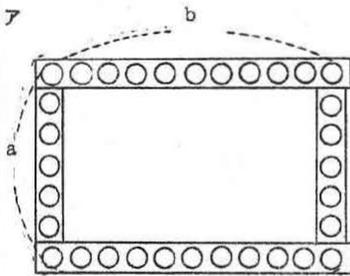
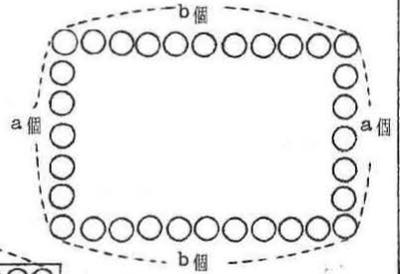
A₃ 右の図のように、おはじきがたてにa個、横にb個ならんでいます。

このおはじきの全部の数を表わす式をつくるために、下のア、イ、

ウ、エのように、おはじきを□で囲んでみました。

ア、イ、ウ、エのそれぞれの囲みかたに合っている式は、下の①、

②、③、④、⑤のうちのどれでしょうか。



① $2(a-1) + 2(b-1)$

② $2a + 2(b-2)$

③ $2(a+b) - 4$

④ $2(a-2) + 2(b-2)$

⑤ $2(a-2) + 2b$

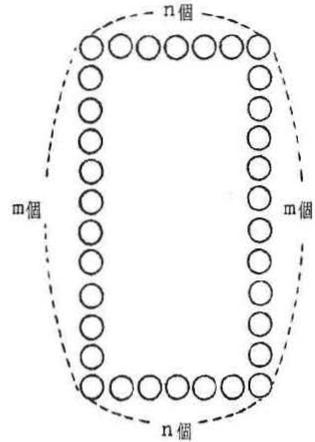
(答)

アに合っている式	
イに合っている式	
ウに合っている式	
エに合っている式	

A4 右の図のように、おはじきがたてに m 個、横に n 個ならんでいます。

このおはじきの全部の数を表わす式を書きなさい。

(答)



A5 右の図のように、おはじきがたてに a 個、横に b 個ならんでいます。

このとき、おはじきの全部の数を表わす式を、次のアからオまでの中から選んで、それらの記号に○をつけなさい。

また、このおはじきの全部の数を表わしていない式には、それらの記号に×をつけなさい。

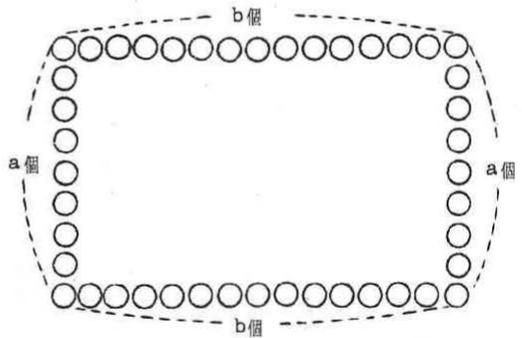
ア $2(a+b)$

イ $2(a+b)-4$

ウ $2(a+b)-2$

エ $2a + 2(b-2)$

オ $ab - (a-1)(b-1)$



b 調査問題 10 1の分析的問題

B0 調査問題 10 1と同じ問題

B1 B0の問題場面などについて理解しているかどうかみる問題

B2 連立二元一次方程式を解く力を見る問題

B3 具体的なことがらについて、文字を用いて数量関係を式に表わす力を見る問題

B0 木村さんの住んでいる都市の1か月分の水道料金は、 11 m^3 以上の水を使用した場合は、 $(ax+b)$ 円で計算されます。ただし、 a 、 b は定数で、 x は1か月分の使用量(単位は立方メートル)を表わしています。

木村さんのうちでは、昭和39年の四月分の使用量は 16 m^3 で料金は502円、五月分は 20 m^3 で650円でした。このことから、 a 、 b の値を求めなさい。

(式)

(答) $a =$ $b =$

B1 木村さんの住んでいる都市の1か月分の水道料金は、 11 m^3 の水を使用した場合は、次の式で計算されます。

1か月分の料金 $=ax+b$
 x1か月分の使用量(単位 m^3)
 a 、 b は定数

木村さんのうちでは、昭和39年の四月分の使用量は 16 m^3 で料金は502円、五月分は 20 m^3 で650円でした。このことについて、次の問いに答えなさい。

① 「定数」というのは、どのような意味か。

② a 、 b の単位は何か。

a の単位..... b の単位.....

③ 四月分の料金は、どのような式で計算されたか。

(答) $502 =$

④ 五月分の料金は、どのような式で計算されたか。

(答) $650 =$

⑤ 上の③と④でつくった式から、 a と b の値を求めよ。

(式)

(答) $a =$
 $b =$

B₂ 次の連立方程式を解きなさい。(計算は の中に書きなさい。)

①
$$\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$$

(答) $x =$
 $y =$

②
$$\begin{cases} 5x + y = 18 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

(答) $x =$
 $y =$

B₃ 高田さんのおとうさんは、ある会社の社員です。毎月の給料は、下のアとイを合計した金額です。

ア 毎月きまつてもらう金額 a円

イ 残業手当 1時間について b円

(残業手当とは、きめられた時間以外にはたらいたときにもらう金額のことです。)

ある月の残業時間は、合計x時間でした。この月の給料の総額はいくらでしたか。

(答)

c 調査問題 12 の分析的問題

C₀ 調査問題 12 と同じ問題

C₁ 文字式をある文字について解く能力をみる問題

C₂ 式の中の文字に式を代入する能力をみる問題

C₃ 式を簡単にする能力をみる問題

C₀ 半径がr cmで、中心角がx°であるおうぎ形の弧の長さをl cm、面積をScm²とすると、次の二つの関係があります。

$$l = \frac{\pi r x}{180} \dots\dots\dots (a)$$

$$S = \frac{\pi r^2 x}{360} \dots\dots\dots (b)$$

このとき、次の1、2の問の答えを、1については、アからオまでの中から一つ選んで、その記号を○で囲み、2については、答えを□の中に書きなさい。

1 (a) の式から x を求める式はどれであるか。

ア $x = \frac{\pi r l}{180}$ イ $x = \frac{180 l}{\pi r}$ ウ $x = \frac{l}{180 \pi r}$

エ $x = 180 l - \pi r$ オ $x = l - \frac{\pi r}{180}$

2 (b) の式と1で求めた式から、 S を求める式を、 r と l を用いて、最も簡単な形で表わせ。(答) $S = \square$

C1 次のそれぞれの式を、 x を求める式になおしなさい。

(例) $ax = b$ (答) $x = \frac{b}{a}$

① $b = \frac{x}{a}$ (答) \square

② $pk = rx$ (答) \square

③ $y = \frac{8S}{x}$ (答) \square

④ $c = \frac{1}{3} dx$ (答) \square

C2 $x = aby$ であるとき、 $ab = k$ ならば、この x を求める式は、 k と y を用いて、

$x = ky$

と表わすことができます。

下の①、②、③のそれぞれの左の式と右の式から、 x を求める式を、 a 、 r を用いて、最も簡単な形で表わしなさい。

① $x = \frac{b}{a^2}$ $b = ar$
(答) $x = \square$

② $x = \frac{abc}{2}$ $b^c = r$
(答) $x = \square$

③ $x = \frac{8ab}{4c}$ $c = \frac{b}{r}$
(答) $x = \square$

C₃ 次の式を簡単にしなさい。

① $\frac{20cd^3x}{4cd^2}$

(答)

② $\frac{15a^2by}{6ab^2c}$

(答)

(3) ペーパー・テストによる調査の対象児童・生徒について

説明の都合で、分析的問題の内容について書いてから、調査対象児童・生徒について説明することになったが、このことは研究の過程を示すものではない。調査対象児童・生徒をどう選び、どのようなグループに分けるか、ということと、分析的問題の作成とは、関連させながら行なわなければならないしごとであった。だから、これらのしごとは、たがいにからみあって研究の一分節となっていた。

さて、〈研究の方法〉の②および③に述べた調査の対象児童・生徒は、新潟市内の小・中学校の児童生徒の中から選ぶことにした。新潟市内の小・中学校では、昭和39年6月16日の新潟地震のために、昭和39年度の全国学力調査を実施することができなかった。だから、新潟市内の子どもは、調査問題の内容についてほとんど知らないであろう。この研究では、この条件に着目して、新潟市内の子どもを調査対象に選び、この条件を生かす分析的問題を作成しようとしてつとめたのである。

調査対象に選んだ学校数および児童・生徒数は、小学校1か校・259人、中学校1か校290人である。

(4) ペーパー・テストによる調査の実施計画

次の表は、ペーパー・テストによる調査の実施計画表である。

第1表 小学校第6学年

グループ	a			b			C		
人数	87			87			85		
I 時	A ₀	B ₀	C ₀	A ₁	B ₀	C ₁	A ₁	B ₀	C ₂
	A ₂	B ₁		A ₂	B ₁		A ₂	B ₁	
	A ₃			A ₃			A ₃		
II 時	A ₄	B ₂	C ₃	A ₄	B ₂	C ₃	A ₄	B ₂	C ₃
	A ₅	B ₃		A ₅	B ₃		A ₅	B ₃	
	A ₆	B ₄		A ₆	B ₄		A ₆	B ₄	

第2表

中学校第3学年

グループ	a	b	c
人数	95	99	96
I 時	A ₁ B ₀ C ₀ A ₂ B ₂ A ₀	A ₀ B ₁ C ₁ C ₂ C ₃	A ₅ C ₁ C ₂ C ₃ C ₀
II 時	A ₃ B ₃ C ₁ C ₂ C ₃	A ₄ B ₃ C ₀	

＜実施計画表の説明＞

ア a, b, cグループは、調査対象校のそれぞれ2学級の児童・生徒を示している。

イ 人数は実際に調査した人数を示している。

ウ 表の中のA₀, B₁, C₂などの記号は、分析的問題の番号を示している。

エ テスト問題の配列順は、次の例のようになっている。

例 小学校第6学年aグループの1時間目

A₄ A₂ A₃ B₀ B₁ C₀ の順

オ a, b, cの3グループに編成した理由のおもなものは次の二つである。

o グループごとの応答を比較するためである。

例 小学校第6学年のaグループのC₀と、bグループのC₁と、cグループのC₂
中学校第3学年のaグループのA₀と、bグループのA₀

o より多くの角度から分析するためである。

例 中学校第3学年のaグループとbグループにはA₀を提出するので、それとともにA₅を提出すると、二つの問題に対する応答がたがいに影響し合ってしまうので、子どもの自然なかたちの応答が得られない。そこで、a, bグループにはA₀を提出し、cグループにはA₅を提出することにする。

カ テストを1時間目と2時間目に分けた理由のおもなものは次の三つである。

o ある二つの分析的問題を同一の子どもに提出して、それらに対する子どもの応答の関係を調べたいことがある。(二つの分析的問題をP₁, P₂とする)

このとき、P₁, P₂に対する応答がたがいになるべく影響しないようにするため、または、影響が、P₁→P₂の方向にしか起こらないようにするためである。

例 小学校第6学年のaグループには、A₀を1時間目、A₀を2時間目に提出することにする。
中学校第3学年のaグループには、A₀を1時間目、A₄を2時間目に提出することにする。

- 上の場合と逆に、二つの分析的問題に対する応答がたがいに影響し合うようにするためには、それらの問題を同じ時間に提出する。

例 中学校第3学年のaグループの[A₁]と[A₂]と[A₀]

- 1回のテスト時間が長くないようにするためである。
- キ テストは、下記の日時に実施した。

小学校第6学年 昭和39年9月24日午前9時40分から10時15分まで

テスト所要時間は、1時間目、2時間目とも約40分

中学校第3学年 昭和39年10月1日午前10時から11時20分まで

テスト所要時間は、1時間目、2時間目とも約40分

Ⅲ 研究の結果とその考察

1 小学校第6学年

(1) 調査問題 [12] について

① 問題のねらいの妥当性

a 問題のねらいの分析

<研究の目的>で述べたように、「問題のねらい」は、その問題を解こうとする子どもの学力を反映するものでなければならない。いいかえれば、その問題を解くことができた子どもと、解くことができなかった子どもの学力のおもなちがいを表現するものが「問題のねらい」であるはずである。このことを調査問題 [12] に即して考えてみよう。

[12] ある市で展覧会を開くのに、展示するポスターの数をこの市の全生徒数のおよそ5%になるように計画し、各学校からは、それぞれの生徒数の4%以上6%未満の範囲で、作品を出すことにしました。

生徒数360人の学校では、出品するポスターを何枚から何枚の範囲でえらばなければなりませんか。答えを [] の中に書きなさい。

[12] の答え

[] 枚から [] 枚まで (17)

さきにも述べたように、文部省は、この問題のねらいを

百分率（第2用法）についての問題を処理する能力（以上、未満の理解を含む）を公表している。「以上、未満の理解」が、かっこの中にはいっているのは、これが副次的なねらいであることを示しているのかどうかはわからないが、そのことには、いまはふれずにおこう。

さて、この問題のねらいを要素的に分けると、

ア 百分率についての理解

イ 比の第二用法の理解

ウ 以上、未満の意味の理解

となるであろうが、この問題を見ると、「5%」が過剰条件であることを見ぬかなければならない。だから、上の三つの要素のほかに、

○ 過剰条件を含む問題場面の理解

を、ぜひつけ加えなければならないと思う。

出題者である文部省は、この過剰条件の理解を、「百分率（第2用法）」の理解の中に入れていたのであると思われる。そのように考えることもできようが、この過剰条件が、この問題の大きなファクターであり、とくにとり出しておく必要があることは、たとえば次の問題を [12] とくらべることによってもわかるであろう。

ある市で展覧会を開くのに、展示するポスターを各学校から出すことにし、各学校から、それぞれの生徒数の4%以上6%未満で、ポスターを出すことになりました。

生徒数360人の学校では、出品するポスターを何枚から何枚の範囲でえらばなければなりませんか。

b 子どもの応答による吟味

これまで、**12**の問題のねらいについて考察をすすめてきたのであるが、**12**を解こうとした子どもは、どのような点につまずいたであろうか。このことを調べることから、問題のねらいとのズレを吟味してみよう。

予備調査（応答調査）(注5)の結果は次のとおりであった。

15枚から21枚まで（正答）	9%
14枚から22枚まで	7%
60枚から90枚まで	5%
14枚から18枚まで	4%
14枚から21枚まで	3%
6枚から9枚まで	2%
7枚から8枚まで	2%
7枚から9枚まで	2%
4枚から6枚まで	2%
14枚から18枚まで	2%
144枚から180枚まで	2%
その他（1類型1%）	25%
（無答）	35%

このような応答がどうしてでてきたか考えてみよう。

12 にでている数値から、次のような計算を考えることができる。

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| ㉞ $360 \times 0.04 = 14.4$ | ㉠ $360 \times 0.05 = 18.0$ |
| ㉟ $360 \times 0.06 = 21.6$ | ㉡ $360 \div 0.04 = 9000$ |
| ㊱ $360 \div 0.05 = 7200$ | ㉢ $360 \div 0.06 = 6000$ |

これらの計算と、百分率についてのまちがい、以上、未満についてのまちがいを考え合わせると、上の誤答がでてきたすじみちを、次のように推察することができる。

- | | |
|--------------|--------------|
| ㉞から 14枚 144枚 | ㉠から 18枚 180枚 |
| ㉟から 22枚 | ㉡から 9枚 8枚 |
| ㊱から 7枚 | ㉢から 6枚 7枚 |

このようにしてみると、以上、未満についての誤りが最も多いことが推察されるのであるが、無答が5%もあるため、全体の傾向を的確につかむことはできない。

次に、ペーパー・テストの結果から考察しよう。

A0 ある市で展覧会を開くのに、展示するポスターの数をこの市の全生徒数のおよそ5%になるように計画し、各学校からは、それぞれの生徒数の4%以上6%未満の範囲で、作品を出すことにしました。

生徒数360人の学校では、出品するポスターを何枚から何枚の範囲でえらばなければなりませんか。式と答えを書きなさい。

(式)

(答) 枚から 枚まで

aグループの分析的問題 **A0** のテスト結果は次のとおりである。

式を正しく書いた者 46%

式を正しく書き、正しい計算をした者 40%

正しい答えを書いた者 0%

上の結果で、式を正しく書き、正しい計算をしながら、正しい答えをだせなかった子どもは、以上、未満の意味の理解がじゅうぶんでなかったものとみることができる。これが全体の40%を占めていることと、正しい答えを書いた者が1人もいなかったことは注目すべきことである。

なお、式を正しく書くことができなかった子どもの立式を見ると、

過剰条件についてのつまずき aグループ全体の22%

例 $360 \times 0.04 = 14.4$

$360 \times 0.05 = 18$

比の第二用法についてのつまずき 9%

例 $360 \div 0.04 = 9000$

$360 \div 0.06 = 6000$

百分率についてのつまずき 5%

例 $360 \times 4 = 1440$

$360 \times 6 = 2160$

その他 15%

立式しない(無答) 7%

となっており、過剰条件を含む問題場面を理解することができないための誤りが目だっている。なお、上の百分率は、二つ以上の原因によると思われるつまずきを、それぞれの原因に含めて示したので、さきの46%(正しい式)も合わせた数値が100%を超える。

次に、bグループの分析的問題 **A1** の結果について書く。

A1 つぎの問題を読んで、その下の問いに答えなさい。

ある市で展覧会を開くのに、展示するポスターの数をこの市の全生徒数のおよそ5%になるように計画し、各学校からは、それぞれの生徒数の4%以上6%未満の範囲で、作品を出すことにしました。

生徒数360人の学校では、出品するポスターを何枚から何枚の範囲でえらばなければなりませんか。

(問い) この問題を解くのに必要だと思う式を、下の式の中からえらんで、その番号を○でかこみなさい。

ア	$360 \div 4$	カ	$360 \div 6$	サ	360×5	タ	360×0.04
イ	$360 \div 5$	キ	$360 \div 0.04$	シ	360×6	チ	360×0.05
ウ	$360 \div 6$	ク	$360 \div 0.06$	ス	360×0.4	ツ	360×0.06
エ	$360 \div 0.4$	ケ	$360 \div 0.06$	セ	360×0.5		
オ	$360 \div 0.5$	コ	360×4	ソ	360×0.6		

A1の応答と、その正誤および誤りの原因と考えられることがらは次のとおりである。

応答	正誤	誤りの原因と考えられること
タ ツ	正	
イ オ ク サ セ チ	誤	過剰条件についての理解が不じゅうぶんである。
ア イ ウ エ オ カ キ ク ケ	誤	比の第二用法についての理解が不じゅうぶんである。
ア イ ウ エ オ カ コ サ シ ス セ ソ	誤	百分率についての理解が不じゅうぶんである。

上の観点によって応答を分けると、次のようになる。

- 正答 17% (15人)
- 過剰条件によるつまずき 60% (52人)
- 比の第二用法についてのつまずき 31% (27人)
- 百分率についてのつまずき 15% (13人)

このように、bグループのA1のテストの結果も、aグループのA0の結果と同じような傾向を示している。

なお、bグループのA1の結果についての百分率は、一つの選択肢が二つ以上の誤りの原因を含んでいたたり、1人の子どもが二つ以上の原因でまちがったりしているため、合計が100%より多くなっている。

さて、これまでの分析からわかったことは、以上、未満についてのつまずきが多いこと、過剰条件についてのつまずきが、比の第二用法についてのつまずきや、百分率についてのつまずきよりも多かったことである。

② 子どものつまずき

a ペーパー・テストの結果の概観

12をするとき、子どもがつまずきやすい点について、すでにその概要を述べたが、ここでは、さらにいくつかの分析的問題の応答について考察してみたい。

A2 400人の15%は何人でしょうか。

(式)

(答)

A3 21mの9%は何メートルでしょうか。

(式)

(答)

A4 下の表は、あきらさんの学級の男子の体重を表わしています。体重が28kg以上30kg未満の生徒のなまえに○をつきなさい。

6年1組男子の体重

なまえ	体 重	なまえ	体 重	なまえ	体 重
あきら	27.3kg	くろ。う	28.1kg	つ。とむ	29.9kg
いさむ	28.8	けんじ	33.4	はじめ	28.0
おさむ	31.4	しずお	29.0	ひろし	27.9
かずお	24.5	すすむ	27.8	みつお	29.5
まくお	30.0	たかお	25.5	やすお	26.2

A5 「10枚以上20枚未満の範囲」というとき、10枚は、その範囲の中にはいるでしょうか。

(答)

また、20枚は、その範囲の中にはいるでしょうか。

(答)

A6 つぎの問題を読んで、その下の問いに答えなさい。

ポスターが147枚あります。この中の4%以上6%未満のポスターを、展覧会に出品することになりました。展覧会に出品するポスターを、何枚から何枚の範囲でえらばなければなりません。

(問い) 147枚の4%を求めたら、つぎのようになりました。

$$147 \times 0.04 = 5.88$$

また、147枚の6%を求めたら、つぎのようになりました。

$$147 \times 0.06 = 8.82$$

出品するポスターは、何枚から何枚の範囲でえらばよいでしょうか。つぎの ア から ク までの答えのうち、正しいと思うものを一つえらんで、その記号を の中に書きなさい。

- | | |
|------------------|------------|
| ア 5.88枚から8.82枚まで | オ 5枚から7枚まで |
| イ 5.88枚から8.81枚まで | カ 6枚から9枚まで |
| ウ 5枚から9枚まで | キ 6枚から8枚まで |
| エ 5枚から8枚まで | ク 6枚から7枚まで |

(答)

分析的問題 **A2**, **A3**, **A4**, **A5**, **A6** についての a, b 両グループの正答率は次のとおりで、両グループの正答率は同じ傾向を示している。(cグループも同じ傾向を示した。ここにあげることを省略した。)

問題	問題のねらい	正誤の基準	正答率	
			aグループ	bグループ
A2	百分率, 比の第二用法の理解	式が正しいものを正答とする	86%	81%
A3	百分率, 比の第二用法の理解	式が正しいものを正答とする	83	78
A4	以上, 未満の理解	完全正答だけを正答とする	55	66
A5	以上, 未満の理解	2問正答を正答とする	75	75
A6	以上, 未満の理解		13	8

上に示した正答率からうかがわれることのうち、とくに目だつことは、「以上, 未満についての理解」をみる問題の **A4**, **A5** の正答率と、**A6** の正答率との間に著しい差があることである。**A4**, **A5** については、かなりよくできる子どもであるのに、**A6** では、10%前後の正答率を示している。だから、「調査問題 **12** には、以上, 未満についての誤りが多かった」というだけでは具体的ではない。**A6** についてさらに吟味する必要がある。

b **A6** についての考察

分析的問題 **A6** を見た子どもが、正しい答えを書くまでの思考過程を考えてみよう。

それは、次のようになるのではあるまいか。

147枚の4%は5.88枚である。「4%以上」というときは4%も含む。5.88枚がそれに当たるのだが、ポスターが5.88枚ということはない。(1枚, 2枚, 3枚, ……だから)

だから、14枚の4%以上というときは、「6枚から」ということになる。

(147枚の6%未満については省略する)

12 を解くときにも、これと同じ場面がある。さきに、**A6** の問題のねらいを、「**A0** の内容について以上, 未満について理解しているかどうかみる問題」(**A0** と **12** は同じ問題) と書いたが、**A0**, **A6** に共通で、**A4** および **A5** と異なる点は、以上, 未満という概念と、連続量と分離量の関係とがからみ合っていることである。このことが **A0** の正答率を低くしていると思われるのである。

それでは、子どもたちは、**A0** のような問題を解いた経験をもっていないのだろうか。

このことを調べるために、調査対象学級で使用している教科書の内容を見たが、**A0** のような類型の問題は見当たらなかった。つづいて、本県内で使用されているおもな教科書についても調べたが、結果は同様であった。

ふたたび **A6** にかえて、子どもの応答を調べてみよう。a, b, c の3グループの応答を合計すると、次のようになる。

ア	5.88枚から8.82枚まで	8%
イ	5.88枚から8.81枚まで	11%
ウ	5枚から9枚まで	3%

エ	5枚から8枚まで	12%
オ	5枚から7枚まで	10%
カ	6枚から9枚まで	37%
キ	6枚から8枚まで(正答)	10%
ク	6枚から7枚まで	6%
その他		2%
(無答)		1%

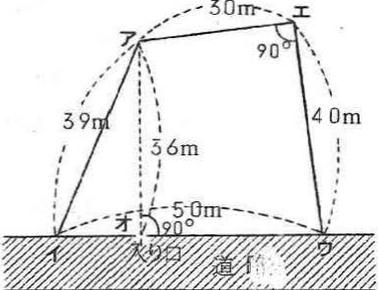
この結果をみると、選択肢 **ア** および **イ** を選んだ子どもは合計しても20%にならない。多くの子どもは、5.88枚とか8.82枚という数値ではいけないのだ、というところまではわかっているのだが、その次の段階でつまづいている。次の段階とは、上にも述べたように、5.88枚から6枚を求め、8.82枚から8枚を求めることである。**12** でいえば、14.4枚から15枚を求め、21.6枚から21枚を求めることである。ここに大きな困難点が存在するのである。

(2) 調査問題 **14** について

① この題題の欠点

a 子どもの過考過程と答え

14 右の図のような四角形の小公園があります。
ア のところから入り口の**オ** までひいた直線は、道路に垂直になっています。また、**エ** のところと**オ** は直角になっています。
 この公園の面積は、何平方メートルですか。
 答えを の中に書きなさい。



14 の答え m² ⑬

調査問題 **14** についての予備調査(応答調査)の結果は次のとおりであった。

1500 m ² (正答)	14%
1440 m ²	16%
1600 m ²	3%
2880 m ²	2%
1530 m ²	2%
その他(1類型1%)	37%
(無答)	26%

さて、全国学力調査では、問題用紙に、各問ごとに計算などをするための余白がある。しかし、計算

を書き残しておくことや、式を立てることを要求しているわけではない。だから、答えがでてくるまでの過程は、これらの余白に書き残されているとは限らない。それで、答えが生まれるまでの過程は、答えから推察することになる。上の応答調査にあらわれた $<1440\text{ m}^2>$ は、

四角形アイウエを台形（アエ//イウ）とみて、

$$(30 + 50) \times 36 \div 2 = 1440 \text{ (m}^2\text{)}$$

と計算したのであると推察することなどがその例である。

このような推察は、上の例のように容易にできる場合もあるが、むずかしい場合もある。一般的にいえば、答えだけからその問題の解決過程を的確に知ることはむずかしいことである。

このことは、**14** だけでなく、調査問題全体についていえることであり、この研究がなされなければならない理由の一つがここにあるといえるのであるが、**14** については、一般的な意味のほかには特殊な意味がある。そして、そのことがこの問題の欠点となっている。

b 誤った思考過程と正しい答え

14 を解く過程には、右の図の四角形の面積を求めることが含まれる。

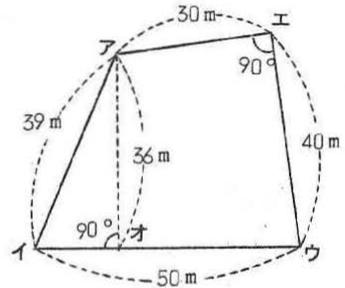
このとき、与えられた図の形や、与えられた数値から、子どもがどのような誤りをおかすであろうか。

まず四角形アイウエを台形とみて（アエ//イウ）計算する子どもがあらわれるであろうと思われる。

次に、四角形アオウエを台形とみて（アオ//エウ）計算する子どももあらわれるであろうと思われる。

このような容易に予測される誤りのほかに、さまざまな誤りがあらわれるであろうと思われる。このことを分析的問題 **B0** の結果について説明することにする。

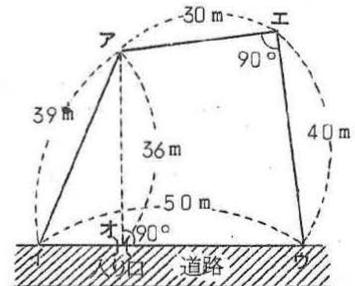
第 1 図



B0 右の図のような四角形の小公園があります。アのところから入口のオまでひいた線は、道路に垂直になっています。またエのところは直角になっています。

この公園の面積は、何平方メートルですか。式と答えを書きなさい。

(式)



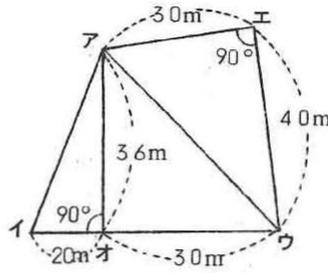
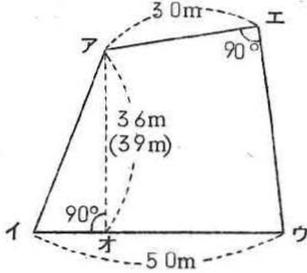
(答)

子どもの誤りのおもなものは次のとおりである。

- ㉗ 全体の形を台形とみた者 (アエ//イウ) (高さを36mとした者, 39mとした者を含む) (第2図) 22%
- ㉘ □アイウエを, △アイオ, △アオウ, △アウエに分割して計算した者 (第3図) 8%

第2図

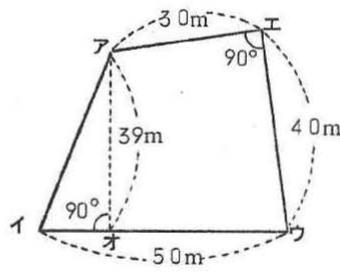
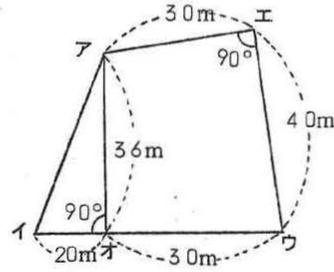
第3図



- ㉙ □アオウエを台形とみて (アオ//エウ), もとの形を△アイオと□アオウエに分割して計算した者 (第4図) 8%
- ㉚ △アイウの高さを39mとみた者 (第5図) 7%

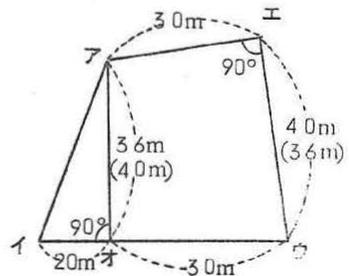
第4図

第5図



- ㉛ □アオウエを長方形とみて (たての長さを36mとした者, 40mとした者を含む), もとの形を△アイオと□アオウエに分割して計算した者 (第6図)

第6図



- 5%
- ㉜ その他の誤り 17%
- ㉝ (無答) 10%
- (正答 23%)

これらの誤りのうち, ここでとりあげたいのは, ㉘と㉙の誤りである。

まず, ㉘の誤りについて考察してみよう。

④の誤りは、第7図のように、 \square アイウエを三つの直角三角形に分割して計算する方法であるが、イオの長さを20mとし、オウの長さを30mとすることは誤りであるから、この方法は正しくない。しかし、計算をまちがえなければ、1500 m^2 という正答がでてしまう。

その理由は次のとおりである。

底辺が a m、高さが h mの三角形において、 $a = b + c$ とすると、面積 S m^2 について、次の式が成立する。

$$S = \frac{a h}{2} = \frac{b h}{2} + \frac{c h}{2}$$

このように、まちがった過程から正答がでてしまうの

であるが、答えだけを調べていたのでは、それがわからない。だから、全国学力調査の結果、正答として処理されているものの中にも、このような誤りが何%かひそんでいると思われるのである。

そのような誤った判定をしないようにする手段として、次のようなことが考えられる。

その一つは、問題を作成するときに、上に述べたような状況が起これないように問題場面を設定することであるが、これは容易なことではない。

もう一つは、テストをするとき、子どもに式を書かせることである。そして、式と答えを見ながら正誤の判定をすれば、誤った判定をすることが少なくなるし、テスト後の指導の手がかりを得ることもできる。

次に、⑤の誤りについて書く。

⑤の誤りは、第8図のように、 \square アオウエを台形とみて(アオ \parallel エウ)計算する方法であるが、この方法でも次のように正答がでてしまう。

$$\begin{aligned} 20 \times 36 \div 2 &= 360 \\ (36 + 40) \times 30 \div 2 &= 1140 \\ 360 + 1140 &= 1500 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

このことを文字式によって説明すると、次のようになる。

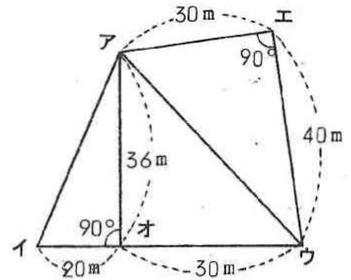
14 同じ形の四角形の各部分の長さを第9図のように a 、 b 、 c 、 h で表わすと、この面積 S は次のように表わされる。

$$S = \frac{a h}{2} + \frac{b c}{2}$$

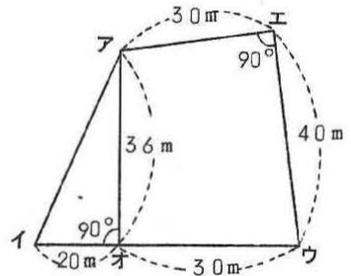
⑤の誤りを文字式で表わすと、次のようになる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{h(a-c)}{2} + \frac{c(h+b)}{2} = \frac{ah-ch}{2} + \frac{ch+bc}{2} \\ &= \frac{ah}{2} + \frac{bc}{2} \end{aligned}$$

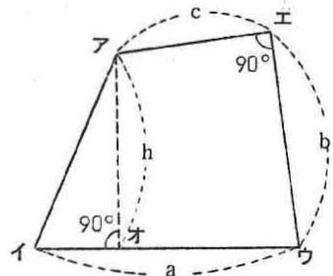
第7図



第8図



第9図



だから、たとえば h の値を 36 m から 34 m に変えても、上に述べたような状況は変わらないのである。

④の誤りと同じく⑦の誤りも答えだけを見ていたのではわからない。このような困った状況が起これないようにするにはどうすればよかったか。その一つの手段は、この型の問題をさけることである。もう一つは、テストをするとき、子どもに式を書かせることである。

[14] の図を見ると、 \square アオウエは台形に似ているから、子どもがこれを台形と見誤るであろうということは容易に予想できることである。だから、出題者が、子どもの誤りの予測をじゅうぶんにしていれば、この問題はもっとちがったものになっていたと思われる。

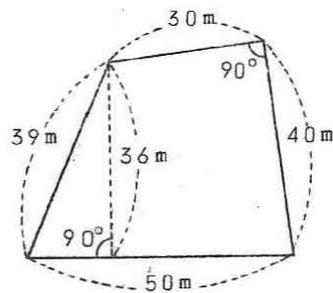
② 子どものつまずきとその指導

a 逆思考を必要とする問題場面

この問題の欠点について述べながら、子どものつまずきについても書いてきたが、ここではさらに、分析問題 [B1], [B2], [B3], [B4] について、子どものつまずきを考察することにする。

まず、[B2] について述べる。

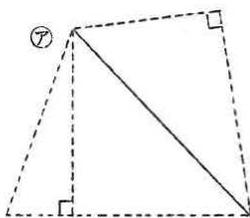
[B2] 右の図のような四角形の土地の面積を求めるには、この四角形をどのような形に分けて計算すればよいでしょうか。その分けかたがわかるように、図に赤えんぴつで ——— をひきなさい。



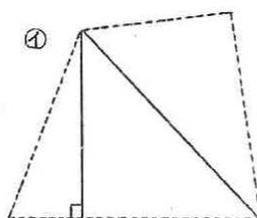
[B0] を解くとき、全体の 22% の子どもは、小公園の形を台形とみて計算している。[B2] では、「この四角形をどのような形に分けて計算すればよいでしょうか」ときいているから、[B0] の問題場面とはかなりちがう。だから、小公園の形を台形とみて、そのまま計算しようとする子どもはあらわれなくなるはずである。それから、[B2] の応答には [B0] の影響があるとみなければならない。

さて、[B2] の応答は、次のとおりであった。(図の実線が応答を示している)

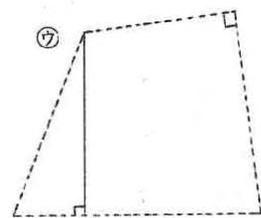
第10図



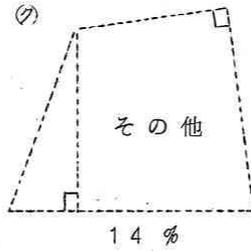
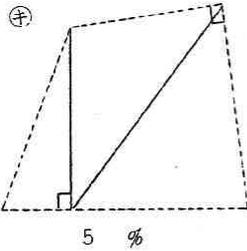
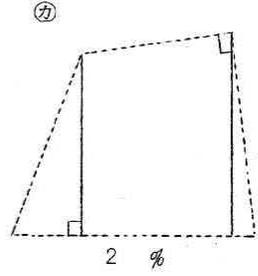
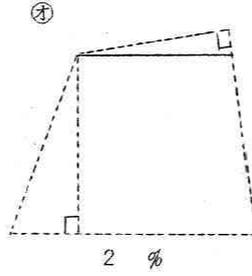
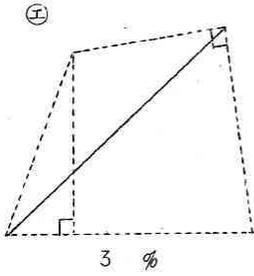
61%
(正答)



5%
([B0] の④の応答に当たる)



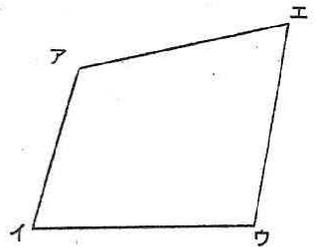
8%
([B0] の⑦または⑧の応答に当たる)



これらの応答のうちの誤答は、2類型に大別される。その一つは、図形を見誤ったもので、㉓がそれである。もう一つは、「四角形、三角形、台形などに分割してそれらの面積を計算し、合計すれば、もとの四角形的面積が求められる」ことがわかっているが、与えられた条件を無視したための誤りで、㉑、㉔、㉕、㉕、㉕がそれである。後者の誤りについて説明しよう。

いま、「右の四角形（第11図）の面積を求めなさい。」という問題を与えられたとする。このときの解決順序を考えてみよう。

第11図



㉑ まず、この四角形が、正方形、長方形、平行四辺形、台形でないことを確かめる。

㉒ 次に、この四角形を二つの三角形に分割する。このとき、対角線アウによって分割したほうが測定しやすいか、対角線イエによって分割したほうが測定しやすいか、についての考察が行なわれることもある。

㉓ 分割した三角形について、底辺をきめ、それによって、測るべき高さを確認し、底辺と高さを測定する。

㉔ 二つの三角形の面積を計算し、その和を求めて答えにする。

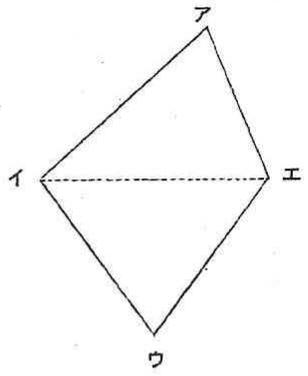
ところが、14 の場合は、上の㉑と㉓の順序を変えなければならないのである。「三角形をきめてから底辺と高さを測る」のではなく、「すでに測ってある長さを底辺と高さにとることのできる三角形を見つければよいことに気づく」ことが要請されるのである。14 のむずかしさの一つはここにあるといえるし、㉑、㉔、㉕、㉕、㉕の応答をした子どもは、このことを理解していない。

なお、㉑、㉔、㉕、㉕、㉕の応答は、四角形に分割して面積を求めることを理解している応答であると書いたが、これらの中には、理解が半っていない応答もあるかもしれない。しかし、そのことは、これまでの考察にさほど支障となることではない。

「すでに測ってある長さを底辺と高さにとることのできる三角形を見つければよいことに気づく」こと

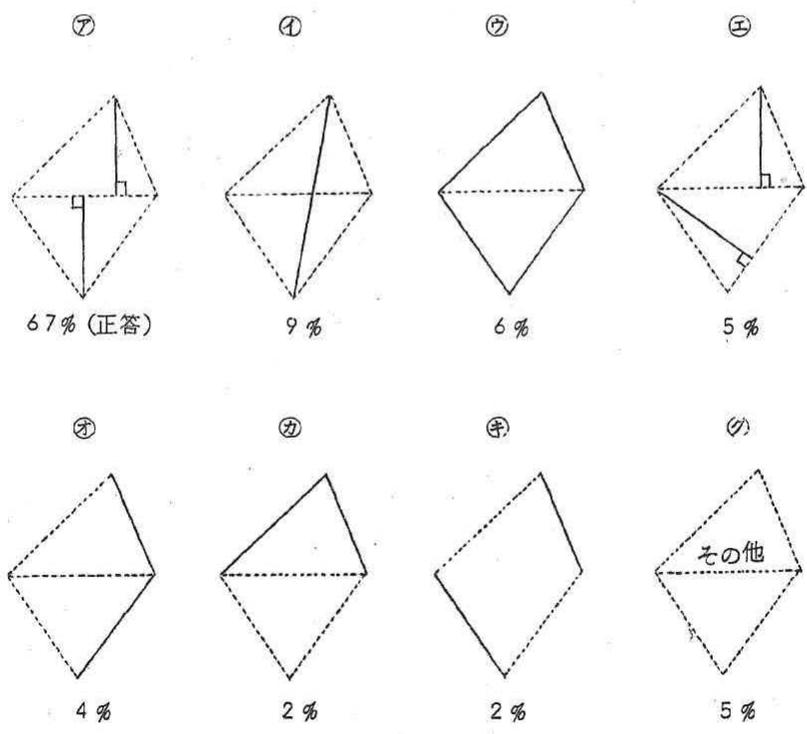
が、**14**を解くために必要であった。このことについての子どものようなすは、すでに**B2**においてみたのであるが、**B3**について、さらに考察することにして。

B3 右の図のような四角形の土地があります。イからエまでの長さをはかったら9mでした。
 この土地の面積を求めるには、イからエまでの長さのほかに、どことどこの長さをはからなければならないでしょうか。はからなければならないところがわかるように、赤えんぴつで —— をひきなさい。



B3 は、四角形の土地の面積を求めるとき、すでに測定してあるイエの長さのほかに、どこの長さを測らなければならないかをきいている。この問題の応答の概要は次のとおりである。(おもな応答の類型とその百分率だけをあげる。図の実線が応答である。)

第12図



上の応答のうちの誤答は、次のように分類することができるであろう。まず、すでに長さを測ってある対角線を三角形の底辺としようとしているもので、㊸がそれである。次に、その対角線を三角形の底辺とすることに気づいていないもので、㊹, ㊺, ㊻, ㊼がそれである。㊸は、この応答だけでは、両者のどちらであるのか判断することができないが、この応答をした子どもの[B0], [B2]の応答を見ると、後者である場合が多いように思われる。

次に、[B0]の正答者と、[B3]の正答者との相関をみると第3表のようになる。[B0]の正答者で[B3]をまちがえた者が全体の2%しかいないことは、[B3]が[B0]を解くための要素であることを示しているといつてよいであろう。

なお、[B2]が[B0]を解く過程に位置づけられる問題であることはいふまでもないが、[B2]と[B3]との正答者の相関係数(r_t)はおよそ0.42で、かなりの相関があるとみてよい。

第3表 [B0] と [B3] との相関

		[B3]		計
		正	誤	
[B0]	正	21	2	23
	誤	46	31	77
計		67	33	100

(数値は%を示す)

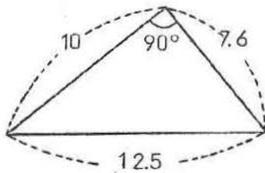
b 平面図形の面積の求め方についての理解

[B1] と [B4] は、平面図形の面積の求めかたについて理解しているかどうかをみる問題である。

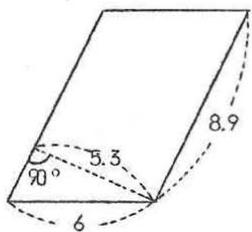
[B1] つぎのそれぞれの形の面積を求める公式を書きなさい。

- ① 正方形 (答) (正方形の面積) =
- ② 長方形 (答) (長方形の面積) =
- ③ 平行四辺形 (答) (平行四辺形の面積) =
- ④ 台形 (答) (台形の面積) =
- ⑤ 三角形 (答) (三角形の面積) =

[B4] つぎの図の面積を求めなさい。(図の長さの単位はどれもmです。)

①  (式)

(答)

②  (式)

(答)

③

④

(式)

(答)

(式)

(答)

B1の正答率は次のとおりであった。

- ① (正方形) 100% ② (長方形) 98% ③ (平行四辺形) 67%
 ④ (台形) 86% ⑤ (三角形) 82%

このように、平行四辺形をのぞいては、やや高い正答率を示している。

B4の正答率は次のとおりである。

- ① (直角三角形) 80% ② (平行四辺形) 62%
 ③ (三角形) 85% ④ (平行四辺形) 75%

①～④のうち、①と②は、③および④にくらべて、底辺、高さを決めることがむずかしいであろうと予想していたが、応答を調べてみると、やはり底辺、高さを決めることにつまずいている者が多かった。①と③、②と④の正答率をくらべると、①と③の間には5%の有意水準で差があり、②と④の間には1%の有意水準で差があることがわかった。このように、三角形や四角形の求積については、底辺、高さを決めることが大きなたまづきになっているようである。

c 図形の認知と測定

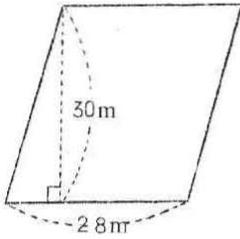
ふたたび **B0** にかえて、なぜ多くの子どもが、□アイウエを台形とみたり、□アオウエを台形とみたりしたのか考えてみよう。

このことについてのデータは、分析的問題の応答からはでない。

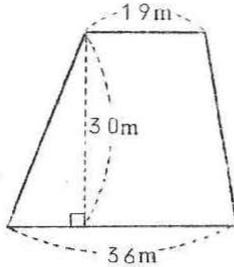
教科書にのっている平面図形の求積についての問題を見ると、次のような問題が多い。

問題 下の図の四角形の面積はそれぞれ何平方メートルでしょうか。

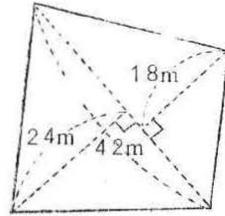
(1)



(2)

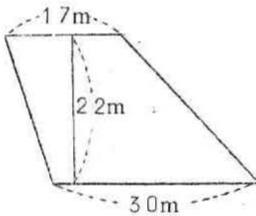


(3)

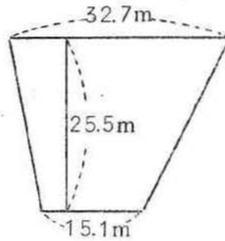


問題 つぎの台形の面積は何 m^2 ですか。

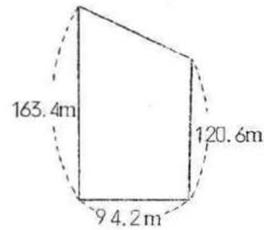
(ア)



(イ)



(ウ)



これらの問題には欠点があるわけではない。この二つの問題を例にしたのは、次のような共通性があるからである。

㉑ これらの図形が、平行四辺形、台形などである、ということがすでに決まっていること。

㉒ 底辺、高さをどこにとるか、その長さがどれほどであるか決まっていること。

だから、子どもは、これらを前提にして面積を求めればよいことになる。子どもがしなければならないことは何か。それは、極端に言えば、求積の公式を適用して計算するだけである。

教科書にのせる問題は、教科書のもつさまざまな制約のために、上のようになりやすいのはやむを得ないことであろう。しかし、子どもが経験する問題が、みんなこのような (㉑)、(㉒)の段階を省略した問題だとしたら、**[B0]**の結果のような子どもが多くなるであろう。

与えられた図形がどのような図形であるか (たとえば、平行四辺形かひし形か)、どこを底辺にとると、高さはどう測ればよいのか、などを考え、測定する経験は、平面図形の求積の重要な内容である。そして、このことが図形指導と測定指導をつなぐのである。

自虐的ないかたをすれば、**[B4]**の②、④の図形を少しも疑わずに平行四辺形だと思ってしまう子どもではいけないのである。これらの図形が平行四辺形であるかどうか確かめようとする子どもは、**[B0]**の四角形を台形と見誤ることはないであろう。

3) 調査問調 **15** について

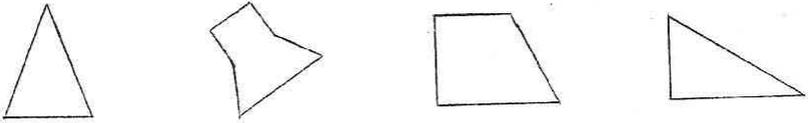
① 対称な図形についての子どもの理解の実態

a **C3** にあられた子どもの理解のようす

線対称および点対称についての子どもの理解の実態を知るために、分析的問題 **C3** をテストした。

C3 つぎの問いに答えなさい。

① つぎの図形のうち、直線について対称な図形に○をつけなさい。



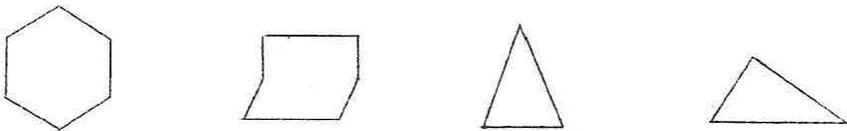
② つぎの図形のうち、点について対称な図形に○をつけなさい。



③ つぎの図形のうち、直線について対称で、点についても対称な図形に○をつけなさい。



④ つぎの図形のうち、直線についても、点についても対称でない図形に○をつけなさい。



C3 の正答率は次のとおりであった。正答率の算出のしかたは次のとおりである。

小問(①~④)ごとに、一つの正しい応答を1点とし、一つの誤った応答をマイナス1点として、その和をその小問の得点とする。ただし、得点がマイナス1点およびマイナス2点になる場合は、それらを0点とする。この得点から正答率を計算する。

- ①の正答率 85%
- ②の正答率 62%
- ③の正答率 74%

④の正答率 …………… 74%

これらの正答率について、有意な差があるかどうかの検定をした結果は、次のとおりであった。

- ①と③との間には、1%の有意水準で差がみられる。
- ①と②との間には、1%の有意水準で差がみられる。
- ②と③との間には、有意な差がみられない ($P > 0.05$)。

これらの結果から、この調査対象児童について次のことがいえる。

[C3] について、「直線について対称な図形」を見つけることは、「点について対称な図形」、「直線についても点についても対称な図形」、「直線についても点についても対称でない図形」を見つけることよりもやさしい。「点について対称な図形」を見つけること、「直線についても点についても対称な図形」を見つけること、「直線についても点についても対称でない図形」を見つけることのむずかしさには差がない。

b 正三角形および正五角形を点対称であるとみる子ども

[C3] ②では、正三角形が点対称であるかどうかを問うており、③では、正五角形が線対称でもあり点対称でもあるかどうかを問うている。これらの図形に○をつけた子どもは、正三角形および正五角形が点対称であると思っているとみてよい。

[C3] の誤答傾向のうち、最も著しいものは、正三角形および正五角形を点対称とみる誤りであって、この誤答率は、

正三角形を点対称とみたもの …………… 22%

正五角形を線対称でもあり点対称でもあるとみたもの …………… 17%

であった。

正三角形・正五角形などを点対称とみる子どもが多いことは、多くの教師が気づいていることであり、この分析的問題の作成に当たっても、このような誤答があらわれることを予想していたのであるが、上の数値はわたくしたちが予想していたものよりも大きかった。

このような誤りが起こらないようにするための指導法は、この研究からはでてこない。この研究からいえることは、点対称の定義 — ある形を一つの点を中心として 180° 回転したとき、もとの形にぴったりとかさなれば、この形は点について対称であるという — の「 180° 回転したとき」の理解のさせかたに問題点があるのではないかということである。

なお、上に述べた誤答傾向は、[C2] の応答にも同じようにならわれている。[C2] のことについてはあとで書くことにする。

② この問題の文章のむずかしさと子どもの読解力

a 予備調査にあらわれた著しい傾向

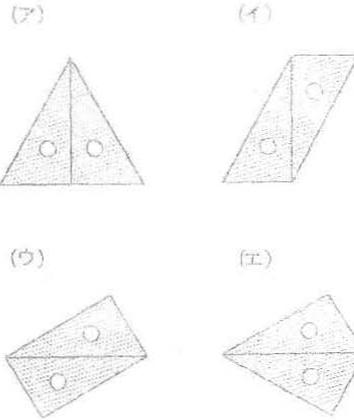
調査問題 [15] についての予備調査（応答調査）の結果は、次のとおりであった。

15 形も大きさも同じ三角定木（ 30° と 60° の角をもつもの）2枚を組み合わせて、つぎの1, 2, 3, 4の四とおりの図形ができるかどうかを考えてみることにしました。

- 1 直線についても、点についても対称である図形
- 2 直線について対称であるが、点については対称でない図形
- 3 点について対称であるが、直線については対称でない図形
- 4 直線についても、点についても対称でない図形

右の図で示した四つの図形は、そのときに、はるおくんが作ったものです。この(ア)、(イ)、(ウ)、(エ)の図形で、上の1, 2, 3, 4の四とおりのものが、できているでしょうか。

できていないものがあったら、その番号を の中に書きなさい。



15の答え

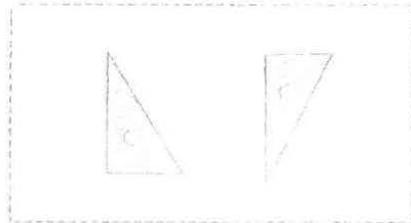
20

1	10%	2	6%
3	10%	4 (正答)	32%
1, 3	1%	1, 4	1%
1, 2, 3	1%	ない	1%
ア	3%	イ	8%
ウ	3%	エ	7%
エ, ウ	1%	ア, イ, ウ, エ	1%
(無答)	15%		

この応答の著しい傾向の一つとして、図形の記号(ア, イ, ウ, エ)を答えにしている子どもが23%もいることである。この子どもは、15の文章を読みとれなかったのであろうと判断して、分析的問題C1を作成した。

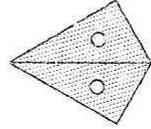
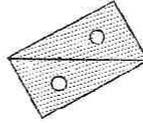
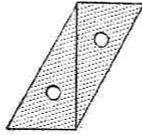
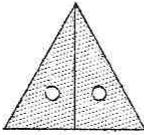
C1 形も大きさも同じ三角定木(右の図)を2枚組み合わせて、つぎの1, 2, 3, 4の四とおりの図形ができるかどうかを考えてみることにしました。

- 1 直線についても、点についても対称である図形
- 2 直線について対称であるが、点については対称でない図形
- 3 点について対称であるが、直線については対称でない図形
- 4 直線についても、点についても対称でない図形



はるおさんは、つぎの図形を作りました。この中に、上の1, 2, 3, 4の四とおりの図形があるでしょうか。

ないものがあつたら、その番号を の中に書きなさい。



(答)

[C1] は、主として上に述べた理由によって作成したので、[15] ([C0] と同じ) とのおもなちがいは、図形にア、イ、ウ、エの記号をつけてないことである。ア、イ、ウ、エの記号がないから、予備調査にあらわれたア、イ、……などの23%の応答はなくなるはずであるので、そのことが、[C0] と [C1] の正答率にどのような影響を与えるかを見ようとした。

なお、分析的問題 [C2] も、[15] の問題内容を単純化した問題であると作成者は考えているのであるが、[C2] には、ほかのねらいもあるので、分節的な小問①, ②, ③, ④を設けた。そのため、[C0], [C1] とならべて分析するには不都合な点もあるが、参考資料として、[C0], [C1] といっしょに考えてみることにした。

[C0] 形も大きさも同じ三角定木 (30° と 60° の角をもつもの) 2枚を組み合わせて、つぎの1, 2, 3, 4の四とおりの図形ができるかどうかを考えてみることにしました。

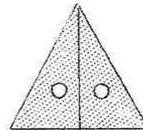
- 1 直線についても、点についても対称である図形
- 2 直線について対称であるが、点については対称でない図形
- 3 点について対称であるが、直線については対称でない図形
- 4 直線についても、点についても対称でない図形

右の図で示した四つの図形は、そのときに、はるおくんが作ったものです。この(ア), (イ), (ウ), (エ)の図形で、上の1, 2, 3, 4の四とおりのものが、できているでしょうか。

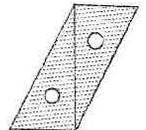
できていないものがあつたら、その番号を の中に書きなさい。

(答)

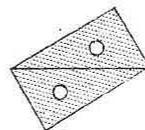
(ア)



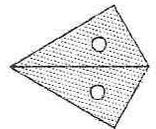
(イ)



(ウ)

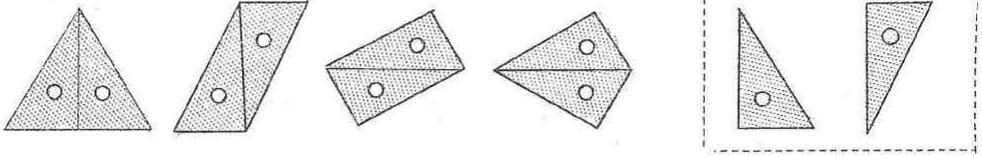


(エ)



[C2]

右の 中の図のような形も大きさも同じ三角定木を2枚組み合わせて、つぎの四とおりの図形をつくりました。



- ① これらの図形の中に「直線についても、点についても対称である図形」があるでしょうか。あったら、その図形に1と書きなさい。
- ② これらの図形の中に「直線について対称であるが、点については対称でない図形」があるでしょうか。あったら、その図形に2と書きなさい。
- ③ これらの図形の中に「点について対称であるが、直線については対称でない図形」があるでしょうか。あったら、その図形に3と書きなさい。
- ④ これらの図形の中に「直線についても、点についても対称でない図形」があるでしょうか。あったら、その図形に4と書きなさい。
- ⑤ 1, 2, 3, 4のうち、なかったのはどれでしょうか。 (答)

b 文章のむずかしさと正答率

[C0], [C1], [C2] の文章のむずかしさによる正答率のちがいを調べるためには、これらの問題をテストする a, b, c グループの子どもが、この類型の問題を解く力について等質でなければならない。a, b, c グループは、その意味で等質であるかどうかわからないし、また、これらのグループから等質群を抽出することも困難であったので、次のような分析をした。

まず、[C0] の応答を調べ、その中にア、イ、ウ、エなどの応答がどのように含まれているかをみた。その結果は次のとおりであった。

1	6人	2	1人	
3	5人	4 (正答)	36人	
1, 3	2人	1, 4	12人	
2, 4	5人	3, 4	2人	
1, 2, 3	1人	1, 2, 4	2人	
2, 3, 4	2人			
イ	2人	ウ	1人	} 11人
ア, エ	1人	イ, エ	1人	
イ, ウ	1人	ウ, エ	1人	
ア, イ, エ	2人	ア, イ, ウ, エ	2人	
(無答)	2人	合計	87人	

次に、このイ、ウ……などの応答をした子どもの文章読解力がどの程度であるかを調べることにした。その方法として、これらの子どもの学級担任から、文章読解力の評定をしてもらった。評定の方法とし

ては、5, 4, 3, 2, 1の5段階の評定尺度を用いることにし、各学級とも、5が7%, 4が24%, 3が38%, 2が24%, 1が7%になるようにした。(この評定は、b, cグループの各学級についても行った。なお、評価段階の5がすぐれた者、1が劣る者である。)

[C0]について、イ, ウ……などの応答をした子どもの文章読解力の評定は次のとおりであった。

4……………4人 3……………1人, 2……………4人 1……………2人

このように、文章読解力の劣る者だけがイ, ウ……など図形の記号を答えているとはいえないことがわかった。

さて、[C0]や[C1]を解くために必要な能力のうち、おもなものを考えてみると、それは、①対称な図形についての理解・知識と②問題の文章を読みとる力であるといつてよいであろう。このように考えると、次のことがいえる。ある子どもが[C0]をまちがえたとする。その原因は①であるか、それとも②であるのかわからない。その両方であるかもしれない。ところが、もし、この子どもがまちがいが原因が①ではないという保証があれば、②の状況をみることができる。このような発想にもとづいて設定されたグループが[C3]完全正答者グループである。

[C3]完全正答者とは、[C3]の①, ②, ③, ④にすべて正しく応答した子どもで、その人数は次のとおりである。

aグループ……29人 bグループ……38人 cグループ……34人

これらの子どもは、対称な図形についての基本的な理解・知識があると考えてよいであろう。そうだとすれば、これらの子どもの[C0], [C1], [C2]についての誤答は、それ以外の要素のうちとくに文章のむずかしさによると考えてよいのではなからうか。

[C3]完全正答者グループについて、[C0], [C1], [C2]の正答率([C2]については小問⑤の正答率)を調べたら、次のとおりであつて、これらの正答率については、有意な差が認められなかった。(P>0.05)。

aグループ……51.7% bグループ……50.0% cグループ……52.9%

これまでの推論が正しいとすると、[C3]完全正答者グループについては、問題の文章のむずかしさは影響しないことになる。このようなことが、[C3]完全正答者グループ(P1とする)と、それ以外の子どものグループ(P2とする)に分けて、文章読解力の評定結果を調べた。その結果が第4表である。

第4表 P1, P2グループの文章読解力

		aグループ			bグループ			cグループ		
		P1	P2	計	P1	P2	計	P1	P2	計
評 定 段 階	5	5	1	6	5	1	6	5	1	6
	4	7	13	20	13	7	20	14	6	20
	3	10	25	25	17	18	25	10	23	23
	2	7	13	20	3	17	20	3	17	20
	1	0	6	6	0	6	6	2	4	6
計		29	58	87	38	49	87	34	51	85

この表の数値について、頻数の差の検定をした結果、a, b, cの3グループとも、P1とP2との間に1%の有意水準で差があることがわかった。つまり、[C3]完全正答者グループは、それ以外の子どもグループにくらべて、文章読解力がすぐれているのである。だから、さきに述べた結論を、[C3]完全正答者でない者のグループには用いることはできない。

次に、a, b, cグループについて、[C0], [C1], [C2]の正答率を、文章読解力の評定段階ごとにまとめ、aグループと、bおよびcグループの差をみようとした。これは、もし、[C0]の文章が[C1]や[C2]の文章にくらべてむずかしければ、その影響を最も受けるのは分章読解力の劣る子どもであろうという仮説にもとづいている。

その結果は次のようであった。

第5表 文章読解力の評定段階ごとの正答者・誤答者数(1)

グループ		a			b			c		
問題		<u>[C0]</u>			<u>[C1]</u>			<u>[C2]</u>		
正誤		正	誤	計	正	誤	計	正	誤	計
評定段階	5	3	3	6	3	3	6	5	1	6
	4	10	10	20	9	11	20	11	9	20
	3	17	18	35	15	20	35	14	19	33
	2	5	15	20	9	11	20	6	14	20
	1	1	5	6	1	5	6	2	4	6
計		36	51	87	37	50	87	38	47	85

※ 表の中の数値は人数を示す。

第6表 文章読解力の評価段階ごとの正答者数(2)☆

グループ		a	b	c
問題		<u>[C0]</u>	<u>[C1]</u>	<u>[C2]</u>
評定段階	5, 4	13	12	16
	3	17	15	14
	2, 1	6	10	8
計		36	37	38

☆ χ^2 テストを行なうために、第5表を整理した。

※ 表の中の数値は人数を示す。

第6表の数値によって、まずaグループとbグループについて、頻数の差をみるために χ^2 テストを行なった。その結果は、有意な差が認められなかった($P > 0.05$)。ついで、評定段階2, 1の項目についてC.R.法によって検定した。その結果も、有意な差が認められなかった。

同じ方法で、aグループとcグループについても頻数の差の検定を行なったが、有意な差は認められなかった。

この結果、文章読解力の劣る子どもについても、[C0], [C1], [C2]の文章のちがいによる差はないことがわかった。

以上の三つの方法による吟味によつていえることは、[C0], [C1], [C2]の文章のちがいによる影響は、とくに認められない、ということである。しかし、さきにも書いたように、これらの吟味の方法については検討を要する点が多く、それらは今後の研究にまたなければならぬ。

⑧ 問題の吟味

a 子どもの思考過程と答え

[15]を解くとき、子どもは、(ア) (イ) (ウ) (エ)の図形がそれぞれ1, 2, 3, 4のどれであるかを判断してから、そこにはないものを答えの欄に書くはずである。しかし、わたくしたちが見ることができるのは応答だけであって、応答がでてくるまでの過程はわからないのである。

この問題を解くときの正しい過程と正しい応答は右のとおりであるが、必ずしもこの過程を通らなくても正答がでてくる可能性はじゅうぶんにある。[C2]は、このことについての実態をみるめあてをもって作られたのである。

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(答)
2	3	1	2	4

[C2]の結果を、①, ②, ③, ④が正しくできた者、⑤が正しくできた者という二つの観点によって整理すると、第7表のようになる。

この表によってわかることは、⑤に正しく応答した37人のうちの半数の子どもが正しくない過程を通っているのである。

※をつけた19人の①~④の内容を分類すると、次のようになる。

ア ①~④がまちがっていても、⑤は偶然に正しくできるはずである型

第7表 [C2]の応答

		⑤		計
		正	誤	
① ④	正	18	2	20
	誤	19※	46	65
計		37	48	85

たとえば、左の形から右の形へ順に 1, 3, 3, 2 または 2, 1, 1, 3 など……………16人

イ ①~④がまちがっていると、⑤もまちがうはずである型

たとえば、左の形から右の形へ順に 2, 1, 1, 2 または 2, 3, 4, 2 など……………3人
上に述べた過程は、[C2]では明らかになるけれども、[15] ([C0]) や [C1]ではわからない。わからないままに正答として扱われてしまうのである。

b 正三角形の対称性と [15] の問題点

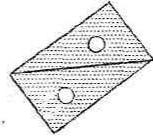
正三角形を点対称とみる子どもが多いことは、すでに述べたとおりであるが、[15], [C1], [C2]にも正三角形がでてくる。[15], [C1]では、子どもが正三角形をどうみているかわからない。[C2]ではそれがわかる。[C2]で、正三角形に1と書いている子どもは18人(21%)で、これらの子どもは、正三角形を直線についても点についても対称であるとみているといえる。また、正三角形に3と書いている子どもは5人(6%)で、これらの子どもは正三角形を点について対称であるとみているといえる。両者を合わせると、23人(27%)になる。

このように、正三角形を1とみる(2が正しい)子どもが多いのであるが、そのことが[15]の応答にどう影響するであろうか。結論をいえば、他の図形(平行四辺形, 長方形)をまちがえた場合よりも影響が少ないのである。その理由は、2の図形がもう一つある([15]の(エ))からである。こうして、正三角形を点対称とみる誤りは、問題を解く過程で埋没してしまって、応答に影響しないことが多いのである。

c 15 の図形 (ウ) の対称性

図形 (ウ) が直線についても対称であるかどうかについて、問題になったことがあるといわれる。この図形は、外形にだけ着目すれば長方形であるから、直線についても点についても対称である。ところが、二つの円 (穴) や、対角線 (三角定木を合わせた線) にも着目すると、この図形は点については対称ではあるが、直線については対称ではない。そして、後者のみかたをすると、15 の答えは出題者の意図とちがってくる。他の三つの図形に対する判断が正しければ答えは、1, 4 となるのである。

第 13 図 図形 (ウ)



いままでに書いたことの中から、このことに関係があると思われることがらをまとめてみよう。

ア 予備調査の応答の中には、1, 4 の応答は 1% しかなかった。

イ C0 の応答の中には 1, 4 の応答が 14% (12 人) あった。

さて、C2 の応答には、この図形をどうみているかがはっきりあらわれているのであるが、ある子どもがこの図形に 3 と書いていたとしても、この子どもが、二つの円や対角線に着目して線対称ではない、と判断したのだとはいえない。なぜなら、この子どもの対称な形についての理解・知識が不十分であって、たとえば図形の見かけの位置にまどわされたのかもしれないからである。そこで、対称な形についての基本的な理解・知識をもっていると考えられる子どもが、この図形にどう応答しているかを調べることにした。そこで、さきに述べた C3 完全正答者について、この図形についての応答を調べたのである。

その結果は、この図形を線対称であるとみている者が 20 人、線対称でないともみている子どもが 14 人であって、かなり多くの子どもが線対称ではないともみていることがわかる。

しかし、この傾向は、対称な形についての学習指導のしかたによってかなりちがってくるようである。新潟市および高田市のある小学校の 6 年生に面接して得た応答では、この図形の円や対角線を指摘してこの図形は線対称ではないという子どもはあらわれなかった。

d 問題の文章のむずかしさと問題のねらい

<この問題の文章のむずかしさと子どもの読解力>のところで述べたように、かなり多くの子どもが、問題の文章を読みとれないために、図形の記号ア、イ……などを答えにしていた。これらの子どもは、極論すれば、問題のねらいである「平面図形の対称性についての理解」についてつまずいたのではなく、読解力についてつまずいたのである。だから、文章の抵抗がなかったならば、15 に示された四つの図形の対称性について正しい応答をしたかもしれない。

さて、四つの図形の記号は必要であろうか。子どもがこの問題を解くときには必要でないようである。C1 のようにしても不自由ではないはずである。

図形の記号 (ア), (イ), (ウ), (エ) は、問題のねらいと、問題を解こうとする力をズレさせる要因になっているのではないだろうか。

2 中学校第3学年

(1) 調査問題 6 について

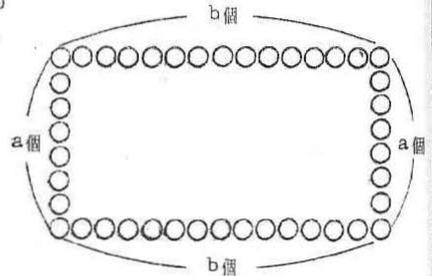
① 子どもの応答とその傾向

a 予備調査にあらわれた傾向

調査問題 6 についての予備調査の結果は次のとおりである。

6 右の図のように、おはじきがたてに a 個、横に b 個ならんでいます。このとき、おはじきの全部の数を表わす式だけを、次のアからオまでの中からすべて選んで、解答用紙のそれらの記号を○で囲みなさい。

- ア $2(a+b)$
- イ $2(a+b)-4$
- ウ $2(a+b)-2$
- エ $2a+2(b-2)$
- オ $ab-(a-1)(b-1)$



ア……………23%	イ……………26% [※]	ウ……………10%	} 68%
エ……………8%☆	オ……………1%		
イ, エ……………26% [※] ☆	ア, オ……………3%	ア, エ……………1%☆	
ア, ウ, オ………1%	(無答) ……1%		

この問題の正答は、イ, エである。予備調査にあらわれた応答をみると、次のような傾向があることがわかる。

- ㊦ 一つの選択肢にだけ○をつけている子どもが全体の68%もあること。
- ㊧ イに○をつけた子ども(※ — 52%)が、エに○をつけた子ども(☆ — 35%)よりも多いこと。

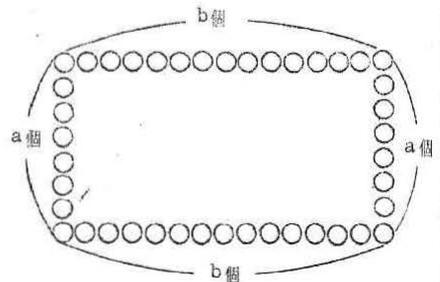
ここでは、主として㊧の傾向について調べることにした。イの式のほうがエの式よりも理解しやすいのかどうかをさぐろうとしたのである。

分析問題 A0, A3, A5 のテスト結果によって、このことを分析してみよう。

b A0 にあらわれた傾向

A0 右の図のように、おはじきがたてに a 個ならんでいます。このとき、おはじきの全部の数を表わす式だけを、次のアからオまでの中からすべて選んで、それらの記号を○で囲みなさい。

- ア $2(a+b)$
- イ $2(a+b)-4$
- ウ $2(a+b)-2$
- エ $2a+2(b-2)$
- オ $ab-(a-b)(b-1)$



[A0] は、[6] と同じ問題である。[A0] をテストしたのは、a, b の 2 グループであるが、あとで述べるように、両グループの [A0] のテストのしかたがちがうので、グループごとにテスト結果を集計した。

ア a グループ

イ, エ…………… 7 6 %※☆	ア…………… 5 %	イ…………… 4 %※
ウ…………… 3 %	エ…………… 1 %☆	オ…………… 1 %
ウ, オ…………… 2 %	ア, エ…………… 3 %☆	イ, オ…………… 2 %※
ウ, エ…………… 1 %☆	ア, オ…………… 1 %	ア, ウ, エ…………… 1 %☆

イに○をつけた子ども (※) は全体の 8 2 % (7 7 人) で、エに○をつけた子ども (☆) も同数である。

イ b グループ

イ, エ…………… 5 3 %※☆	ア…………… 8 %	イ…………… 1 3 %※
ウ…………… 6 %	エ…………… 0 %☆	オ…………… 3 %
ウ, エ…………… 5 %☆	ア, エ…………… 2 %☆	ア, ウ…………… 1 %
イ, オ…………… 1 %※	ウ, オ…………… 1 %	
イ, エ, オ…………… 5 %※☆	ア, ウ, エ…………… 2 %☆	

イに○をつけた子ども (※) は全体の 7 2 % (7 1 人) で、エに○をつけた子ども (☆) は 6 7 % (6 6 人) であって、両者には有意な差がない ($P > 0.05$)。

このように、予備調査では、イに対する応答と、エに対する応答にかなりのちがいがみられたのに、予備調査の場合よりも正答率の高い b グループや、b グループよりもさらに正答率の高い a グループでは、その差がみられない。このことを、「この問題の内容について、理解の程度が低いグループでは、イよりもエのほうがむずかしい」とみたらよいのであろうか。それとも、そのほかの理由 — たとえば、この問題が選択法によっていること — によるのであろうか。

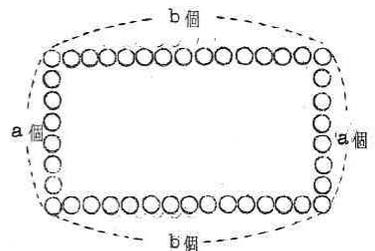
c 真偽法による確かめ

[6] には、「次のアからオまでの中からすべて選んで」と書かれているから、この文を読みとった子どもは、○をつける式が二つ以上あるかもしれないと思うはずである。しかし、何人かの子どもは、ほとんど習慣的に、○をつけるのは一つしかないと思いこんでいるかもしれない。そうだとすると、[6] の式の順序からみて、イのほうに○をつける子どもが多くなるだろう。その傾向を少しでも軽減するために、[6] を真偽法のかたちになおして、C グループにテストしてみた。それが [A5] である。

[A5] 右の図のように、おはじきが、たてに a 個、横に b 個ならんでいます。このとき、おはじきの全部の数を表わす式を、次のア からオ までの中から選んで、それらの記号に○をつけなさい。

また、このおはじきの全部の数を表わしていない式には、それらの記号に×をつけなさい。

ア $2(a+b)$	エ $2a+2(b-2)$
イ $2(a+b)-4$	オ $ab-(a-1)(b-1)$
ウ $2(a+b)-2$	



[A5]の結果は次のとおりである。

完全正答者	60%
イについての正答者	81%
エについての正答者	81%

このように、イとエについて、正答率には差がなかったのであるが、Cグループの能力がa, bグループとあまりちがわなければ、この結果は、[A0]の結果から予想できることである。

[A0] ([6])では、正答率の低いグループでは、イに対する応答とエに対する応答には差があり、正答率の高いグループではその差がなかった。このことから考えると、[A5]の結果は、cグループのようにやや正答率の高いグループについていえることであって、もっと正答率の低いグループでは、ちがった結果がでるかもしれない。

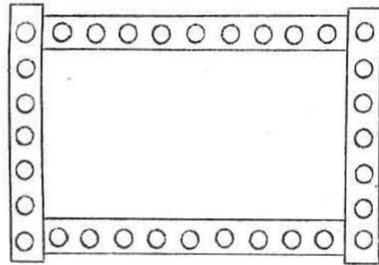
d 文字式と図解との関係

[A0]の図に示されているおはじきの数と、そこに書かれている文字式とが、合っているかどうか調べるとき、子どもは、式の中の文字や数字に合わせておはじきを第14図のように囲ってみるにちがいない。その囲みかたは、えんぴつなどを使って具体的にこなされることもあるし、心的操作として行なわれることもある。

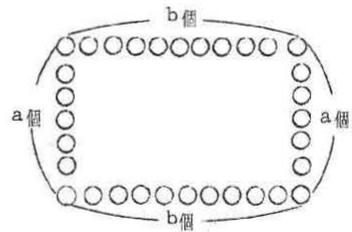
もし、そうだとすれば、[A0]の図に、おはじきの数を表わす文字式に合わせた囲みかたをかき入れ、その図と文字式の結びつきかたをきいてみたら、きわめて具体的なすがたで、子どもの考えかたの傾向がつかめるかもしれない。

このような発想によって作成されたのが[A3]である。

第 14 図



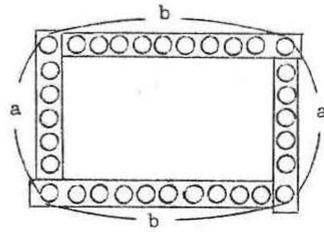
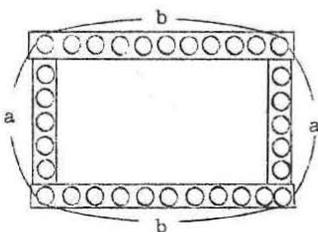
[A3] 右の図のように、おはじきが、たてにa個、横にb個ならんでいます。このおはじきの全部の数を表わす式をつくるために、下のア、イ、ウ、エのように、おはじきを で囲んでみました。

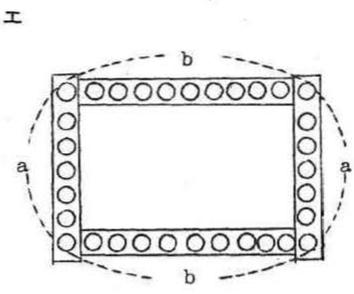
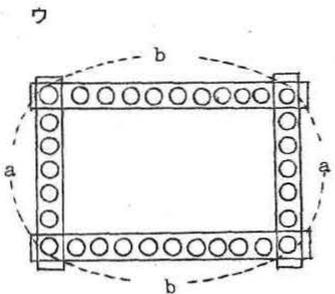


ア、イ、ウ、エのそれぞれの囲みかたに合っている式は、下の①、②、③、④、⑤のうちどれでしょうか。

ア

イ





- ① $2(a-1) + 2(b-1)$
- ② $2a + 2(b-2)$
- ③ $2(a+b) - 4$
- ④ $2(a-2) + 2(b-2)$
- ⑤ $2(a-2) + 2b$

(答) {

ア に合っている式 ……	
イ に合っている式 ……	
ウ に合っている式 ……	
エ に合っている式 ……	

[A3] では, [A0] の図のようにならんだおはじきの数を表わす文字式を四つとりあげ, それに合う囲みかたを図示したのであるが, その中には, [A0] のイおよびエの文字式も含まれている。

[A3] のテスト結果は次のとおりである。

正答率……………	78%
4問正答の者……………	63%
3問正答の者……………	6%
2問正答の者……………	15%
1問正答の者……………	13%
正答がない者……………	3%
各小問の正答率	
ア……………	74%
イ……………	82%
ウ ([A0] の イ) ……	75%
エ ([A0] の エ) ……	82%

上の各小問の正答率にはどれにも有意の差はない ($P > 0.05$)。このようなかたちの問題においても, [A0] のイとエには理解の差がみられないのである。

なお, [A3] の成績 (4, 3, 2, 1, 0点) と [A0] の成績 (正, 誤) の相関係数 (r_b) はおよそ0.43で, かなりの相関があるが, この数値はわたしたちが予想していた数値より低かった。

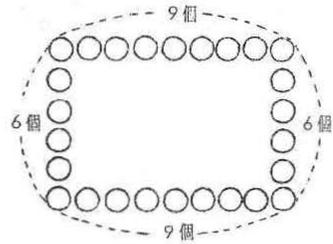
e 文字式の理解と数字式の理解

[6] においては, 与えられた数値が, a個, b個であり, それによって立てられている式が, $2(a+b)-4$ $2a+2(b-2)$ などであるので, 文字のもつ抽象性が子どもの理解を困難にしていると考えられる。そこで, a, bの代わりに数を与えたら, この問題に対する正答率はどうなるか, また, 数字式についての問題を解いたことが文字式についての問題を解くことにどう影響するか, などのめあてをもって, 分析的問題 [A1], [A2] を作成した。

A1 右の図のように、おはじきがたてに6個、横に9個ならんでいます。

このとき、おはじきの全部の数を表わす式だけを、次のアからオまでの中からすべて選んで、それらの記号を○で囲みなさい。

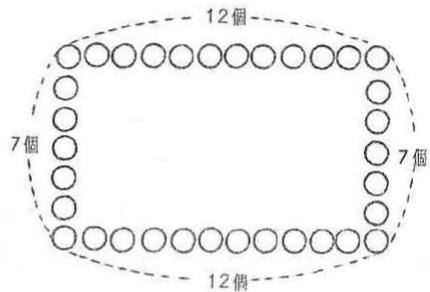
- ア $2(6+9) - 2$
- イ $2(6+9)$
- ウ $2(6+9) - 4$
- エ $6 \times 9 - (9-1)(6-1)$
- オ $2 \times 6 + 2(9-2)$



A2 右の図のように、おはじきがたてに7個、横に12個ならんでいます。

このとき、おはじきの全部の数を表わす式だけを、次のアからオまでの中からすべて選んで、それらの記号を○で囲みなさい。

- ア $2(7+12) - 2$
- イ $2(7+12)$
- ウ $2(7+12) - 4$
- エ $7 \times 12 - (12-1)(7-1)$
- オ $2 \times 7 + 2(12-2)$



次に、**A1**、**A2** によるテストの概要について述べる。

a, b 両グループは、「式」についての学習能力についてはほぼ等質である。それは、次の方法によって知った。

昭和39年度第1学期末に行なわれた「式」についての学年一斉テストにおける a, b 両グループの平均点および標準偏差は次のとおりであって、いずれも有意な差は認められなかった。

	(平均点)	(標準偏差)
aグループ	44.5	26.2
bグループ	45.4	24.6

そこで、aグループには、**A1**、**A2**、**A0** を同じ時間に解かせることにし、bグループには **A1**、**A2** を与えないで **A0** だけを解かせることにした。その結果は次のようであった。

ア. a, b 両グループの **A0** の正答率は、aグループが75%、bグループが53%で、両者の間には1%の有意水準で差がある。

イ aグループの、**A1**、**A2**、**A0** の正誤について、次のようにきわめて高い相関が認められる。

この結果から、文字式についての問題を解かせるとき、文字を数におきかえた式についての問題を経験させると、文字式に大きな影響があるといえる。

第8表

A1 と A2

		A2		計
		正	誤	
A1	正	66	3	69
	誤	2	24	26
計		68	27	95

(数値は人数を示す)

第9表

A2 と A0

		A0		計
		正	誤	
A2	正	65	3	68
	誤	6	21	27
計		71	24	95

(数値は人数を示す)

$r_t = 0.98$

$r_t = 0.95$

② 理解することと表現すること

a. この問題のねらい

6のねらいは、さきにも書いたように「具体的な事からについて、文字を用いて数量を式に表わす能力」と発表されている。しかし、この問題を見ると、おはじきの数はすでに式に表現されていて、子どもは、「それらの式と、おはじきの数が合っているかどうか」を調べることになる。だから、問題のねらいは、「文字を用いて数量を式に表わす能力」を見るのではなく、「ある数量を表わす文字式が正しいかどうかを見ぬく能力」を見るのでなければならない。

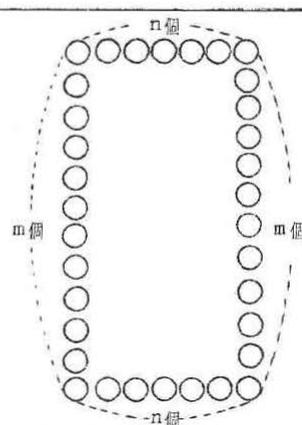
このようなズレは、客観的テストのかたちの問題については起こりがちである。たとえば、調査問題 11(注6)も、この問題を解くときの考えかたと、この問題を自由記述のかたちになおした問題を解くときの考えかたは、かなり異なる場合があるであろう。

さて、ここでたいせつなことは、「文字を用いて数量を式に表わす能力」と「ある数量を表わす文字式が正しいかどうかを見ぬく能力」が同じものであるかどうかということである。もし、それらが同じものであればよいが、ちがったものであれば、問題のねらいを変えるか、問題を変えるかしなければならないからである。

このような点について、子どもの応答を通して問題の吟味をするために、分析的問題 A4 を作成し、テストしたのである。

A4 右の図のように、おはじきがたてに m 個、横に n 個ならんでいます。
このおはじきの全部の数を表わす式を書きなさい。

(答)



b 「表現すること」の傾向

すでに述べたように、「ある数量を表す文字式が正しいかどうかを見ぬく」ことについては、次のような傾向が見られた。

- ㉗ 正答率が低いグループ（予備調査の結果を参照）では、 $\frac{1}{2}(a+b)-4$ についての正答率が、 $\frac{1}{2}(2a+2(b-2))$ についての正答率よりも高かった。
- ㉘ 正答率がやや高いグループ（a, bグループ）では、上に書いたような傾向は見られなかった。
A4 を b グループにテストした結果は次のようである。

- ㉗ 正答率……………85%
- ㉘ 応答の内容

$2(m+n)-4$ ……………	67%	……………	A0 のイに当たる
$2m+2(n-2)$ ……………	5%	}……………	A0 のエに当たる
$2(m-2)+2n$ ……………	4%		
$2(m-1)+2(n-1)$ ……………	1%		
$mn-(m-2)(n-2)$ ……………	2%		
$2m+2n-4$ ……………	2%		
$2(m+n-2)$ ……………	4%		
(誤答)……………	15%		

このように、たいそう強い傾向をもった結果がでている。

次に、bグループのA0の結果とA4の結果をくらべてみよう。

- ㉗ A0 の正答者の A4 の応答内容（%はA0の正答者に対する%である）
- | | | | |
|-------------------|-----|--------|---|
| $2(m+n)-4$ …………… | 76% | …………… | A0 のイに当たる |
| $2m+2(n-2)$ …………… | 4% | }…………… | A0 のエに当たる |
| $2(m-2)+2n$ …………… | 4% | | |
| (その他の正しい式)…………… | 10% | | |
| (誤答)…………… | 6% | | |

- ㉘ A0 と A4 の正誤の相関

第10表 A0 と A4

		A4		計
		正	誤	
A0	正	49	3	52
	誤	35	12	47
計		84	15	99

$r_{tt} = 0.6$

(数値は人数を示す)

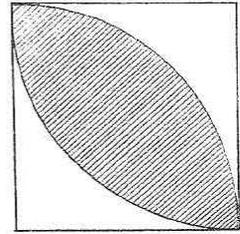
このように、bグループでは、「文字を用いて数量を式に表わす」ことについては、大部分の子どもが一つの類型の表わしかたをするという著しい傾向を示した。

bグループの二つの学級の数学担任教師にきいた結果では、それまでの学習指導で、この問題に直接影響するような教材をとりあげたことはないとのことであるから、このような傾向は、この年

れの子どもの思考傾向の一面を示しているように思われる。bグループの大部分の子どもが行なっているしかたは、たとえば、15図の斜線の部分の面積を求めるときなどに必要な考えかたで、 $2a+2(b-2)$ の考えかたよりもすすんだ考えかたであるように思われる。

以上の分析によって推察されることは、**6**に関して、子どもが「理解する」過程は平板的な過程であるが、「表現する」過程は個性的な過程であるということである。

第15図



(2) 調査問題 **10** 1について

① 数量間の関係の把握

a 予備調査にあらわれた傾向

調査問題 **10** 1 の本県における正答率は13.0%で、「式」の領域の問題の中では調査問題 **12** に次いで正答率が低かった問題である。

10 次の1, 2の問いの答えを、解答用紙に書きなさい。

1 木村さんの住んでいる都市の1か月分の水道料金は、 11m^3 以上の水を使用した場合は、 $(ax + b)$ 円 で計算されるといふ。ただし、 a, b は定数で、 x は1か月分の使用量(単位は立方メートル)を表わしている。

木村さんのうちでは、昭和39年の四月分の使用量は 16m^3 で料金は502円、五月分は 20m^3 で650であった。このことから a, b の値を求めよ。

この問題についての予備調査の結果は次のとおりである。

- $a = 37, b = -90$ (正答) 22%
- $a = 37, b = 317$ 3%
- その他(1類型1%) 22%
- (無答) 53%

このように、無答が53%もあって、子どものつまずきの原因の推測ができなかった。そこで、分析的問題の作成に当たっては、この問題を解く能力を、問題の文章を読みとること(数量関係をつかむことを含めて)と、連立二元一次方程式を解くことの二つの側面からとらえるように意図し、分析的問題 **B0**, **B1**, **B2**, **B3** を作成し、テストしたのである。

b 問題の理解と困難点

10 1の文章は、次のように読みとらなければならない。

木村さんの住んでいる都市の1か月分の水道料金は、 11m^3 以上の水を使用した場合は、 $(ax + b)$ 円 で計算されます。ただし、 a, b は定数で、 x は1か月分の使用量(単位は立方メートル)を表わしています。

木村さんのうちでは、昭和39年の四月分の使用量は 16m^3 で料金は502円、五月分は 20m^3 で650円でした。このことから a, b の値を求めなさい。

㉗ まず、(1か月の水道料金) = $a x + b$ という式が成り立つことがわからなければならない。
1か月の水道料金を y とおいて、 $y = a x + b$ というかたちで理解する子どもも多いかもしれない。

㉘ 次に、(1か月の水道料金) と、502円、650円の関係、それから x と 16 m^3 、 20 m^3 の関係が理解されると、次の二つの式ができる。

$$502 = 16a + b$$

$$650 = 20a + b$$

㉙ 次に、上の式を連立方程式として a 、 b を求めることができる、という理解が生まれる。
これらの段階のうち、㉗の段階に最も困難を感じる子どもが多いであろうと思われる。

c **B0** における子どもの立式

B0 は、**10** と同じ問題であるが、答えだけでなく式をも書かせるようにした。

B0 木村さんの住んでいる都市の1か月分の水道料金は、 11 m^3 以上の水を使用した場合は、 $(a x + b)$ 円で計算されます。
ただし、 a 、 b は定数で、 x は1か月分の使用料(単位は立方メートル)を表わしています。
木村さんのうちでは、昭和39年の四月分の使用量は 16 m^3 で料金は502円、五月分は 20 m^3 で650円でした。このことから、 a 、 b の値を求めなさい。

(式)

(答) $a =$ $b =$

子どもが立てた式は次のようである。

㉗ 正しい式 $\begin{cases} 16a + b = 502 \\ 20a + b = 650 \end{cases}$ 63%

㉘ 正しくない式 23%

$$\begin{cases} a(16 - 11) + b = 502 \\ a(20 - 11) + b = 650 \end{cases} \quad \begin{cases} 5a + b = 502 \\ 9a + b = 650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 650 = a x + b \\ 502 = a x + b \end{cases} \quad \begin{cases} 16a + b = 650 \\ 11a + b = 502 \end{cases} \quad \begin{cases} 5(a x + b) = 502 \\ 9(a x + b) = 650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a + b = 502 \\ 10a + b = 650 \end{cases} \quad \begin{cases} 502 = 16a \\ 650 = 20a \end{cases} \quad \begin{cases} 16a + 502b = 0 \\ 20a + 650b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16(x+b) = 502 & 16x + 16y = 502 \\ 20(x+b) = 650 & 20x + 20y = 650 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (ax+b) + 11 = 502 & a = (4 - 502) \div 16 \\ 16(a+b) - 20 = 650 & b = (5 - 650) \div 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 502a + b & ax + b = 11 & a \times 4 + b = 502 \\ 650a + b & 4a + b = 16 \end{cases}$$

$$16ab = 20ab \quad (650 - 502) \div (20 - 16) \times 11$$

⑦ 無答..... 14%

上の正しくない式を見ると、2、3の応答のほかは、この問題の数量間の関係をつかんでいない。23%の誤答と、15%の無答、合計38%の子どもの大部分は、数量間の関係をつかむ段階でつまづいていると考えられる。

d **B1** における子どもの応答

B1 は、**B0** の問題場面をどう理解しているかをみる問題で、ある程度、問題解決のためのヒントを与えながら子どもの反応をみようとしたのである。

B1 木村さんの住んでいる都市の1か月分の水道料金は、 11m^3 の水を使用した場合、次の式で計算されます。

$$\begin{aligned} &1\text{か月分の料金} = ax + b \\ &x \dots\dots\dots 1\text{か月分の使用量 (単位 } \text{m}^3) \\ &a, b \text{ は定数} \end{aligned}$$

木村さんのうちでは、昭和39年の四月分の使用量は 16m^3 で料金は502円、5月分は 20m^3 で650円でした。このことについて、次の問いに答えなさい。

① 「定数」というのは、どのような意味か。

② a, bの単位は何か。

aの単位..... bの単位.....

③ 四月分の料金は、どのような式で計算されたか。

(答) $502 =$

④ 五月分の料金は、どのような式で計算されたか。

(答) $650 =$

⑤ 上の③と④でつくった式から、 a と b の値を求めよ。

(式)

(答) $a =$ $b =$

[B1] の各小問の正答率は次のとおりである。

- ① — 定数の意味……………80%
 - ② — 四月分の料金についての数量間の関係
 - ③ — 五月分の料金についての数量間の関係
- }ともに正しくできた者……………73%

上の結果で注目しなければならないことは、③、④の結果である。③、④の正答率と、[B0] の立式の正答率をくらべると、73%と63%であるが、この率には有意の差がない ($P > 0.05$) のである。

[B1] ③、④と [B0] とのおもなちがいは、[B1] の 1か月分の料金 = $a x + b$ の式や、答えのところの $502 = 650 =$ などであるが、これらのちがいは、[B1] を解く子どもにとってヒントになると考えられるが、 b グループの約25%の子どもは、この程度の示唆では、この問題の数量間の関係をつかむことができないのである。

次に、[B1] ②の結果をみよう。この問題の水道料金は、 $(a x + b)$ 円で計算されるのであって、 $a x$ 円 + b 円として計算されるのではない。だから、[B1] ②のようなききかたは、子どもの考えかたを低い次元におろしてしまう危険もあるとは思ったが、 a 、 b についてどのように考えているか知りたかったので、あえて提出してみた。その結果は次のようであった。

- 「 a の単位」についての応答……………円 円/ m^3 $1 m^3$ あたりの料金 料金……………A群※
 m^3 g 月 月分 日 時間 (無答)……………B群
- 「 b の単位」についての応答……………円 わりびき料金 基本料金 $1 m^3$ の料金……………A群※
 m^3 使用量 月分 日 日数 (無答)……………B群

※ A群、B群の分類は、正答、誤答の分類ではない。

次に、「 a の単位」についてA群の応答をし、「 b の単位」についてもA群の応答をした者をAA群とし、そのほかの者をAA群とすると、AA群の人数は58人(59%)で、AA群の人数は41人(41%)であった。AA群の子どもは、 $a x + b$ の式の意味の理解が不じゅうぶんであると考えてよいと思われるが、そのような子どもが全体の半数近くもいることになるのである。

また、[B1] ③、④の結果との相関は次のとおりであって、相関が低いことがわかった。 a 、 b の単位をA群のように理解することができなくても、正しく立式することができるのである。

第11表 [B1] ②と [B1] ③、④

		[B1] ③、④		計
		正	誤	
[B1]	AA	44	14	58
②	AA	24	17	41
計		68	31	99

相関係数 (r_t) \doteq 0.309

(数値は人数を示す)

② 連立二元一次方程式を解くこと

a **B0** および **B1** における正しい式と正しい答え

B0 (**10**) ① を解くためには、連立二元一次方程式を解かなければならない。

$(650 - 502) \div (20 - 16) = 37$ $650 - 37 \times 20 = -90$ として計算をした子どももいたが、これも考えかたとしては連立二元一次方程式の加減法の考えかたを用いているのである。さて、**B0** および **B1** において、正しく立式した子どものうちの何人が正しい答えをだしているかを調べると、この連立二元一次方程式を解くことのむずかしさがわかるはずである。調べた結果は次のとおりである。

㉗ **B0** について

- 正しく立式した者……………60人 (63%) ❖
- 正しい答えをだした者……………46人 (48%)。❖に対して72%)

㉘ **B1** ③, ④について

- 正しく立式した者……………72人 (73%) ☆
- 正しい答えをだした者……………50人 (51%)。☆に対して69%)

このように、正しく立式した子どもの約30%が、連立二元一次方程式を解くときにまちがった計算をしているのである。

b **B2** における子どもの応答

B0 は、**B0** で扱う連立二元一次方程式とほとんど同じ程度の連立二元一次方程式の計算問題である

B2 次の連立方程式を解きなさい。(計算は の中に書きなさい。)

① $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$

(答) $x = \text{ } \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array}$
 $y = \text{ } \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array}$

② $\begin{cases} 5x + y = 18 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$

(答) $x = \text{ } \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array}$
 $y = \text{ } \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array}$

この問題の正答率は次のとおりであった。

- ①の正答率……………83%
- ②の正答率……………81%
- ①, ②ともにできた者……………77%

このように、全体の約20%の子どもは、ごく基本的な連立二元一次方程式の計算が不確実であった。なお、**B2** をまちがえた子どもで**B0** を正しく解いた子どもはただ1人であった。

c $bx + a$ の式をつくること

B₃ 高田さんのおとうさんは、ある会社の社員です。毎月の給料は、下のアとイを合計した金額です。

ア 毎月きまってもらう金額 a円

イ 残業手当 1時間について b円

(残業手当とは、きめられた時間以外にはたらいたときにもらう金額のことです。)

ある月の残業時間は、合計x時間でした。この月の給料の総額はいくらでしたか。

(答) 円

10 1では、 $(ax + b)$ 円の意味を理解しなければならないが、**B₃**では、 $bx + a$ の式をつくることを要求する。このような問題を通して、**10** 1についての子どもの理解のようすをみようとした。

B₃の正答率は87%であった。**B₃**のような具体的な文章を用いれば、 $bx + a$ の関係を大部分の子どもが理解することがわかる。

なお、**B₃**ができなかった子どもで**B₀**ができた子どもは1人もいなかった。

(3) 調査問題 **12** について

① **12** 1 について

a 予備調査の結果と **C₀** の結果

12 半径が r cmで、中心角が x° であるおうぎ形の弧の長さを l cm、面積を S cm²とすると、次の二つの関係があります。

$$l = \frac{\pi r x}{180} \text{ (1)}$$

$$S = \frac{\pi r^2 x}{360} \text{ (2)}$$

このとき、次の1、2の問いの答えを、1については、アからオまでの中から一つ選んで、解答用紙のその記号を○で囲み、2については、答えを解答用紙に書きなさい。

1 (1)の式からxを求める式はどれであるか。

ア $x = \frac{\pi r l}{180}$ イ $x = \frac{180 l}{\pi r}$ ウ $x = \frac{l}{180 \pi r}$

エ $x = 180 l - \pi r$ オ $x = l - \frac{\pi r}{180}$

2 (2)の式と1で求めた式から、Sを求める式を、rとlを用いて、最も簡単な形で表わせ。

C₀ 半径が r cm で、中心角が x° であるおうぎ形の弧の長さを l cm、面積を S cm² とすると、次の二つの関係があります。

$$l = \frac{\pi r x}{180} \quad \text{----- (a)}$$

$$S = \frac{\pi r^2 x}{360} \quad \text{----- (b)}$$

このとき、次の1、2の問いの答えを、1については、アからオまでの中から一つ選んで、その記号を○で囲み、2については、答えを の中に書きなさい。

1 (a) の式から x を求める式はどれであるか。

ア $x = \frac{\pi r l}{180}$ イ $x = \frac{180 l}{\pi r}$ ウ $x = \frac{l}{180 \pi r}$

エ $x = 180 l - \pi r$ オ $x = l - \frac{\pi r}{180}$

2 (b) の式と1で求めた式から、 S を求める式を、 r と l を用いて、最も簡単な形で表わせ。

(答)

調査問題 **12** 1 は、公式を変形して、 x について解く問題である。

この問題についての予備調査の結果は次のとおりである。

ア 10% イ (正答) 58% ウ 18%
 エ 4% オ 9% (無答) 1%

誤答のうち、アおよびウは、等式の変形に当たって乗除をまちがえたものとみられる。また、アおよびウの応答をした子どもは、エおよびオの応答をした子どもよりも等式の変形についてやや理解しているとみてよいように思われる。

次に、aグループの分析的問題 **C₀** 1 の結果をみると、正答率が78%であって、予備調査の100人のグループにくらべると、かなり正答率が高かった。

また、bグループの **C₀** 1 は、後に述べるように aグループとはちがった条件でテストしたが、その正答率は86%であった。

そして、両グループとも、選択肢アおよびウを選んだ誤答が多かった。

b 「Xについて解け」とその読みかえ

さきにも述べたように、**12** 1 は、 $l = \frac{\pi r l}{180}$ を x について解く問題である。 x について解くということは、 x を、180、 π 、 r 、 l を用いて表わすことであり、式の形としては、 $x = \text{$ という形になる。そして、このような形の式をつくるには、等式の性質を用いて式を変形すればよい。

さて、各教科書では、**12** 1 のような問題を提出するとき、どのような問いかけかたをしているのであろうか。このことをいくつかの教科書について調べてみた。

例1 つぎの等式をかつこの中の文字について解け。

$$S = v t \quad (t)$$

例2 つぎの方程式を () 内の文字を未知数として解け。

$$S = 2a - b \quad (a)$$

例3 つぎの式から a を求める式をつくれ。

$$r = a b h$$

例4 つぎの式から [] の中の文字を求める式を作れ。

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (h)$$

例5 つぎの等式の右に書いてある [] の中の文字を、残りの文字で表わせ。

$$A = B p \quad (p)$$

例6 つぎの式を $a = \square$ の形にかき直せ。

$$\frac{a p}{100} = S$$

各教科書の問いかけのしかたは、上の六つの例のうちのどれかに含まれるようである。このうち、例1および2は最も抽象的・目的的で例5および6は、それにくらべて具体的・方法的であるといえる。例3および例4は、前者とほとんど同じであるとみてよいであろう。**12**1は、例3と同じかたちである。

多くの教科書では、上の例のうちの二つくらいを併用しているようである。

さて、**12**1の問題を読んだ子どもは、「x を求める式」を、「x を、180, π, r, l で表わした式」、「x = □」となっている式」と読みかえなければならない。**12**1の五つの選択肢は、どれも、x を、180, π, r, l で表わしているし、x = □のかたちにはなっているが、問いかけと選択肢の関係をよく理解するには、このような読みかえが確実に行なわれることが必要である。一般的な指導法としては、上のような問いかけかたを知らせるとともに、これらの関係について理解させることがたいせつである。

C **C₁** の結果とその考察

C₁ 次のそれぞれの式を、x を求める式になおしなさい。

(例) $ax = b$

(答) $x = \frac{b}{a}$

① $b = \frac{x}{a}$

(答)

② $pk = rx$

(答)

③ $y = \frac{8s}{x}$

(答)

④ $c = \frac{1}{3} dx$

(答)

分析的問題 **C₁** では、(例) によって x を求める式になおすしかたを洞察させて、x を求める式になおすことができるかどうかをみた。その結果を b グループについてみることにする。

4問正答者 ----- 51%

3問正答者 ----- 26%

2問正答者 ----- 12%
 1問正答者 ----- 9%
 正答がない者 ----- 2% 正答率 79%

正答がなかった子どもの応答を調べてみると、その大部分は例1のような等式の両辺に同じ数をかけた
 り、同じ数でわったりすることについての誤りであって、例2のような問題の意味を理解していないと考
 えられる応答は少なかった。

例1 (かっこの中の式は正答を示す)

① $x = \frac{a}{b}$ ② $x = \frac{r}{p k}$ ③ $x = \frac{y}{8 s}$ ④ $x = \frac{c}{3 d}$
 ($x = a b$) ($x = \frac{p k}{r}$) ($x = \frac{8 s}{y}$) ($x = \frac{3 c}{d}$)

例2

① $a x = b$ ② $K = \frac{r x}{p}$ ③ $x y = 8 s$ ④ $\frac{1}{5} x = \frac{c}{d}$

② **12** 2 について

a 予備調査などの結果と困難点の推察

調査問題 **12** 2 は、公式の中の文字に、**12** 1 で求めた式を代入する問題である。だから、**12** 1 に正しく応答した者だけが **12** 2 に正しく応答できる可能性もっている。

12 2 についての予備調査の結果は次のとおりである。(**12** 1 の正答者について集計した。)

$\frac{r l}{2}$ (正答) -----	12 1 の正答者の 29% (全体の 17%)
$r l$ -----	" 3%
$180 r l$ -----	" 3%
その他の誤答 (1 類型 1%) -----	" 27%
(無答) -----	" 38%

aグループの **C₀** 2 の結果は次のとおりである。(**C₀** 1 の正答者について集計した。)

$\frac{r l}{2}$ (正答) -----	C₀ 1 の正答者の 51% (全体の 40%)
$r l$ -----	" 4%
$r^2 l$ -----	" 3%
その他の誤答 (1 類型 1%) -----	" 30%
(無答) -----	" 12%

このように、aグループの **C₀** 2 の正答率と予備調査の **12** 2 の正答率をくらべると、aグループのほうが全体に対しても、**C₀** 1 (**12** 1) の正答者に対しても高かった。

さて、予備調査のグループとaグループとでは、**12** (**C₀**) の小問2の正答率にかなりのちがいはあるが、aグループのほうでも全体の40%でしかない。この問題が、このようにむずかしい理由は何であろうか。その一つは、さきにも述べたように、小問1ができなければ、小問2ができないことである。次に推察されることは、「Sを求める式を、r と l を用いて表わす」ことの意味が理解で

きない子どもがいるのではないか、ということである。この問題で、「Sを求める式を、rとlを用いて表わす」ためには、Sを求める式の中にあるxをほかの文字でおきかえなければならない。そのためには、 $x = \frac{180l}{\pi r}$ の右辺をxに代入すればよい、ということが理解されなければならないのであるが、この見通しができないためにできなかった子どもも多かったであろうと思われる。この問題の正答率が低かったもう一つの理由は、子どもたちの中にこの問題と類似の問題を解いた経験をもつ者が少ないのではないか、ということである。各教科書の第2学年用を見ると、多くの教科書が、「連立方程式」のところで、連立二元一次方程式を解くために「式の中の文字に式を代入する」ことを指導していて、1.2.2のような式の中の文字に式を代入することは、多くの教科書がとりあげていない。このことから上のような推察をしたのである。

b **C₂** および **C₃** の結果とその考察

「Sを求める式をrとlを用いて表わす」ためにはどうすればよいのかがわからない子どもがあるだろうという予想にもとづいて分析的問題**C₂**を作成した。**C₂**では、「xを求める式を、a、rを用いて表わす」ためにはどうすればよいのかが見通されるようにして、このような状況での子どもの能力をみようとしたのである。また、文字式を約分する能力をみるために分析的問題**C₃**を作成した。

C₂ $x = a b y$ であるとき、 $a b = K$ ならば、このxを求める式はKとyを用いて、

$$x = K y$$

と表わすことができます。

下の①、②、③のそれぞれの左の式と右の式から、xを求める式を、a、rを用いて、最も簡単な形で表わしなさい。

① $x = \frac{b}{a^2}$

$$b = a r$$

(答) $x =$

② $x = \frac{a b c}{2}$

$$b c = r$$

(答) $x =$

③ $x = \frac{8 a b}{4 c}$

$$c = \frac{b}{r}$$

(答) $x =$

C₃ 次の式を簡単にしなさい。

① $\frac{20c^3 d^3 x}{4c d^2}$

(答)

② $\frac{15a^2 b y}{6a b^2 c}$

(答)

C₂ は、a、b、c各グループが異なった状況で行なわれたので、ここでは、bグループについて、その結果をみることにする。

①の正答率	-----	86%	3問正答者	-----	48人(49%)
②の正答率	-----	87%	2問正答者	-----	31人(31%)
③の正答率	-----	50%	1問正答者	-----	14人(14%)
全体の正答率	-----	74%	正答がない者	-----	6人(6%)

この結果にあらわれた著しい傾向は、③の正答率が、①、②の正答率にくらべて低いことである。(1%の有意水準で差がある。)

そこで、①、②に正しく応答して③をまちがえた30人の子どもの、③の応答を調べることにした。

③が①、②と異なる点は、繁分数の処理をしなければならないことである。この30人の応答をみると、繁分数の処理がつかずきの原因となっていると考えられる応答

$$\frac{\frac{2ab}{b}}{r} \quad \frac{8a^2b^2}{4r} \quad \frac{2ab^2}{r} \quad \frac{2a}{r} \quad \frac{ab^2}{cr}$$

をしている子どもが14人であった。[12]2においても繁分数の処理が要求されるので、このことにつまづいた子どもが多かったであろうと想像される。

次に、[C3]の結果をbグループについてみると、正答率が82%で、とくに注目しなければならない点は見当たらなかった。

C [C1], [C2], [C3] が [C0] におよぼす影響

[C1], [C2], [C3] は、[C0] ([12]) の分節的な問題である。この [C1], [C2], [C3] を解く経験を [C0] の直前に与えたら、[C0] の正答率はどうに変わるであろうか。

このことを調べるために、aグループには、[C0] を1時間目、[C1], [C2], [C3] を2時間目に提出し、bグループには、[C1], [C2], [C3] を1時間目、[C0] を2時間目に提出した。

さきに述べたように、a, b両グループは、「式」についての学習能力において差がないと考えられるので、[C0] の正答率をくらべることによって、上に述べた目的が達しられるであろうと考えたのである。

両グループの [C0] の正答率 ([C0] 1, 2ともできた者の率) は、aグループが40%、bグループが65%であって、両者の間には5%の有意水準で差が認められた。このことからいえることは、xを求める式というは何であるか、xを求める式にするにはどうすればよいのか、Sを求める式を、rとlを用いて表わすということはどういうことなのか、どうすればよいのか、についての子どもの理解が不じゅうぶんであるということである。

なお、bグループについては、[C1], [C2], [C3] の影響は [C0] におよぶであろうが、aグループについては、問題の内容からみて、[C0] の影響は [C1], [C2], [C3] にはあまりおよばないであろう。そのように考えると、a, b両グループについて、[C1], [C2], [C3] の正答率をくらべることが意味をもつことになる。その正答率は、

aグループ	[C1] -----	75%	[C2] -----	75%	[C3] -----	86%
bグループ	[C1] -----	79%	[C2] -----	74%	[C3] -----	82%

であって、両グループの正答率には差がみられない。このことから、a, b両グループが「式」について差のない学習能力をもっていることが裏づけされるのである。(執筆 片桐安治)

(注1) < 序 説 > 参照

(注2) 昭和39年6月19日付で、都道府県教育委員会あてに通知されている。また、初等教育資料~~16~~179および中等教育資料~~16~~167
にのせられている。

(注3) < 序 説 > 参照

(注4) 新潟県立教育研究所研究紀要第45集

(注5) < II 研究の内容と方法 > 参照

(注6) 昭和39年度全国中学校学力調査 第3学年数学

11
