研 究 紀 要　第 43 集

算数・数学科の問題解決における思考過程とその指導

〔3〕

1 9 6 4

新潟県立教育研究所

ま え が き

最近における科学技術の飛躍的発展は，人類の歴史に大きな進歩をもたらしつつある。この新しい時代に向かって，教育のあり方も，大きな発展を遂げなければならない時期にあたっていると思われる。こうした時において，世界各国が，次代をになう青少年の育成に民族の興隆を賭け，その能力の開発に全幅の努力を競っていることは，今日の著しい世界的動向の一つであるといってよいであろう。

わが国においても，たびかさなる教育課程・学習指導要領の改訂，全国的な学力調査の施行など，学力向上への努力は，行政面でも，実践面でも，たゆみなく真剣に行なわれている。本県においてもこの学力向上の問題は，青少年の健全育成とともに，一大県民運動ともすべき緊急な問題であり，諸種の有効適切な施策が要請されるのであって，今回発表された本県長期総合教育計画においても，このことがうたわれているのである。

こうした動向の中で，われわれは満5年前に，学力と学習指導の問題を当研究所の中心的な研究課題としてとりあげた。いうまでもなく，この学力と学習指導の問題は，学校教育の中心的課題である。われわれはこの学力の問題を考える時，児童生徒各自の人間形成という教育の本質的な問題の中にこれを位置づけ，この学力と学習指導の問題を根本的に検討してみることが，きわめてたいせつなことであると考えた。教育的にみて，本質的な学力向上対策がとられるのでなければ，それは一時的な効果に終わったり，かたよった学力の形成に陥るおそれなしとしないからである。今日の歴史的時点において，どのような学力を，どのように育ててゆくことが望ましいのであるか，こうした困難な問題を研究課題としながら，望ましい学習指導法の樹立を目ざし，全所員の共同研究体制のもとに，小・中学校の全教科にわたって，実証的な研究を行なってきた。36年度からは，全国教育研究所連盟でも，国語，社会，算数数学，理科の4教科について，3か年計画の全国的な共同研究を行なうようになったので，当研究所も積極的にこの企画遂行に参加し，主要な幹事県としてその推進に寄与してきたのである。

学力と学習指導の問題は永遠の研究問題であり，われわれの研究も，その探究の進むにつれて，日暮れて道なお遠き感をしみじみ味わうのであるが，今年度をもってこの5か年間の共同研究に一応の終止符を打つことにした。今後この学力と学習指導の問題は，さらに視点を新たにして引き続き研究を深めてゆこうと計画している。

この紀要は，昨年度の研究紀要「算数・数学科の問題解決における思考過程とその指導」〔2〕に引き続き，算数・数学科の今年度の研究をまとめたものである。これまでみてきた児童生徒の思考の様態の上にたって，児童生徒の身につけさせるべき数学的な思考力を伸ばす学習指導はどうあるべきかを追求し，学習指導上の原則を見いだそうとしたものである。おおかたのご批判を得れば幸いである。

なお，この研究は，それぞれ研究協力校の絶大な協力のもとに行なったもので，学校長はじめ，直接間接に協力していただいた職員各位，ならびに児童生徒諸子に対して，心から深く感謝の意を表するしだいである。

昭和39年3月23日

新潟県立教育研究所長　小　林　正　直

目　　次

第一章　研究の構想

この研究は，一昨年，昨年と発表してきた「算数・数学科の問題解決における思考過程とその指導」〔1〕〔2〕に引き続くもので，この〔3〕をもって一応の完結をみることになる。この研究は，全国教育研究所連盟の共同研究の一部でもあるので，その全体計画は，それと歩調を合わせてある。この研究の構想については，これまでたびたび述べてきたところであり，ここではごく簡単に記すにとどめたい。詳しくは前記の〔1〕〔2〕，および全国教育研究所連盟編，学習指導研究シリーズ「算数・数学科と思考力の形成・その指導」〔I〕〔II〕を参照されたい。

I　研究目標

この研究主題は，学習指導や算数・数学科の本質，算数・数学教育研究や実践の現状に対する見解を背景として設定したのであるが，この研究の目標を要約するとつぎのようになる。

1. 算数数学科の問題を解決することができ，算数数学を理解することができるような数学的思考とは具体的には何であるかを明らかにしたい。

   数学的な思考を推し進め，数学的直感や洞察を可能にする思考の中核的なものは，数学的な観点であり，知的操作の方法であろうという仮説の検証

2. 小，中，高校の児童生徒の身につけさせるべき数学的な思考 ― 問題解決の成功を保証し，数学をさらに発展させるような思考の観点，数学的な方法には，どんなものがあるかを具体的に究明したい。

3. 前項1，2の研究にもとづいて，そのような思考力を伸ばす学習指導はどうあるべきかを追求し，学習指導上の原則を見いだしたい。

II　研究方法

この研究は3カ年を予定してはじめられたものであり，前項1，2を目標とする研究作業を第1次研究として昭和36年度，前項3を目標とする研究作業を第2次研究として昭和37～38年度に実施するよう計画された。

第1次研究の目標は，児童生徒の思考の様態，過程，換言すれば，児童生徒は現実に，数学の問題をどのように考えていくものなのか，どんな場合に思考が行きづまり，どんな契機でそれを打開するかを具体的に究明することによって達せられると考えたものである。したがって第1次研究においては，個々面接による研究調査を主軸とし，それを補足照合する意味で授業の観察，分析を行なうことにした。

第2次研究の目標は，第1次研究によって究明された児童生徒の思考の様態や過程に立脚して，好ましい数学的な思考の方法や観点を身につけさせる指導法を見いだすことである。したがって，第2次研究においては，実験的な授業の実施とその観察分析が中心となる。

Ⅲ　第1次研究（昭和36年度）の成果一思考の様態について

第1次研究の目標である「算数数学の問題を解決することができ，算数数学を理解することができるような数学的思考とは具体的に何であるか。」を研究した成果については，紀要〔1〕に詳細に示したのであるが，ここにその要点を記しておく。

1. 思考は既有経験を前提とし，それによって制約される。
   - 問題場面を理解できるだけの生活経験，前提となる知識技能等が必要なことは当然であるが，それらの知識技能が構造づけられ体制化されていることが，見とおしの成立を容易にする。
   - また概念操作の方法，思考の方向も既有経験に制約される。
2. 思考は，一応の，または部分的の見とおし — 予想の成立から始まる。
   - 最初に問題の確認がある。既有の反応と問題すなわち対象との間の矛盾の自覚 — 問題意識が思考を推し進めるエネルギーである。
   - 初めに，一応の，または部分的の見とおしを立てる。ここに思考の中心的な働きがみられる。
   - 初めから全体の見とおしが成立するというより，部分的の，または一応の見とおしで処理，操作をしてみる。その結果を足場にして，つぎの見とおしを立てる。予想 — 試行 — 予想の修正またはつぎの段階の予想。
3. 思考は目標に導かれて発展する。
   - 一応の，または部分的な見とおしによる処理の結果は，目標によって意味づけられ，目標につながらないと判断された場合は，その結果がすてられ，予想の修正または観点の変更が行なわれる。
   - その結果に論理的な意味づけができず，目標につながらないと知りながら，予想を修正したり観点を変更して新しい見とおしが成立しない場合，それが思考の行きづまりである。
4. 児童生徒は，初めの見とおしや処理の結果に，こだわる傾向が強い。
5. 問題の構造を洞察し，関係を把握することは，数学的な観点に立って問題に対処することによってのみ可能である。観点が異なれば同一の問題でも異なった構造のものとして把握され，したがって解決の方法も異なってくる。
6. 算数数学の問題解決には，それにふさわしい方法があり，それによって見とおしの成立が可能になる。
7. 児童生徒の思考が方向づけられ，観点が統一されていない場合は，たとえ目で見えるような具体的な姿で対象が提示されても，関係を把握することはできない。思考の発展は見られず，授業は混乱する。
8. 思考は，行為の概念の世界への引き写しである。抽象的な概念の操作ができるまでになっていない場合は，具体的な行為またはその表象で考える。

Ⅳ　第2次研究（昭和37・38年度）の仮説

思考を高めることを目的とする授業は，次の原則によって組織されなければならないであろう。

1. 算数数学科の指導は，数学的な方法や観点を身につけさせることを目標として行なわれなければならない。
2. 数学的な思考の力は，数学を学習する過程において，かつ，それによってのみ育てられる。
3. 教師の説明は，数学的な思考の過程にしたがって，行なわれなければならない。
   - たとえば，「こうすればよい」というのではなく，どうして「こうすればよい」という見とおしが成立したかを，理解させなければならない。
4. 教師は，児童生徒が数学的な観点から問題に立ち向かい数学的な方法で処理するよう，その思考を方向づけなければならない。
5. 児童生徒が問題解決に成功し，または失敗した決定的な原因が，このような観点からこのような数学的な方法で処理したか否かにあることを，児童生徒に自覚させなければならない。
6. 児童の知識技能が，体制化され，構造づけられるよう指導しなければならない。

数学的な思考の観点や方法は，成熟または自然の成長によって身につくものでなく，指導しなければならないものと考える。たとえ自然の成長や成熟によって可能であるとしても，それをまっていたのでは，人類が経験したと同様に，数千年の歳月を要するであろう。

ところで，具体的な数学的思考の観点や方法は，それぞれ教材の本質，今後児童生徒にどのような数学の学習を期待するかという将来の見とおし，および児童生徒の心理的発達段階をふまえて，検討を進めていかなければならないものであろう。

この点については，第2次以降の研究における授業の実践とその観察分析の作業の過程で，そのような観点や方法を身につけさせる指導法とともに，具体的な研究を積み重ねていきたいと思う。

Ⅴ　第2次研究の第1年次（昭和37年度）の研究成果

作業仮説

文字式をつかって解く文章題がわかりにくいときは，文字をかんたんな数字におきかえて考えるとよい。

思考を高めることを目的とする算数数学科の指導は，数学的な思考の方法や観点を身につけさせることを目標として行なわなければならない（研究仮説）と思われるが，思考が抽象的な概念の操作でできるまでになっていない場合は，より具体的な概念，具体的な行為または表象で考えることによって，問題解決のおおきな手がかりとなるようである。

この作業仮説の文字を数字におきかえて考える考え方は，問題を一段と具体化して，いいかえれば，抽象の段階①（このような記号によって参考文献を巻末に示す，以下同じ）を一段さげて問題構造をとらえようとするものであって，抽象より具体への，ひとつの数学的観点であり，方法であると考えた。

この作業仮説の実証は，比較群法により，学習効果の判定には変量分析法を適用した。この判定によって作業仮説が成立するであろうということがわかった。ただこの実証は，学習の一時的効果の判定であるので，はたしてこの観点が身についているかどうかはわからない。したがって，本年度，この学習の永続的効果の判定を行なわなければならないのである。（詳細は紀要〔2〕）

Ⅵ 第２次研究の第２年次（昭和３８年度）の研究計画

本年度は，前年度と同様，研究目標の第３項を研究することがねらいであって，児童生徒の身につけさせるべき数学的な思考力を伸ばす学習指導はどうあるべきかを追求し，学習指導上の原則を見いだしたいと考える。研究項目は次のとおりである。

1. 比較群法による文字文章題の実験的研究（続き）― 学習の永続的効果の測定
　― 数学的観点・方法を身につけさせる指導の実証的研究 ―
2. 実験的授業の実施とその考察
　① 図をかいて関係を見つける問題解決の観点・方法を中心とした学習指導
　　小学校第５学年
　② コトバの指導を中心とした学習指導
　　中学校第３学年
　③ 論証教材の基礎的知識の構造化を中心とした学習指導
　　中学校第２学年
　④ 幾何の応用問題解決の観点・方法を中心とした学習指導
　　高等学校第２学年
　⑤ その他，学習指導上の原則を見いだすに必要と考えられる学習指導

第二章　研究の概要

I　文字式をつかつて解く文章題指導の実験的研究

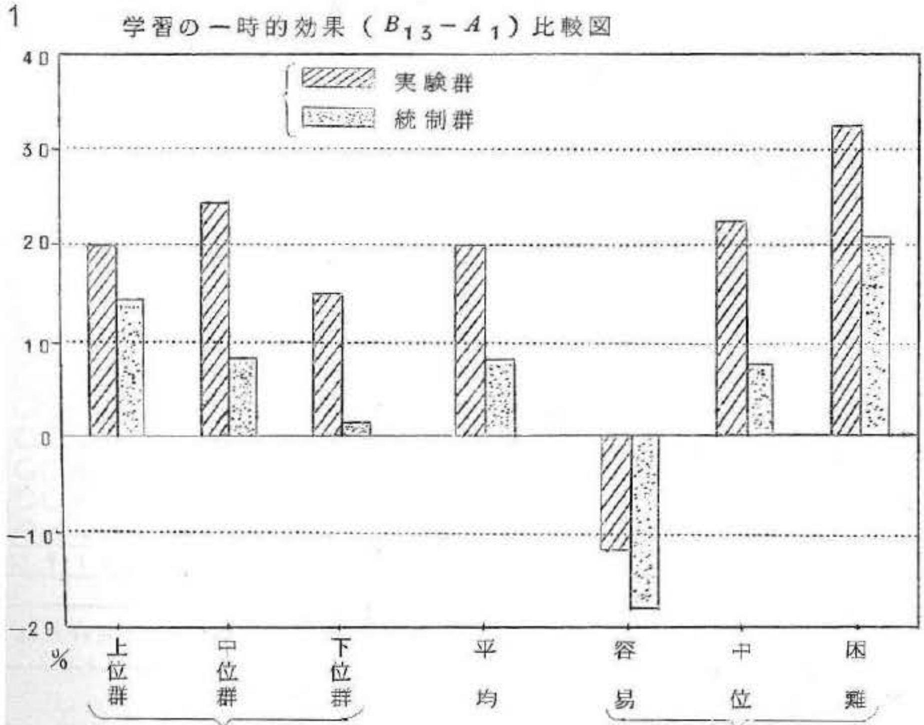
— 数学的観点・方法を身につけさせる指導の実証的研究 —

文字式をつかって解く文章題を文字文章題，数字式をつかって解く文章題を数字文章題，数値を代表する a ，b ，c…… を文字と本紀要では仮称する。

1. 文字文章題指導の実験的研究の成果 — 昭和37年度の研究

文字式をつかって解く文章題，つまり文字文章題の文字を数字におきかえて指導したらどのように効果があるかとの昨年度の研究に，「文字式をつかって解く文章題がわかりにくいときは，文字をかんたんな数字におきかえて考えるとよい。」という作業仮説を設定し，比較群法によって実験的にその効果を検証した。その研究対象は中学校2年生であり，結果の概要は次の図表Iのとおりであった。実験群と統制群の間に有意な差のあることの検定には，指導前テスト（$A1$）と指導後テスト（$B13$）の得点の差による変量分析法を適用したところ有意差ありと認められたので，実験群の指導法についての学習効果が認められた訳であった。しかし，この学習効果は，指導前テストと指導直後のテストの得点差の検定であることから学習の一時的効果と名づけた。学習指導上の留意点その他詳細については紀要〔2〕を参照願いたい。

図表1　学習の一時的効果（$B_{13}-A_1$）比較図



2. 学習の永続的効果の検証 ― 昭和38年度の研究

この実験授業は，昭和37年10月17，18，19，20日に実施したのであるが，はたしてその観点・方法（操作）が身についているかどうか，約1か年経過した昭和38年11月7日（木）追跡調査を行なった。テスト問題は一時的効果測定のさいの事後テストに用いたB_{13}（紀要〔2〕参照）である。事後テストB_{13}の問題をこの把持テストにもつかったことは，事後テスト後すでに1か年経過していること，比較群法であることより事後テストと同一の問題によってもほとんど差支えないと考えたからである。把持テストの結果は次の図表 のとおりである。図表については説明を省略したので，紀要〔2〕の図表と比較検討願いたい。

なお，図表の中のかっこ内の数字は，事後テストならびに学習の一時的効果の通過率である。ただし図表2.3のかっこ内の数字は昨年の学習の一時的効果測定の結果の数字であり，図表6.7の難易別のらんのかっこ内の数字は，統制群の得点または通過率である。

実験群の把持テスト集計表

図表 2　　　　（○印は正答，×印は誤答，かっこ内は事後テストの数字）

能力別	生徒氏名	把持テスト B_{13} の問題番号 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ΣB_{13}	指導前テスト A_1 の問題番号 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ΣA_1	$\Sigma(B_{13}-A_1)$	$\Sigma(B_{13}-A_1)^2$
上位郡	あ	○	○	○	○	○	○	○	○	×	○	9	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○	9	0	0
	い	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	10	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	8	2	4
	う	○	○	○	×	○	○	○	○	×	×	7	○	○	○	○	○	○	×	×	○	×	7	0	0
	え	○	○	○	○	○	○	×	○	○	×	8	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	6	2	4
	お	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	7	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	6	1	1
	か	○	○	○	○	○	○	×	○	○	×	8	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	6	2	4
	き	○	○	○	○	○	○	×	○	×	×	7	○	×	○	×	○	○	×	×	○	×	5	2	4
	く	○	○	×	○	○	○	×	○	×	×	6	○	○	○	×	○	○	×	×	×	×	5	1	1
	け	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○	9	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	6	3	9
	こ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	10	○	○	○	○	○	○	○	×	○	○	9	1	1
	計	10	10	9	8	10	10	6	9	5	4	81	10	9	10	7	10	10	3	2	2	2	67	14	28
												(87)											(67)	(20)	
中位郡	さ	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	6	○	○	○	×	○	○	×	×	×	×	5	1	1
	し	○	○	○	○	○	○	×	○	×	×	7	○	○	○	×	○	○	×	○	×	×	6	1	1
	す	○	○	○	×	○	○	×	○	×	×	6	○	○	○	○	×	×	×	×	○	×	5	1	1
	せ	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	6	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	4	2	4
	そ	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	7	○	×	×	○	×	×	×	×	×	×	2	5	25
	た	○	○	○	○	○	○	×	○	×	×	7	○	×	○	×	×	×	○	×	×	×	3	4	16
	ち	○	○	×	○	○	○	×	○	×	×	6	○	×	○	○	×	×	×	×	×	×	3	3	9
	つ	○	○	×	○	○	○	×	×	×	○	6	○	×	×	×	○	×	×	×	×	×	2	4	16
	て	○	○	○	×	○	×	×	×	×	○	5	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	4	1	1
	と	○	○	○	×	○	○	×	○	×	○	7	○	×	○	○	×	×	×	×	×	×	3	4	10
	計	10	10	8	7	10	9	1	5	0	3	63	10	5	8	6	3	2	1	1	1	0	37	26	90
												(61)											(37)	(24)	
下位郡	な	○	○	×	○	○	○	○	○	×	×	7	×	×	×	○	○	×	×	×	×	×	2	5	25
	に	○	○	×	○	○	○	×	○	×	×	6	○	×	×	×	×	×	×	×	×	○	2	4	10
	ぬ	○	○	×	○	×	○	×	×	×	×	4	○	×	×	×	×	×	×	○	○	×	3	1	1
	ね	○	○	×	○	○	○	×	×	×	×	5	×	×	○	×	×	×	○	×	×	×	2	3	9
	の	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	6	○	×	×	×	○	×	×	×	×	×	2	4	16
	は	○	○	×	×	×	○	×	○	×	×	4	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	1	3	9
	ひ	○	○	×	×	○	○	×	×	×	×	4	×	×	○	×	×	○	×	×	×	×	2	2	4
	ふ	○	○	×	×	○	○	×	×	×	○	5	×	○	×	×	×	○	×	×	×	×	2	3	9
	へ	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	2	×	×	×	×	×	○	×	×	×	×	1	1	1
	ほ	○	×	×	×	○	○	×	○	×	×	4	○	×	×	○	×	×	×	×	×	×	2	2	4
	計	10	9	1	5	7	9	1	4	0	1	47	5	1	2	2	2	3	1	1	1	1	19	28	94
												(34)											(19)	(15)	
合計		30	29	18	20	27	28	8	18	5	8	191	25	15	20	15	15	15	5	4	6	3	123	68	212
												(182)											(123)	(59)	

統制群の把持テスト集計表

図　表　3　　(○印は正答，×印は誤答，かっこ内は事後テストの数字)

能力別	生徒氏名	把持テスト B_{13} の問題番号 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ΣB_{13}	指導前テスト A_1 の問題番号 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ΣA_1	$\Sigma(B_{13}-A_1)$	$\Sigma(B_{13}-A_1)^2$
上位群	ア	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	10	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	7	3	9
	イ	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	9	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	7	2	4
	ウ	○	○	○	○	○	○	×	○	○	○	9	○	×	○	○	○	○	○	×	○	×	7	2	4
	エ	○	○	○	○	○	○	×	○	×	×	7	○	○	○	○	○	○	×	○	×	×	7	0	0
	オ	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	8	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	6	2	4
	カ	○	○	○	○	○	○	×	○	○	×	8	○	○	○	○	○	○	○	×	○	×	8	0	0
	キ	○	○	×	×	○	○	×	×	×	×	4	○	○	○	×	×	○	×	×	×	×	4	0	0
	ク	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	6	○	○	×	○	○	○	○	×	×	×	6	0	0
	ケ	○	○	○	○	○	○	×	○	×	○	8	○	○	○	○	×	○	○	×	×	×	6	2	4
	コ	○	○	×	○	○	○	×	×	×	×	5	○	○	○	×	×	○	×	○	×	×	5	0	0
	計	10	10	8	9	10	10	3	7	4	3	74	10	9	9	8	7	10	6	2	2	0	63	11	25
												(77)											(63)	(14)	
中位群	サ	○	○	○	○	×	○	×	○	×	×	6	×	×	○	×	×	×	×	○	○	×	3	3	9
	シ	○	○	○	○	×	○	×	×	×	○	6	○	×	○	○	○	○	×	×	○	×	6	0	0
	ス	○	○	○	○	○	○	×	○	×	×	7	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	6	1	1
	セ	○	○	○	○	○	○	×	○	×	×	7	○	×	○	×	○	○	×	○	×	×	5	2	4
	ソ	○	○	×	○	○	○	×	○	×	×	6	○	×	×	○	○	○	×	×	×	×	4	2	4
	タ	○	○	×	○	○	○	×	○	×	×	6	○	×	×	○	○	○	×	×	×	×	4	2	4
	チ	○	×	×	×	×	○	×	×	×	×	2	○	×	○	○	×	○	×	×	×	×	4	−2	4
	ツ	○	○	○	○	○	○	×	×	×	×	6	○	○	○	×	○	○	×	×	×	×	5	1	1
	テ	○	○	○	×	×	○	×	×	×	×	4	○	×	○	×	×	○	×	×	×	○	4	0	0
	ト	○	○	×	○	○	○	×	×	×	×	5	○	×	×	○	○	○	×	×	×	×	4	1	1
	計	10	9	6	8	6	10	0	5	0	1	55	9	2	7	6	7	9	0	2	2	1	45	-10	28
												(53)											(45)	(8)	
下位群	ナ	○	○	×	○	○	○	×	×	×	○	6	○	×	○	×	×	○	○	×	×	×	4	2	4
	ニ	○	×	×	○	○	×	×	×	×	○	4	○	×	×	×	×	×	○	×	×	×	2	2	4
	ヌ	○	○	○	×	○	×	○	○	×	×	6	×	×	○	×	×	○	×	○	×	×	3	3	9
	ネ	○	×	×	×	○	○	×	×	×	×	3	×	×	○	×	×	×	×	×	○	×	2	1	1
	ノ	○	○	○	○	○	○	×	○	×	×	7	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×	7	0	0
	ハ	×	×	○	○	×	×	×	×	○	×	3	×	○	○	×	×	×	×	×	×	×	2	1	1
	ヒ	○	○	×	○	○	○	×	×	×	×	5	○	×	○	×	○	×	×	×	×	×	3	2	4
	フ	○	○	×	○	○	○	×	×	×	×	5	×	×	○	×	○	○	×	×	×	×	3	2	4
	ヘ	×	○	×	×	×	○	×	×	×	×	2	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	1	1	1
	ホ	○	○	×	×	○	○	×	×	×	×	4	×	○	×	×	×	○	×	×	×	×	2	2	4
	計	8	7	3	6	8	7	1	2	1	2	45	5	3	7	1	3	5	3	1	1	0	29	34	32
												(30)											(29)	(1)	
合計		28	26	17	23	24	27	4	14	5	6	174	24	14	23	15	17	24	9	5	5	1	137	37	85
												(160)											(137)	(23)	

図表　4

実験群と統制群の把持テストの平均通過率および学習の永続的効果の比較

区　分	知能偏差値	標準学力テスト偏差値	テスト B_{13}	テスト A_1	学習の永続効果
実験群	47.3	38.5	63.7 (60.7)	41.0	10.3 (12.0)
統制群	45.8	37.4	58.0 (53.3)	45.7	0

学習の永続的効果＝実験群（$B_{13}-A_1$）－統制群（$B_{13}-A_1$）

（百分率で計算したのと，得点で計算して百分率になおしたのでは多少違うことがある。）

図表　5

実験群と統制群の把持テストの平均通過率，および学習の永続的効果の比較

（能　力　別）

区　分	能力段階	知能偏差値	学力	文字式テスト	テスト B_{13}	テスト A_1	$B_{13}-A_1$	学習の永続効果
実験群	上	56.5	4.1	16.8	81.0 (87.0)	67.0	14.0 (20.0)	3.0 (6.0)
	中	45.9	3.0	11.2	63.0 (61.0)	37.0	26.0 (24.0)	16.0 (16.0)
	下	39.5	2.1	6.3	47.0 (34.0)	19.0	28.0 (15.0)	12.0 (14.0)
統制群	上	52.8	3.7	17.5	74.0 (77.0)	63.0	11.0 (14.0)	0
	中	44.6	2.9	11.3	55.0 (53.0)	45.0	10.0 (8.0)	0
	下	40.1	2.2	6.5	45.0 (30.0)	29.0	16.0 (1.0)	0

図表　6

実験群と統制群の把持テストの得点および学習の永続的効果

（問題別・難易別）

困難度	問題番号	実験群			統制群			難易別 実験群（統制群）		学習の永続効果 実 ($B_{13}-A_1$) －統 ($B_{13}-A_1$)	
		B_{13}	A_1	$B_{13}-A_1$	B_{13}	A_1	$B_{13}-A_1$	B_{13}	A_1	問題別	難易別
容易	1	30	25	5	28	24	4	48	45	1	5
	3	18	20	−2	17	23	−6	(45)	(47)	4	(4)
中位	6	28	15	13	27	24	3			10	
	5	27	15	12	24	17	7	104	60	5	14
	4	20	15	5	23	15	8	(100)	(70)	−3	(18)
	2	29	15	14	26	14	12			2	
困難	9	5	6	−1	5	5	0			−1	
	7	8	5	3	4	9	−5	39	18	8	12
	8	18	4	14	14	5	9	(29)	(20)	5	(14)
	10	8	3	5	6	1	5			0	
計		191	123	68	174	137	37	191 (174)	123 (137)	31	31 (36)

図表 7　　実験群と統制群の把持テストの平均通過率および学習の永続的効果の比較

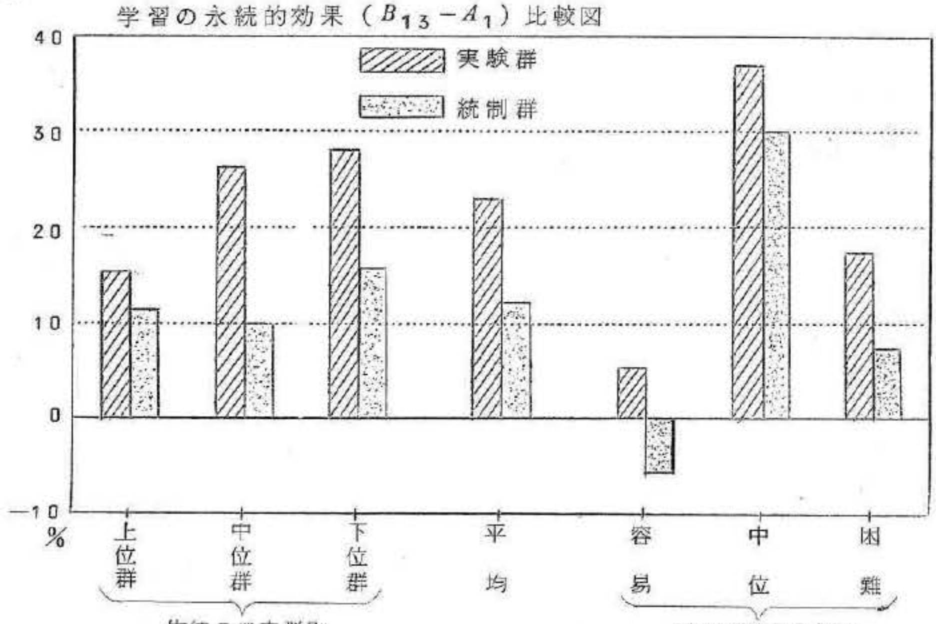
（問題別・難易別）

困難度	問題番号	実験群 B_{13}	実験群 A_1	実験群 $B_{13}-A_1$	統制群 B_{13}	統制群 A_1	統制群 $B_{13}-A_1$	難易別 実験群（統制群） B_{13}	難易別 実験群（統制群） A_1	難易別 実験群（統制群） $B_{13}-A_1$	学習の永続的効果 実 $(B13-A1)$ －統 $(B13-A1)$ 問題別	学習の永続的効果 実 $(B13-A1)$ －統 $(B13-A1)$ 難易別
容易	1	100,0	83,3	16,7	93,3	80,0	13,3	80,0	75,0	5,0	3,3	8,3
	3	60,0	66,7	−6,7	56,7	76,7	−20,0	(75,0)	(78,3)	(−3,3)	13,3	(6,7)
中位	6	93,3	50,0	43,3	90,0	80,0	10,0				33,3	
	5	90,0	50,0	40,0	80,0	56,7	23,3	86,7	50,0	36,7	16,7	11,7
	4	66,7	50,0	16,7	76,7	50,0	26,7	(83,3)	(58,3)	(25,0)	−10,0	(15,0)
	2	96,7	50,0	46,7	86,7	46,7	40,0				6,7	
困難	9	16,7	20,0	−3,3	16,7	16,7	0,0				−3,3	
	7	26,7	16,7	10,0	13,3	30,0	−16,7	32,5	15,0	17,5	26,7	10,0
	8	6.0,0	13,3	46,7	46,7	16,7	30,0	(24,2)	(16,7)	(7,5)	16,7	(11,7)
	10	26,7	10,0	16,7	20,0	3,3	16,7				0,0	
計		63,7	41,0	22,7	58,0	45,7	12,3	63,7 (58,0)	41,0 (45,7)	22,7 (12,3)	10,3	10,3 (12,0)

注　　学習の永続的効果のわくのかっこ内の数字は，学習の一時的効果を示す。

図表 8

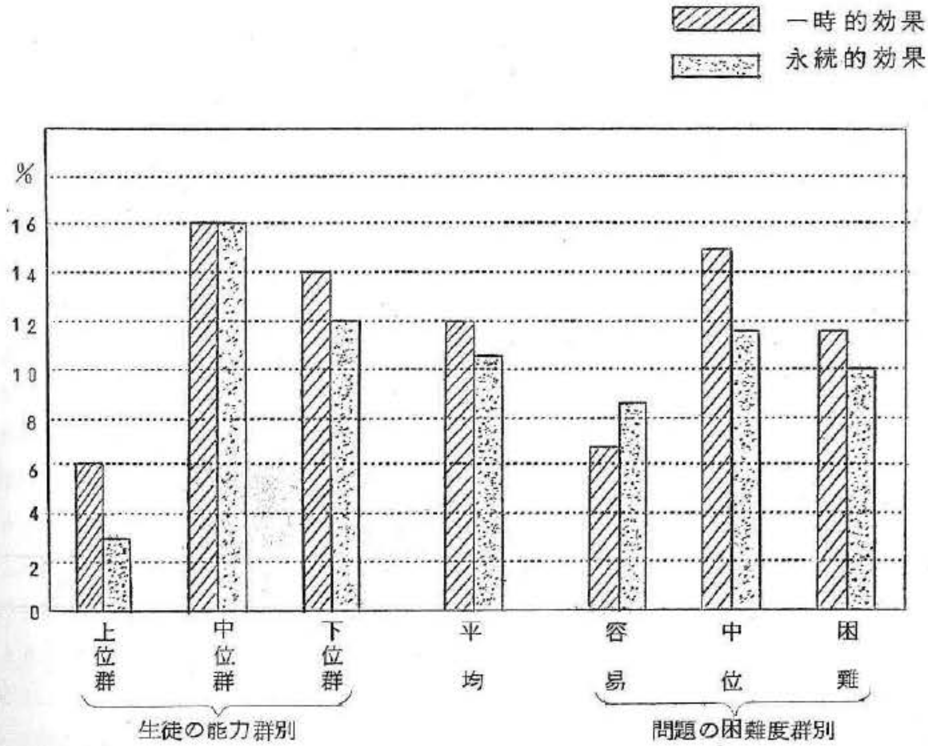
学習の永続的効果（$B_{13}-A_1$）比較図



図表9

実験的学習の効果の比較図

〔実験群（$B_{13}-A_1$）－ 統制群（$B_{13}-A_1$）〕



注・図表9によって，事後テストより把持テストが通過率が低いと考えるのは誤りである。
詳しくは図表2，3の集計表のかっこ内の事後テストの正答数と比較参照されたい。
事後テストより把持テストの正答率が高い。

有意な差異の有無の検定

テスト結果についての，実験群と統制群の間に有意な差のあることの検定には，指導前テスト（A_1）と把持テスト（B_{13}）の得点の差による変量分析法を適用した。

	ΣX	ΣX^2	N
実験群	68	212	30
統制群	37	85	30
	105	297	60

$$全変動=(\Sigma\Sigma X^2)-\frac{(\Sigma\Sigma X)^2}{\Sigma N}=297-\frac{(105)^2}{60}=113.25$$

$$級間変動=\frac{1}{N}\{(\Sigma X_1)^2+(\Sigma X_2)^2\}-\frac{(\Sigma\Sigma X)^2}{\Sigma N}=\frac{1}{30}(68^2+37^2)-\frac{105^2}{60}$$

$$=16.02$$

級内変動＝全変動－級間変動＝113.25－16.02＝97.23

要因	変動	自由度	不偏分散	分散比
級間変動	16.02	2－1	16.02	$F_0=\frac{16.02}{1.68}=9.53$
級内変動	97.23	60－2	1.68	
全変動	113.25	60－1		

$F^{1}_{55}(0.01)=7.12$　　　　$P\{|F|\geqq 9.53\}<0.01$

よって危険率1％で有意差ありと認められた。このことから実験群と統制群との間には有意の差があることが明らかにされたので，実験群の指導法についての永続的学習効果があると認められた訳である。よってその指導法は効果が身についたということができる。なお学習の永続的効果のあらわれかたは，図表8および図表9のとおりである。

実験群の応答分析

実験群の10人を抽出して，把持テストの応答のとき，文字のまま考えたか，それとも文字を数字におきかえて考えて応答したかを調査した。調査方法はテスト後数日たってから各自に答案をかえし用紙をあたえ，生徒は自分の答案をみて文字のまま考えたか数字におきかえて考えたかテストのときのことを思いだしながらあたえられた用紙に回答した。このようにして調査した結果は次のとおりである。

文字のまま考えた問題の総数が51題，文字を数字におきかえて考えた総数が18題，どちらか不明が31題である。（問題の延べ数は1人10題で10人であるから，100題になる。）文字を数字

におきかえて考えた１８題のうちで正答が１２題で，誤答が６題であった。いちばん困難と思われる１０番の問題には，文字を数字におきかえて考えた生徒が５人もいた。その５人の内訳は正答３人，誤答２人である。

この応答分析によっても文字を数字におきかえて問題を解決した生徒がかなりいたであろうということが考えられる。

3. 研究目標とこの実験的研究の意義

この研究の研究目標はさきにも述べたとおり，数学的観点方法にはどんなものがあるか，それを身につけさせるにはどう指導するかということであった。そこでこの実験的研究において，具体的な数学的思考の観点であり方法のひとつであると考えられる「文字を数字におきかえること」による文字文章題の指導を試みたのである。その結果，この観点・方法は効果的であると思われ，しかもこのような観点を身につけさせるために必要と思われる注意事項がわかった（紀要２）。このことがこの実験的研究の第１の意義である。

つぎに，この研究の研究目標を，視点をかえて考えると，すべての数学的観点や方法を研究しつくすことではなくて，数学的観点や方法を身につけさせること，つまり生産的思考力を伸ばすための指導の原則をうちたてることである。指導の原則をうちたてるには，いくらかの実証的研究が必要である。この指導の原則をうちたてるためのひとつの実証例ということがこの実験的研究の研究目標に対する第２の意義である。

くりかえしではあるが，もう１回文字を数字におきかえる観点にふれてみる。文字を数字におきかえるということは，抽象の段階よりいっぽ具体の段階におりることである。概念の抽象化にはいわゆる抽象のハシゴをなめらかに上下しなければならないといわれている①。文字文章題がわからないときは抽象のハシゴをいちだんおりて数字文章題におきかえて問題構造をとらえ，再び文字文章題にかえり，数量関係をとらえる。ということが文字を数字におきかえて考えるということである。この置換法の原理を教師は自覚し，随時適用して，生徒にこの置換法を身につけさせることが必要であろう。

Ⅱ　小五の学習指導の実践例とその考察

— 図をかいて関係を見つける問題解決の観点・方法を中心とした研究 —

1　学年　小学校第５学年（男女共学）　４５名

2　日時　第１回　昭和３８年１１月２８日（金）第４限（１１時７分～１１時５９分）

第２回　昭和３８年１２月１８日（水）第４限（１１時４５分～１２時４５分）

3　単元名　問題の解き方（算数５下 P 114 ～ P 117 ～ 中教）

4　単元の目標

・事実に即して問題を分析的に考える力を伸ばす。

・問題構造を図などで表わして，関係をとらえる力を伸ばす。

・観点を変更して考え，既習の経験に関係づけて問題を解決する力を伸ばす。

5　指導計画（10時間）

第1次	未知数が2つの場合の問題	P114　例題，①　P115　②，③，④	……（2時間）
第2次	分配算の問題	P116　例題，①，②	……（1時間）
第3次	植木算の問題	P117　例題，①，②	……（1時間）
第4次	公式を利用する問題	P118　例題，①，②	……（1時間）
第5次	まとめの練習	P120　例題，①，②，③，④，⑤ P121　例題，①，②，③，⑤ P122　例題，①，②，④，⑤ 補習問題　プリント（P28） テスト（P42）	……（5時間）

6　第1次の指導計画

(1)　目標

・　問題を分析的にとらえ図をかいて関係をみつける力を伸ばす。

・　そろえるという観点で関係をみつける。

(2)　展開案

ね　ら　い	学　習　活　動	指導上の留意点
○問題提示	○問題を読む（小黒板の板書） おとなふたりと，こども3人のふろ代は68円で，おとなふたりとこどもひとりのふろ代は44円です。おとなとこどものふろ代は，それぞれいくらですか。	
○問題の分析 ・場面の想定 ・求答条件の把握 ・既知条件の把握	○問題について話し合う ・何の問題か ・たずねていることは何か ・わかっていることは何か	○問題の分析では，問題の文章そのままを答えるのでなく，自分のことばとしてつかみとるように留意する。
○図にかいて関係を具体的につかむ	○図にかいて問題を解く ・各自で自由に解く ・自分の考えを発表する	○おくれている児童は図にかくことが困難であるから助けてやるようにする。
○図と式との関係	○立式して解く ・各自で立式して解く ・自分の考えを発表する	○自分の考えを発表するとき，とかく図からはなれて式で説明しようとする。式を用いず図だけで説明するように注意する。

ね　ら　い	学　習　活　動	学習指導上の留意点
○図の読み方を深める。	○図を見て問題の要点を逆にことばでいわせる。	○立式は図と関係づけて，この式はこの図のどこから立てたものであるかを強調する。
○自分の考えをたしかめる。	○結果のたしかめをする。 ・既知の条件にあてはめてみる	○図は問題を読んだとおりに表わしておくだけでなく，答えをみちびきだすために便利なように図をかきなおしていかせることもたいせつである。
○適用練習を通して深める。	○練習問題を解く（同じ類型の問題） ・何の問題か ・たずねていることは何か ・わかっていることは何か ・にた問題は何か ・図にかいてみる ・立式する。 ・答えをたしかめる	○たしかめは全部の条件にあてはめて満足するかどうか考えさせる。一部分の条件だけではいけない場合について考えさせる。 ○文章題を解くとき，これからは常に左に示す順で考えていかせるようにする。 ○図のかき方は一方をそろえると他方が求めやすいことに気づかせる。
○まとめ	○本時のまとめ	○既習の経験と結びつける。（ふろ代の問題との）

(3) 第1時の問題

例　題

おとなふたりと，こども3人のふろ代は68円で，おとなふたりと，こどもひとりのふろ代は44円です。おとなと，こどものふろ代は，それぞれいくらですか。

①

大小2種類のトラックがあります。大型2台と小型3台では14 t まで，大型4台と小型3台では22 t までのものが運べます。大型と小型のトラックには，それぞれ何トンまで積めるのでしょうか。

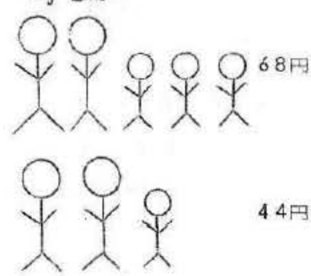
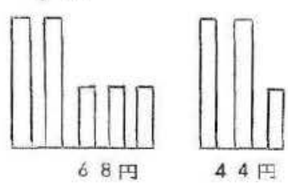
7　第1時の指導過程

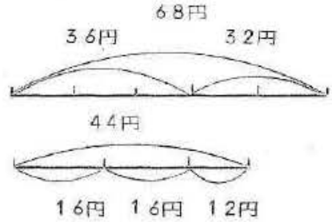
以上による第1時の授業の実践記録が次のとおりである。

児童の活動のらんに P_1 君とあるのは男子の氏名，P_2 さんとあるのは女子の氏名である。ただ P とあるのは，数人か，おおぜいの児童を意味する記号である。

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
0	(小黒板に板書しておく) おとなふたりと，こども3人のふろ代は68円で，おとなふたりと，こどもひとりのふろ代は44円です。おとなと，こどものふろ代は，それぞれいくらですか	・ きようは，いろいろな問題を考えてみたいと思います。先生の方で問題を黒板にかいておきましたから，それをみて考えてください。 ………… P_1 君，よんでもらいましよう。	・P_1君 「おとなふたりと，こども3人のふろ代は68円で，おとなふたりと，こどもひとりのふろ代は44円です。おとなと，こどものふろ代は，それぞれいくらですか。」
		・ わりあいにかんたんだなあと思う人，手をあげてごらん。	(挙手 3人)
		・ むずかしいと思う人。	(大部分挙手)
		・ それでは，もう1回この問題を，いっしょによんでみましょう。ハイ	(一斉によむ。) ・P おとなふたりと，こども3人のふろ代は68円で，おとなふたりと，こどもひとりのふろ代は44円です。おとなとこどものふろ代は，それぞれいくらですか。
		・ ハイ，まず第1に考えることは，この問題は何をきいている問題か，答えは何をだせばよいか，ということですね。 きかれていることは何でしょう? P_2君	・ P_2君 おとなと，こどものふろ代です。
	きかれていること おとなのふろ代 ? 円 こどものふろ代 ? 円		
		・ P_3君それはどこにありますか?	・ P_3君 おとなと，こどものふろ代は，それぞれいくらです

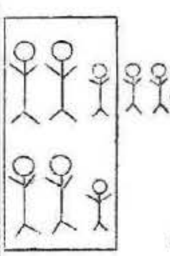
時間	教師の板書	教 師 の 活 動	児 童 の 活 動
			かというところです。
		・そこにありますね，おとなと，こどものふろ代は，それぞれいくらかそれぞれ，おとなはいくらか，こどもはいくらか。	
		・わかっていることは？	（挙手　１４人）
		・答えをだすためには，わかっていることを手がかりにしなければなりませんね。	
		・ハイ P_4 君	・P_4 君 おとなふたりのふろ代と，こども３人のふろ代と，おとなふたりと，こどもひとりのふろ代です。
		・いいですか，P_4 君のいったことをかいてみましょうね。 わかっていることは	
6	わかっていること おとなふたりと，こども３人のふろ代 ６８円	・おとなふたりと，こども３人のふろ代	
		・これはいくら　？	・P　６８円
		・６８円	
	おとなふたりと，こどもひとりのふろ代 ４４円	・それから おとなふたりと，こどもひとりのふろ代	
		・これは　？	・P　４４円
		・いいでしょうかね　？	
		・これだけわかっていることから，こどものふろ代はいくらか，おとなのふろ代はいくらか。	
		・さて，これだけわかっておって，おとなひとりのふろ代はいくらか，こどもひとりのふろ代はいくらかというのですね。	
		・ノートをだしてごらん。	（児童はノートと筆記用具を机上にだす。）
		・おとなふたりとこども３人のふろ代というのを絵でもよし，かんたんな図でもよし，自分でわかるようにかいてください。	（児童，各自，自分のノートに図をかき始める。）

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
		・　おとなふたりと，こどもひとりのふろ代は，これもわかるように図をかいてください。 ・　問題が，ちょっとわからないときは図をかいてみるとよいですね。 （机間巡視しながら作図の注意） ………	（児童作業）
11		・　いろんなのがありますが，おとなふたりと，こども３人というのが，わからなくてはなりませんよ。 ・　そのとなりののは，おとなふたりとこどもひとりというのがわからなくてはなりませんよ。 …………	
		・　それでは，P_5 さん，P_6 さん，もうひとり，P_7 さん，黒板に上手にはしょをつかって図をかいてみてください。場所があったら大きくかいてください。 （机間巡視して作図の指導） ・　もうできた　？	（３人の児童板書　） ・P_5 さん  ・P_6 さん  ・P_7 さん

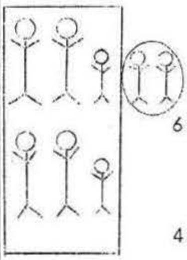
時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
		・もうできたんですね　？	 おとな　16円 こども　12円
		・それぞれ図をかいた人から説明してもらいましょう。自分の図で説明してください。	・P_5さん おおきいのがおとなで，おとなふたりで，ちいさいのがこども ・P_6さん おとな２人というので，おとなはながい棒にして，こどもはその半分にした。
		・P_7君	・P_7君 こっちが，おとなふたりとこども３人で６８円です。こっちは，おとなふたりとこどもひとりで４４円です。ぼくは６８円－４４円の答えを２でわって１２円，４４円から１２円をひいたのを２でわって１６円，こどもは１２円，おとなは１６円にした。
		・そう，みんな言ってしまいましたね。 ・それでは，どの絵がいちばんわかりやすいでしょうね　？ ……………	
		P_5さん	・P_5さん P_5さんだと思います。 ・P P_5さんのもよい。

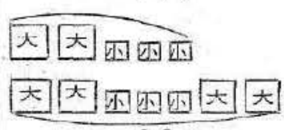
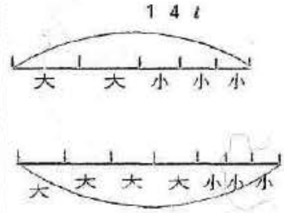
時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
		・P_5さんがよいと思う人　？	（挙手　8人）
		・P_7君のがいちばんわかりやすいと思う人．？	（挙手　1人）
		・P_6さんのがいちばんわかりやすいと思う人　？	（挙手　大部分）
		・答えはまだでなくてもP_6さんのような絵をかいた人　？	（挙手　5人）
		・絵をかいたらわかりましたか。	
		・それをね，式でかいてごらんなさい。ついでに答えもかいてください （机間巡視）	
		・こういう絵をかいたから，こういう式をかいた。 P_9さんとP_{10}君ここにでて式をかいてください。	
		ついでに答えもかいてください。	（児童2人板書）
		…………………	・P_9さん
		もうすこし小さく，まんなかに，P_9さん，もうすこし左へよせて	$68-44=24$ $24\div 2=12$ A，こども　12円 $68-12\times 3=32$ $32\div 2=16$ A，おとな　16円 ・P_{10}君 $(68-44)\div 2=12$ $(44-12)\div 2=16$ A，こども　12円 おとな　16円
20		・それではね，P_9さん，P_7君のでも，P_6さんのでも，P_5さん，でも，どれでもいいから，どこかの図をつかって説明してください。	
		・どうしてそう考えたか。	・P_9さん 68−44は24となったのは，そして24÷2は12というのは，まずおとなと，こども3人で，こど

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
			も3人で，こどもをはじめだしたいと思って68－44は24，そうするとこどもふたりのお金がでるから，24÷2として12円，そして，68－12×3は32，32÷2は16としたのは，68－12×3はこどもひとり12円なので，12×3として68からひいたのはおとなだけの金額をだした。 それがおとなふたりだから32÷2とした。
		・いいでしょうかね ？	
23		・P_{11}君	・P_{11}君　ハイ
		・わかった？ わかりましたか？	・P　ハイ
		・それでは，P_{10}君説明してください。	・P_{10}君 おとなふたりと，こども3人のふろ代は68円で，おとなふたりと，こどもひとりのふろ代は44円なので，おとなふたりと，こども3人，そうすると，おとなふたりと，こどもひとりのかずをひくと，こどもふたりのねだんがでます。それをわる2としてこどもひとりのねだんをだして12円となりました。おとなのねだんは，44円のなかに，こどもひとりとおとなふたりがいるので，こどもひとりのねだんがでたのでそれを2でわっておとなのねだんにした。
		・どうでしょう。どっちの説明がよくわかりましたか？	・P　前のひと

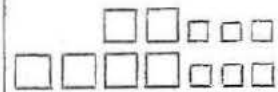
時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
26		・ 自分の絵をみてどういう問題であったか考えてみてください。 問題をききますから。 ・ P_5 さんの絵をつかって考えてみましょう。	
		・ わかっていることは ?	・ P おとなふたりとこども3人のふろ代，おとなふたりとこどもひとりのふろ代。
		・ （P_5 さんの絵をつかいながら） どこまでがおなじで，どこまでがちがうかということがわかりますか？	・ P おとなふたりというのがおなじで，こども3人とひとりというのがちがいます。
		・ まだちがうところがあると思う人？	（挙手も返答もない）
		・ いいですか，68円と44円がちがうのはどこがちがうのかね。	・ P おとなふたりというのがおなじで，こども3人とひとりというのがちがう。
		・ いいですか，まだほかに ?	
	（児童の板書を利用する）	・ ハイ	・ P_5 つまり，こども3人とこどもひとりというのが，こどもふたりがへったわけです。
	 68円 44円	・ ここのおとなは同じですね	・ P ハイ
		・ ここまでおなじくて，ここがちがうのですね。（図を指示しながら）これがちがう。 68円と44円のちがうのはここなんですね。	・ P ハイ
		・ なにがちがうの ?	
		・ もう1回，68円と44円とちがうのは何がちがうの？………	
		・ P_{12} さん	・ P_{12} さん こども3人とこどもひとり，こどもふたり多いのと，68円のほうがこどもがふ

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
			たり多い。
		・　こちらのほうがふたり分だけとびだしているわけですね。P_9さんはそれをはっきりいわなかった。	
		・　これだけがはみだしているわけですね。つまり，６８円から４４円をひいた残りは　？	・ *P*　２４円
		・　この２４円というのは，このとびだしたところで，こどもは何人いる？	・ *P*　ふたり
		・　こどもがふたりいるから２でわる，というふうに絵をかくとたいへんよくわかります。	
		・　のこったのは，６８－４４ （児童の式を利用） これがふたり分	
		・　P_7君のはよくわかりますか？	・ *P* P_7君のは，どこがおとなかこどもかよくわからない。
		・　これをわかりやすくするにはどうすればよい？	
		・　こういう図をかくとき注意しなければならないことは？ P_{14}君	・ P_{14}君 色をかえる。
		・　色をかえればいいですか　？	・ P_{14}君　？
		・　ハイ	・ P_{15}君　？ おとなとこどもなんだから，おとなをひろくし，こどもを小さくするといい。
		・　色をかえなくても，おとなは大きくし，こどもは小さくする。そうするひと？	（挙手　７，８人）
		・　まだあるひと？	（挙手　なし）
		・　P_5さんはたいへんわかりやすいのですが，それだけでしょうかね？P_7君より気をつけたところがまだほかにありますよ。	・ *P*　ハイ

時間	教師の板書	教 師 の 活 動	児 童 の 活 動
		・ P_{16}君	・ P_{16}君 その左でも，右でもよいから，そのはしを合わせるようにする。
31	（再 掲） 	・ ならんでいるでしょう。 そうすると，ここまでが同じで，68円と44円のちがうのはこれだ。 （図の○印）	
		・ すると68－44は？	・ P 24円
	68円	・ これが24円，こどもふたりだから2でわって12円，それでこどもは12円	
	44円	・ 44円から12円をひいて2でわれば，おとな16円，いいですね。	
		・ これがたしかにまちがいないということをたしかめてみましょう。	
		・ P_{17}さん	・ P_{17}さん おとなふたりと，こども3人が68円なのだから 16×2＋12×3
	16×2+12×3＝68	・ が，どうなればよい ？	
		・ P_{18}さん	・ P_{18}さん 68円になればよい。
		・ なるでしょうかね。	・ P なります。
		・ いっしょに	・ P 16×2は32，12×3は36，たして68になる
		・ いいですか，これはどうなるでしょう。 P_{19}君	・ P_{19}君 おとなの16円を2ばいしてたす。こども12円をたして44
	16×2＋12＝44		
		・ そう，これでこの答えは正しいわけですね，ふたつたしかめてみなければなりませんね。	
		・ それでは114ページ(1) を開いてください。 P_{19}君よんで	・ P_{19}君 (1)「大小2種類のトラックがあります。大型2台

時間	教師の板書	教 師 の 活 動	児 童 の 活 動
			と小型3台では14 t まで，大型4台と小型3台では22 t までのものが運べます。大型と小型のトラックにはそれぞれ何トンまで積めるでしょう。」
38		・ 今のように絵をかいて考えてください。	
	もんだいのきいていること 大型 ? t 小型 ? t	(教 師 板 書) ……………	(児 童 作 業)
		・ ハイ，やめて ・ わかっていることは？	
	わかっていること 大2 小3 14 t 大4 小3 22 t	・ P_{20}君 (教師板書)	・ P_{20}君 大型2台と小型3台で14 t，大型4台と小型3台で22 t
		・ そうですね，考えてください。 …………	
41		・ P_{21}君，ここにきて図をかいてごらん。 ・ もうひとり，P_{22}君	・ P_{22}君の板書 14 t  22 t
		・ P_{23}さん，式をかいてごらん。	・ P_{22}君の板書 14 t  22 t ・ P_{23}さんの式 22−14=8 A，大 8 t 8÷2=4 A，小 4 t

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
		・ ハイ，P_{23}さん，説明してごらん。	・ P_{23}さん 大型トラック２台と，小型トラック３台で１４tになる。大型トラック４台と小型トラック３台で２２tになるので，大型と小型があるわけでしょう。 だから２２－４は８，８は大型，８÷２は４は，小型
		・ 今の説明はいいですか？	
		・ P_{21}君，P_{23}さんの説明でいいですか？	・ P_{21}君，ちがう
		・ どういうところがちがう？	・ P_{21}君 大型がちがう，ひけは大型２台だけでるから。
		・ もうひとり，P_{24}さん	・ P_{24}さん 大型トラック２台と，小型３台で，こちらは大型４台と，小型３台なのだからひけば小型トラックは同じなので，大型２台の差がでるので，これは大型２台になる。だからそれを２でわれば大型トラック１台の分がでる。
	（児童の板書を訂正） ２２－１４＝８ ８÷２＝４ A，大４t	・ P_{23}さん，いいですか？ ・ ほかのひとはどうです，４tというのは大型ですね。	・ P_{23}さん，ハイ
		・ 小型はどうすればでます。 P_{25}君	・ P_{25}君 １４－４×２＝６ ６÷３＝２
	１４－４×２＝６ ６÷３＝２ A，小２t	・ これでいいですか？	・ P ハイ
		・ この図（P_{21}君の図）で，こちらに２台おいてもいいですか？	・ P_{25}君 もんだいのとおりならべたらよいのではないですか
		・ それでは図をここにきてかいてごらん。	

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
			・ P_{25} 君の板書 
			・ P（2，3人） なおすのはどうかと思う。
		・ ほかに，P_{26} 君	・ P_{26} 君　板書 
			・ P_{26} 君 こういうふうにかけばよいではないですか。
			・ P_{5} 君 P_{21} 君と同じではないですか。
			・ P_{26} 君 同じだが，こちらによこすと，余りがこちらにくる。
			・ P_{5} 君 そうすると P_{21} 君のが見やすいではないですか。
			・ P_{26} 君 P_{21} 君のは大きいのを前とうしろにやったので大きいのが分かれている。
			・ P P_{26} 君のは前にもってきている。
		・ どちらもよくわかるようです。 ・ それでは，さあ，もう1回問題をいってごらん。本を見ないで，P_{27} さん	・ P_{27} さん 大型トラック2台と，小型トラック3台と14 t のものが積めて，大型トラック4台と小型トラック3台だと，22 t の荷が積めて，大型1台に積める荷物と，小型1台で積める荷物はどれだけか。

時間	教師の板書	教師の活動	児童の板書
5-2	$4\times2+2\times3=14$ $4\times4+2\times3=22$	いいですか，こういう問題は，問題がきいているのはなにか，わかっているのはなんだか，わかっていることをてがかりにして，えをかいてみたり，図をかいてみたりするとたいへん問題がよくわかります。 たしかめてみましょう。P_5 さん いいでしょうか。 りょうほうにあてはめてたしかめてみてください。 おわり。	・P_5 さん $4\times2+2\times3=14$ $4\times4+2\times3=22$

8　第9時の指導過程

o　第9時は適用練習であるので，ねらい，学習活動は第1時の展開案の問題練習のところを，指導上の留意点は同展開案のところをごらんねがいたい。

o　第9時の問題（プリント）

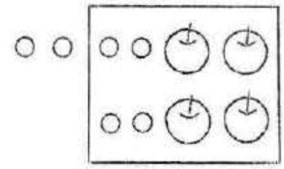
① みかん4個とりんご2個の代金は130円です。みかん2個とりんご2個の代金は100円です。それぞれ1個の代金はいくらですか。

② きょうだい3人で1500円のお金を分けることにしました。姉は兄より60円多く，弟より120円多くもらいます。それぞれいくらになりますか。

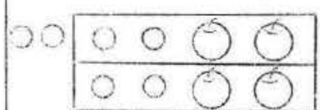
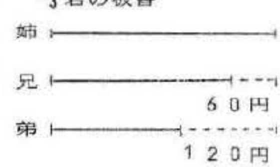
③ 長さ30㎝のテープを15まいつなぐとどれだけの長さになりますか。のりしろは2㎝として考えなさい。

④ 大きなたまご1個と小さなたまご2個の代金は39円です。大きなたまご2個と小さなたまご3個の代金は66円です。それぞれ1個の代金はいくらですか。

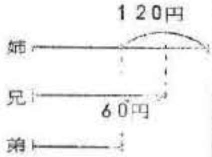
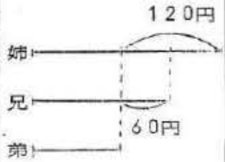
o　以上による第9時の授業の実践記録を次にかかげる。

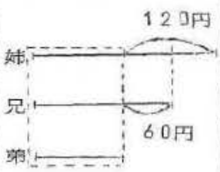
時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
0	(すでに黒板につぎのように板書してある) ① きいていること ② わかっていること ③ もんだいの図 ④ 式と答え ⑤ たしかめ	(プリント配布) ・ きょうは，このプリントの問題を考えてもらいましょう。 きいていることは①，わかっていることは②，図は③，式と答えは④，たしかめを⑤としてかいてください。 (教師は机間巡視をしながら個人指導，または一斉指導をする。) ・ (2)は，姉は兄より60円多く，弟より120円多く， 姉は兄より60円多く，同じ姉が弟より120円多いというのですよ。 ・ よくわからない人は教科書をみて，あの問題とにているんではないかと，思いだして考えてごらん。 ・ (2)のは，3人のお金を合わせると1500円になるんですよ。	(児童の代表が各列にくばる。) (各自プリントに問題解答)
20		・ (2)までおわった人。 ・ (2)までおわらない人。 ・ (3)までおわった人。 ・ P_1さん，ここにでてやってください。(1)を，	(挙手 5人) (挙手 大部分) (挙手 3人) ・ P_1さんの板書 (1) 130円  100円 (130−100)÷2＝15 A，みかん 15円 (100−15×2)÷2＝35 A，りんご 35円

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
22	①みかん1個の代金 りんご1個の代金 ②みかん4個りんご2個　130円 みかん2個りんご2個　100円	・(1)と(4)は同じなかまですね。 ・ ・P_1さんでてきて説明してください。	$15\times4+35\times2=130$ $15\times2+35\times2=100$ (みんなしずかに聞く) ・P_1さん みかん4個とりんご2個の代金は130円です。みかん2個とりんご2個の代金は100円です。それぞれ1個の代金はいくらですかというのですから， ①きいているのは，みかん1個とりんご1個のねだん。 ②わかっていることは，みかん4個とりんご2個の代金は130円，みかん2個とりんご2個の代金は100円です。みかん4個とりんご2個で130円です。みかん2個とりんご2個は100円です。それでその中に，130円のなかにみかん4個とりんご2個があるので，ここだけで100円です。（棒で図をさしながら）だからみかん1個だすのは，(130−100)わる2では，答え，15円，それがみかんです。 そうするとみかん1個がでるので，りんごをだすにはその100円でみかんが2個あるので，15×2はみかんの2個の代金がでます。それでそうするとこれだけだとりんご2個のねだんがでるので，わる2で，(100−15×2)わる2は，りんご35円 たしかめは，りんご35円は2個でそしてみかんは4

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
			個なので $15\times4+35\times2=130$ $15\times2+35\times2=100$ それで私の答えはあっていることになります。 質問ありませんか　? P_2君 ・　P_2君 これが100円でなくて，これが100円でないですか。  (4かくでかこまれているところでなく，横線の下の意味) ・　P_1さん　?
		・　そうですね	・　P_1さん ほかに質問ありませんか。 (しつもんなし)
		・　ほかにちがうやりかたをしたひとありますか?	(挙手　なし)
		・　だいたい同じですか　?	・　P　ハイ
		・　(1)　図までできた人	(　挙手　大部分)
		・　式と答えがまだでも図だけかいてもらいましょうかね。 ……………	
30		・　(2)できましたか，まだできない? ……………	
		・　(2)やってもらいましょうかね。	
		・　P_3君　図のところまでかいてください。	・　P_3君の板書 

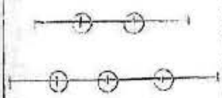
時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
		・ P_3君，式と答えをいわないでどのようにして考えたかということをいってください。	
	(1500+120+60)÷3		・ P_3君 兄と姉と弟を合わせると1500円なので，兄が姉より60円少くて弟は姉より120円少いんだから，1500+120+60としてこれを3でわれば姉がでてくるから，姉から120円ひくと弟がでてくる。
		・ あねでなくて，あね，（アクセントをなおす）もう1回いってごらん。	
			・ P_3君 兄と姉と弟ぜんぶで1500円です。それで，兄は姉より60円少くて，弟は姉より120円少いので，そうすると1500円に120円と60円たせば姉の3倍がでてくるので，たして3でわれば姉がでてくるので姉から60円をひけば兄がでてくる。姉から120円ひけば弟がでてくる。
		・ わかりましたか。あのね，姉のお金がでてくるところがよくわからない人?	・ *P* ?
		・ 姉がでたら60円をひく， （P_3君の図によって説明）	
		・ そうすると	・ *P* 兄がでてくる。
		・ それからこの姉から120円をひけば弟がでてくる。	
		・ 姉のお金がどうしてでたかわかった人?	（挙手 大部分）
		・ まだわからない人?	（挙手 なし） （しかし，のみこめない児童が，だいぶいるようである。）
		P_4君はこういう図をかいています。	

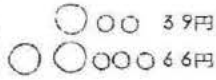
時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
		・ この図から，だれののがいちばんはじめにでてくると思いますか？ この P_1 君のかいた図から，P_5さん	・ P_5さん ここ（弟のところを指示する）
		・ そうですね，弟のぶんのここが最初にでてくる。これをだすのにどうやったらいいのかなあ。 ………………	
		・ これはいいかね，こうやってみますよ。みんな弟に合わせてみる。	
		・ いいかね，まえに何メートルかのなわをこちらの方はちょっと多くちょんきるのをならったでしょう。	
		・ そのときどうやったかな思いだした人？	（挙手　大部分）
	（再　掲） 	・ ここはいくらなの，みんなでいってごらん。	・ P　120円
		・ ここは120円，ここはいくらになるだろうね。	・ P　60円
		・ 60円と120円ですね，そうすると弟の分がだせそうでしょう。わかったかね，どうやればでてくるか。	
		・ 前ののは（なわをちょんきる問題）どうだったかね，1本のひもを2本に分けるとき，同じに分けるのでなくて，片方をいくらか長く分けるというのがあったね，そのときどうしたか，長い分をどうした　？	・ P　？
		先にどうした　？	・ P　？
		・ 長い分だけ最初にとっておいて，そしてふたつにわって，あとでとった分をたしたね。	
		・ そうするとこの場合，よけいの部分というのはどれだ。これだろう。これをかたづけてしまっておけば，3でわればでてくるだろう。	
		・ まだわからないかな，わかったと思う人？	（7割程度挙手）

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
		・よけいな部分をとってしまえばいいですね，よけいな部分というのはどれですか ？	・P 120
		・それと，それからどれですか ？	・P 60
		・それをね，それはいくらになりますかか ？	・P 180
		・それをどうするんですか ？	・P ？
		・これだけ（120+60のこと）	
		・わかりますか ？	・P ハイ
		・これ何がでてくるかわかる人 ？	・P ハイ
		・よし，これとこれだね（再掲の図の余分のところ）	
		・こんどどうすればいいですか，180というのができましたよ。これがよけいな部分ですね。	
		・ハイ	・P 1500−180
	1500−180	・これはいくらになりますか ？	
	＝1320	・みんなでいってごらん	・P 1320
		・1320というのはどれなんですか？	・P ハイ
		・P_6さん	・P_6さん これと，これと，これ（図を指示する。）
	（再　掲）  	・これとこれとこの部分（点線でかこんだところ）が1320ですね。それでは弟はどうすればでます。1320というのはどれだかわかったかな，これとこれとこれでしょう。	・P_7さん 1320÷3
		・1320÷3	
	1320÷3＝440	・これなにがでてくるの ？	・P 弟
		・弟だね，さあみんなでいってごらん。	・P 440
		・兄はどうやればいいかね。	・P ハイ（挙手 7割程度）
		・わからない人にきいてみましょうかね	
		・これが440円とでてきたんですよ，あとどうすればよい？	
		・みんないってみましょう。	・P 440+60
	440+60＝500	・これはいくら	・P 500
		・これはだれだ ？	・P 兄
		・それでは姉はどうしたらよいかね。	・P 440+120
	440+120＝560	・これはいくら	・P 560
		・のみこんだ人？	（9割程度 挙手）

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
		・ のみこめましたか，たしかめでしたね。	
	440+500+560 =1500	・ いいですね。 ・ 今の問題どういうところがむずかしかったかね。	・ P 図がめんどうだった。
		・ 図がめんどうだった人？	（3人 挙手）
		・ 図はめんどうでなかった人？	（8割程度 挙手）
		・ P_8 君，どういうところがめんどうだったね。	・ P_8 君 図から式にもっていくところ。
		・ 図から式にもっていくところがめんどうだった，答えがあいましたか。	・ P_8 君 わからない
		・ 答えがわからない，図はいいんだけれど，式がめんどうだったね。	
		・ 1ぱんの問題，めんどうだった人いますか。	（2，3人 挙手）
		・ かんたんだった人 ハイ，よくできますね，1ぱんの問題はまえにやったどういう問題ににていますか？	（大部分 挙手） ・ P ふろやの問題
		・ そのとき，図をかくのに気をつけることは，どういうことだったでしょう。	・ P_9 君 そろえる
		・ いま，P_9 君がいったようにそろえることでしたね。P_1 さんのやったように，こういうふうに（P_1 の板書）きちんとそろえるといいですね，そろえるとね，それから2ぱんの問題はどういうところがたいせつなんだろう。こんな問題ではまえにいろんなにかよった問題をやったでしょう。ね，こういう問題のときにはどういうことがたいせつなんですか？分けるのは？	・ P よけいの分をとってしまう。
		・ そう，よけいの分をとってしまう。	
		・ この1500というのはなんでしたかね？	・ P 3人のおかね

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
		・ 3人のおかねだね，あるいは全体のおかねだね。	・ P 全体の大きさ
		・ 全体の大きさからよけいの部分をとってしまう。ハイ，全部でいってごらん。	・ P 全体の大きさからよけいの部分をとってしまう。
		・ よけいの部分をとってしまって，さっきとったのをくっつけてやればいいわけですね。	
		・ それでは3ばん，3ばんのほうを先にだしておけばみんなやれたんでしょうが，2ばんがめんどうだったからね。	
		・ 3ばんやってみましょう。こういうもんだいでたいせつなことはなんだったでしょうか，まえにもやったでしょう。	・ P のりしろのこと
		・ そうですね，みんなでよんでみよう	・ P (3)長さ30cmのテープを15まいつなぐとどれだけのながさになりますか，のしろは2cmとして考えなさい。
		・ のりしろがないものとすれば，2cmというものがないものとすれば，15倍すればいいですね。	・ P ハイ
		ところが，のりしろが2cm，どういうところがだいじなの，まちがいやすいの，こういうもんだいでは？ ハイ	・ P_{10}さん のりしろのかず
		・ のりしろのかずが，15なんだか，14なんだか，16ということはありますか ？	・ P ない
		・ 15なんだか，14なんだか P_{11}さん ………………	・ P_{11}さん ？
		15なんだか，14なんだか？	・ P_{11}さん 15 ・ P 14
		・ そう，14ですね，そうするとどうすればよいかわかっている人？	(挙手 15人)

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
		・ そう，図をかくと，	
		・ 3まいつなぐとのりしろは？	・ P 2まい
		・ 2まいだね，4まいだと	・ P 3まい
	2×14	・ こうですね，のりしろができますね，それでは先生がかいたこれでは何がでてくるかわかる人？手をあげてごらん。なにがでてくるだろう。いちばんうしろの人。	・ P_{12} のりしろです。
	30×15	・ いいですね，これはなにがでてきます？	・ P のりしろがない場合の全部の長さ。
	(30×15)－(2×14)	・ のりしろのない場合の全部の長さだね，だからそれからどうすればよいの	・ P ひけばよい。
			・ P かっこはいりません。
		・ かっこはなくていいですね。	・ P ハイ
		・ わかった人	(ほとんど全部挙手)
		・ 計算しましたか。	・ P 422
		・ 4mと22cmですか，じぶんでたしかめておいてください。	
		・ それでは，こういう問題ではのりしろの数は，15枚なら15枚のときはどうなるか，まだにている問題をやったのをおぼえている人？どんな問題をやっているだろう。ハイ，P_{13}さん。	・ P_{13}さん まるた
		・ あ，丸太をきったときの問題，この問題をおぼえている人	(挙手 大部分)
		のこぎりの問題，のこぎりで丸太をきるとき今のことがでてきますね，またほかにある人？…… こんなのおぼえていますか，ここからここまで何メートルで，木をうえる問題	P アー
		・ この問題どうだ，今の問題ににていませんか。	P にています。
		・ それではね，4ばんにうつりましょう。	
		・ P_{14} さん，よんでください。	・ P_{14} さん

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
			大きなたまご1個と小さなたまご2個の代金は39円です。大きなたまご2個と小さなたまご3個の代金は66円です。それぞれ1個の代金はいくらですか。
		・きょうやったの，先生この説明をやったのをつかうとできます。そろえてやるということ，式はいいから，図だけかいてみますかね。	
		・大きなたまごは ？	・P 1個
		・1個ですね，小さなたまごは？	・P 2個
		・2個，それでいくらです。	・P 39円
		・そう，それから大きなたまごが？	・P 2個
		2個，小さなのは何個あるんですか？	・P 3個
		・それがいくら	・P 66円
		・あ，こんな問題です。めんどうでしょう。	・P かんたんです。
		・かんたんだと思う人	（挙手 7人）
		・前にやったことがあるかね，これをさっきのこの考え（いちばんの問題）でできますか？…………	
	（再掲）	・P_1さん，この図にかいてください。	・P_1さん，（教師の図の共通部分を四角で，図のようにかこむ。）
		・こうやってみるとみんなどうです。この四角でかこんだのはいくら？	・P 39円
50		・これをもっとわかりやすいならべかたはありませんか。	・P ？（児童はわからない）
		・こうやってみたらどうです（左図）	
		・これはどうです。これはいくらでしたかね。	・P 66円
		・これはいくらです？	・P 39円
		・これだけはいくら？	・P 27円
		・さあ，これが27円，さあ，それからだしたいんですがね。それからだせますか？	・P ？
		・わかった人，手をあげてごらん。	（挙手 4人）
		・ハイ，P_3君，式はかかなくていいよ。これでだせます。	・P_3君

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
			小さいたまご1個と大きなたまご1個で27円で，大きなたまご1個と小さなたまご2個で39円なので39円から27円をひくと，小さなたまご1個のねだんがでる。
	39－27＝12	・ わかりましたか ？	・ *P* ハイ
	A，小 12円	・ あたまがいいね。	
		・ 大きなたまごは ？	・ *P* 27－12
	27－12＝15	・ これをたしかめてみてくださいね。	
55	*A*，大 15円	・ あるひとにやってもらったら，こういう図をつくった。これはどうしてやったんでしょう。	
		・このひとの考え方のわかる人?	(5，6人 挙手)
		・よし	
	○○ ○○○○ 78円 ○○ ○○○ 66円	・この問題をぼくはこうして図をかいたよ，だから12円だよとやったひとがいたそうだ。 ね，なまえはよたろうでもいいね，4ばんの問題をときなさい，といったらこういう図をつくったんです。 そうして，これが66円でこれが78円だもの，それで78円から66円をひいて小さいのが12円とした。 わかるひと，この考え方，このよたろう君の考え方。ハイ，P_1 さん	・ P_1さん それは，78円というのは，小さなたまごが4個で66円というのは小さなたまごが3個なので，それをひくと小さなたまご1個のねだんがでます。
		・ わかりましたか，P_1 さんのいったのをわかりやすくいうとこういうことになります。	
	大小小 39円 大大小小小小 78円	・ 大，小，小で39円ですね，これを2倍したら大，大，小，小，小，小と，そうすれば，これだけで39円の2倍の78円になる。これわかった人?	*P* ハイ

板書	教師の板書	教 師 の 活 動	児 童 の 活 動
		(もとの図にかえる) ・ そしたらこのねだんがわかっているんでしょう。これをひけばこれ(小さいたまご1個)がでてくる。 ・ それではこの人,これからの質問がめんどうだと思ってくださいよ。このよたろう君はなぜ2倍したんだろう。わかるか。3倍や4倍しなくてなぜ2倍したんだろう。3倍したって4倍したっていいよね これを2倍したのはなぜだろう。 ・ハイ,わかる人,2倍すればよいというのはどういう考えからしたんだろう ・ハイ	
			・ P_7 君 上ののは大きいのが1個で,下ののは大きいのが2個だから,上ののを2倍すると大きいのが2個になって,そろうから,そして大きいのをしまつしていく。
		・ ハイ,もう1度きいてみよう。	・ P_{11} 君 2倍したのは,ふろやの問題のときは,片方だけ同じのがあって,ほかののがちがっているので,同じだけをそろえて余っているのをわってできたんだけれど,こっちののはあの,小さいのも大きいのも同じ数がないので,2倍にすると,66円の大きいのが2個で39円のは大きいのが1個で,2倍にすると大きい数がそろうのでその余ったのをしまつすればできます。
		・ それで初めから2倍したのですね。わかった人?	(挙手 7割程度)
		・ ふろやのときは,おとなの数が同じだったでしょう。だからどっちかの数を同じにしようと考えた。	

時間	教師の板書	教師の活動	児童の活動
60	（再　掲） ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	・ この場合ですと，大きなたまごが1個で，小さなたまご3個だ。だからこちらを2倍すればふろやの問題と同じではないか， こうやってもできるけれどもこちらを（上）3倍し，こちら（下）を2倍すると小さいたまごが6個になる。こうしてもできるけれども，よたろう君のは，これを2倍したほうがわかりやすいからぼくは初めから2倍するつもりだった，というんです。わかった人？ ・ こんな問題がでたとき，いまのことをわすれないでやるといいと思います。	（9割程度　挙手）

9　指導後の感想

— 問題は省略する —

(1) P 1 1 4　　例題，①

問題はよくわかり，よく理解できた。図化はいままでなれていなかったせいか，あまりよくできなかった。うまく図化できたものは3割ぐらいであった。答えがわかっているから図化がつかえたものも数人いた。

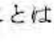
(2) P 1 1 5　②，③，④

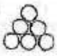
図化もなれて割合すらすら指導できた。

(3) P 1 1 6　例題，①，②

図化はうまくできたが，解答の式と答えがうまく進まなかった。よけいなものをとればよいとすぐ気づいたものはわずか1割位だった。その原理に気づいたらあとはすらすらとできたが，もう1度よけいなものをたせば多い方の2倍になるという方法もあり，この例題の解答にはふたとおりあるということに気づいた児童は少数で，半数はむしろふたとおりの解答はわずらわしいようであった。

(4) P 1 1 7　例題，①，②

例題はむずかしかった。教科書ではかんたんな場合で考えてみようとなっているけれども，こどもたちには，かんたんな場合と問題とが結びつかないようであった。　のとき，下の俵が3俵のときは，表の段数は3段であり，問題の下の俵が10俵になるから俵の段数は10段であることに気づくのは割合よくいったし，式と答えも台形の既習があったので納得ができたが，ただ教科書のように　　……　　……から下の俵10俵の場合を想定するということは，

こどもたちにはなかなかできず，やはり問題どおり10俵から図化したものが大部分であった。だから  ……からというのは教師の指導の場合であって，こどもの解答には合わないのではないかと考えさせられた。

(5) P118　例題，①，② ……… 略

(6) P120　①，②，③，④，⑤

②の道を端に動かして  と考えるものはほとんどなかった。答えは正確にでたが，大部分のものが道は道で計算して全体からひいていた。前記のように考えればかんたんであると説明したら，なるほどと感心していた。

(7) P121　①，②，③，⑤

①の問題はむずかしくなかったが，植木算のときには自分の手をひろげて指とその間の関係を考えるように指導した。

(8) P122　①，②，④，⑤

①はむずかしかった。問題がのみこめないで，式と答えにつかえた。⑤は少数のものであったが，長方形，正方形の面積の求め方，辺の長さの求め方がごちゃごちゃになったものがいた。正方形のまわりは4で割り，面積は1辺×1辺であることを確めた。

10 指導後テストの応答調査

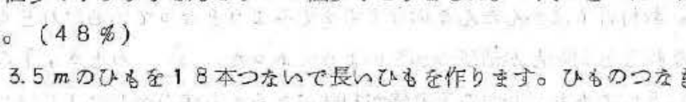
第10時（第5次の5時）にテストを行なった。テストの問題およびその正答率は次のとおりである。

① がよう紙3枚とノート2冊の代金は45円です。同じがよう紙5枚とノート2冊の代金は55円です。がよう紙1枚，ノート1冊の代金はいくらですか。（78％）

② きょうだい2人で800円のお金を分けることにしました。兄は弟より150円多くもらいます。それぞれいくらになりますか。（51％）

③ 80mはなれて2本のまつの木があります。この2本のまつの木の間へ4mおきにさくらの木を植えるには何本のさくらの木がいるでしょう。（40％）

④ やおやの店先になし，りんご，かきが下の図のように組合わされてねだんがついていました。それぞれ1個のねだんはどれだけですか。（64％）



⑤ 洋子さんたち3人は120個のおはじきでおはじきとりをしました。洋子さんは正子さんより8個多く，ゆり子さんより16個多くとりました。3人のとったおはじきはそれぞれ何個でしょう。（48％）

⑥ 3.5mのひもを18本つないで長いひもを作ります。ひものつなぎ目には2本のひものはしをそれぞれ4cmずつ使います。長いひもの長さはどれだけになりますか。（5％）

⑦ おとなふたりと，こども3人のバス代は240円です。おとなひとりと，こども4人のバス代は220円です。それぞれひとり分のバス代はいくらですか。（40％）

なお，テストをうけたものは42名で全体の正答率は47%であって，答案には次のことがらを番号順にかかせた。

① きいていること
② わかっていること
③ もんだいの図
④ 式と答え
⑤ たしかめ

次に各問題の応答調査の結果を述べる。各問題の応答調査の最初に，参考答案として，代表的な答案をひとつずつかかげたが，その答案を作製した児童氏名の次にかっこのなかに入れて，($\frac{6}{7}$－3－61－4)とつけ加えてあるのは，児童の学力を示すのであって，$\frac{6}{7}$とは第10時のテスト問題の7題のうち6題正答したという意味，次の3は，学校成績の5段階評価，61は標準学力テストの偏差値，4は標準学力テストの5段階評価である。

①の問題の応答調査（正答率78%）

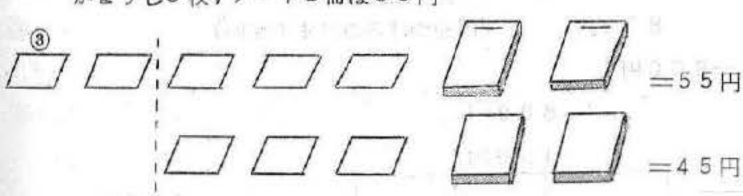
o 参考答案　*H*．*K*君（$\frac{5}{7}$－4－?－?）

① がようし1枚，ノート1冊の代金はいくらでしょうか。

② がようし3枚とノート2冊の代金は45円

がようし5枚，ノート2冊は55円

③



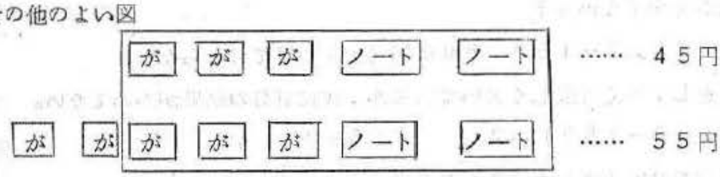
④ (55－45)÷2＝5　　　　*A*，がようし　5円

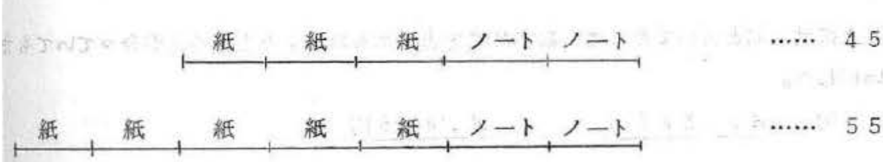
(45－5×3)÷2＝15　　　　*A*，ノート　15円

⑤ 5×3＋15×2＝45

5×5＋15×2＝55

o その他のよい図





○ 誤 答

・ 答えがが よう紙となっていないで，わらはん紙となっているもの。

・ 答えとしてノートの代金を書くのを忘れているもの。

・ 図が整頓されていないもの。

・ 立式のちがい。（５５－４５）÷５＝２ 等

・ たしかめてないもの。

②の問題の応答調査（正答率５１％）

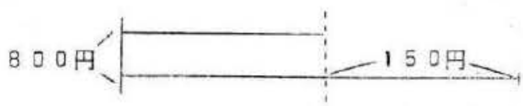
○ 参考答案 M．Yさん （$\frac{2}{7}$－３－５９－４）

① 兄と弟のもらうお金

② 兄だい２人で８００円

兄は弟より１５０円多い。

③



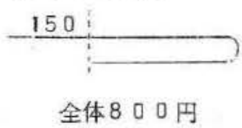
④ （８００＋１５０）÷２＝４７５ 　　<u>*A*，兄 ４７５円</u>

８００－４７５ ＝ ３２５ 　　<u>*A*，弟 ３２５円</u>

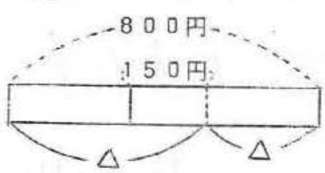
⑤ ４７５×２－１５０＝８００円 　　（円をつけるのはまちがい）

３２５＋４７５＝８００円

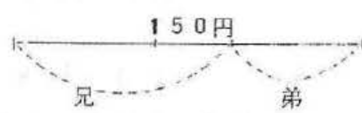
○ わかりにくい図



（誤　答）



（正　答）



（正　答）

○ 正答にはしたが完全でない答案

・ 検算の式 ４７５×２－１５０＝８００円（円をつけてはならない）

・ 正しい立式をし，答えは正しく書いてあるが，式に計算の結果がかいてない。

例 （８００－１５０）÷２，　３２５＋１５０，

・ 検算をひとつだけですましているものが多い。

○ 誤答

・ 答えに兄，弟と書いてなくて，数字だけを書いたものは，たとえ答えが合っていてもまちがいにした。

例 <u>*A*，３２５円</u> 　　<u>*A*，４７５円</u>

・ 立式のちがっているもの

例　８００÷２　＝４００

４００－１５０＝２５０　　　　<u>*A*，弟　２５０円</u>

４００＋１５０＝５５０　　　　<u>*A*，兄　５５０円</u>

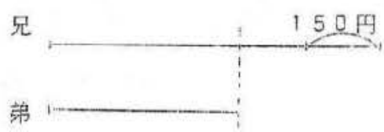
このような例は案外多く７名もあった。そのなかには図の正しいものも正しくないものもある。このような誤りは１本の式だけの検算では発見できない。

・ 数字のうつしちがい。　１５０を１２０とうつしちがえている。（２名）

・ 計算ちがい。　（８００－１５０）÷２＝３７５

・ 図のちがっているもの

例



１５０＋１５０＝３００
８００－３００＝５００
５００÷２　＝２５０
２５０＋３００＝５５０

・ 図化，立式ともにほとんど不可能のもの　５名

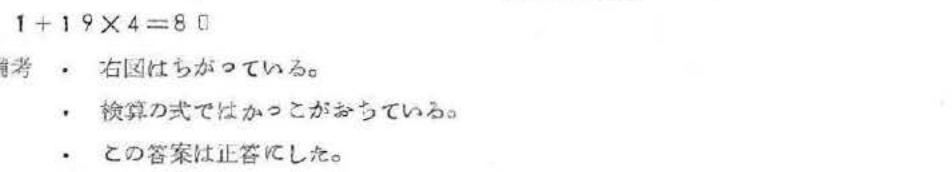
③の問題の応答調査（正答率４０％）

○ 参考答案　*Y*．*K*君　（$\frac{6}{7}$－３－６１－４）

① 何本のさくらの木がいるでしょう。

② ８０*m*はなれて２本のまつの木がある。この２本のまつの木の間へ４*m*おきにさくらの木をうえる。

③



④ ８０÷４＝２０　　２０－１＝１９　　<u>*A*，１９本</u>

⑤ １＋１９×４＝８０

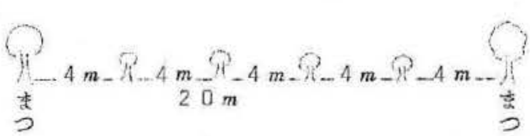
備考 ・ 右図はちがっている。

・ 検算の式ではかっこがおちている。

・ この答案は正答にした。

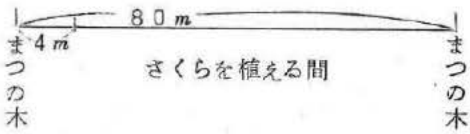
○ その他の図，式

*a*図



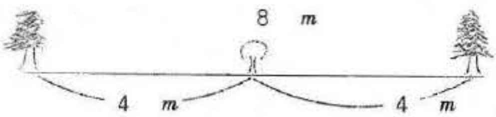
*a*図の式　８０÷４－１＝１９

b図



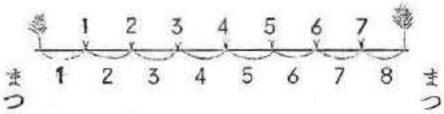
b図の式　８０÷４－１＝１９

c図



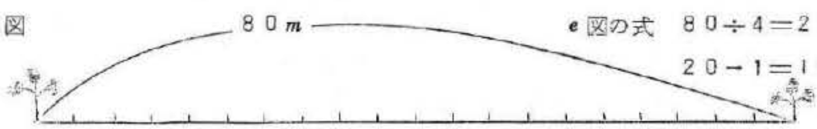
c図の式　（８０－４）÷４＝１９

d図



d図の式　８０÷４＝２０
２０－１＝１９

e図



e図の式　８０÷４＝２０
２０－１＝１９

○　誤答

・　２０本と答えをだしたもの　１２人

例　立式　８０÷４＝２０

検算　２０×４＝８０

・　１８本と答えをだしたもの　４人

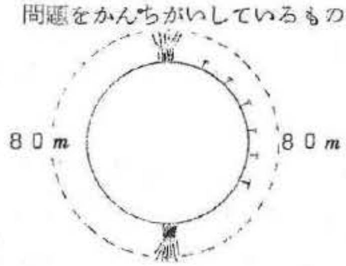
例　立式　８０－８÷４＝１８
検算　１８×４＋８＝８０　は，正しくは次のとおり　（８０－８）÷４＝１８
４×１８＋４×２＝８０

・　１０本と答えをだしたもの

立式　（８０÷２）÷４＝１０

検算　１０×４０×２＝８０

・　問題をかんちがいしているもの



立式　１６０÷４＝４０
検算　４０×４＝１６０

④の問題の応答調査（正答率６４％）

○　参考答案　K．M君　（$\frac{3}{7}$－４－６７－５）

①　かき，りんご，なしのねだん

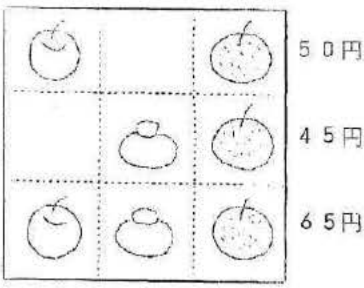
② なしとりんごで　５０円
なしとかきで　４５円
なし，かき，りんごで　６５円

④ ６５－５０＝１５　　<u>Ａ，かき　１５円</u>
６５－４５＝２０　　<u>Ａ，りんご　２０円</u>
６５－（２０＋１５）＝３０　　<u>Ａ，なし　３０円</u>

⑤ １５＋２０＋３０＝６５

備考　・ プリントに図がかいてあるので，ほとんどの児童は図示していない。
・ たしかめは３本の式が必要である。

o よい図



この児童は誤答である。

６０－５０＝１５　　<u>Ａ，かき　１５円</u>
６５－４５＝２０　　<u>Ａ，りんご　３５円</u>
１５＋２０＝３５　　<u>Ａ，なし　２０円</u>

o 誤答

・ なしが３０円であるのに，みかん３０円として答えをかいたもの。
・ かきのねだんをそのままなしのねだんにした。（なしのねだんをだす計算をしない。）
・ 計算ちがい。

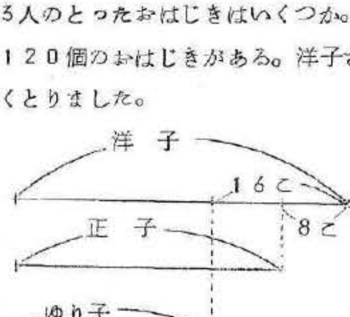
⑤の問題の応答調査（正答率４８％）

o 参考答案　Ｏ．Ｔさん（$\frac{5}{7}$－３－６０－４）

① ３人のとったおはじきはいくつか。

② １２０個のおはじきがある。洋子さんは正子さんより８個多く，ゆり子さんより１６個多くとりました。

③



④ １２０－（１６＋８）＝９６
９６÷３＝３２

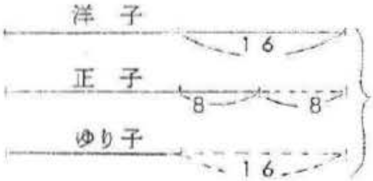
$32+16=48$
$48-\ 8=40$

A，ゆり子 32こ
正 子 40こ
洋 子 48こ

⑤ $48-40=\ 8$
$48-32=16$

○ その他の図，式

a図



a図の解答

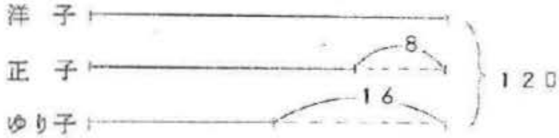
$(120-16-8)\div 3=32$
$32+8=40$
$32+16=48$

b図

b図の解答

$(120+8+16)\div 3=48$
$48-8=40$
$48-16=32$

c図

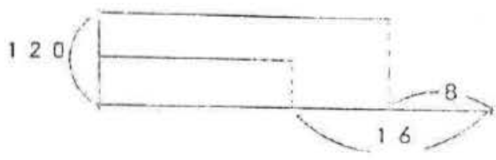


c図の解答

$(120-16-8)\div 3=32$
$32+8=40$
$32+16=48$

○ 誤答

- 名まえのちがい 2人
- $120\div 3-16=24$
  $24+8=32$
  $32+8=40$
  図が不明瞭 3人
-



立式していない

⑥の問題の応答調査（正答率5％－正答者2名）

○ 参考答案 *I*．*Y*さん（$\frac{7}{7}$－4－63－4）

① 長いひもの長さ

② 3.5mのひもを18本つなぐ

つなぎめは，2本のひもからそれぞれ4cmつかう。

③

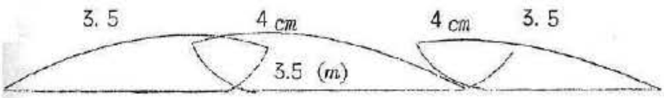

④ (18−1)×4×2=136　　　136cm=1.36m

3.5×18−1.36=61.64　　　A，61.64m

⑤ (61.64+1.36)÷18=3.5

○ 誤答㋑ — 「つなぎ目には2本のひものはしをそれぞれ4cmずつ使います。」を正しく解釈したと思われるもの。（9名）

3.5×18−0.4×(18×2)
=49.4
A，49.4m



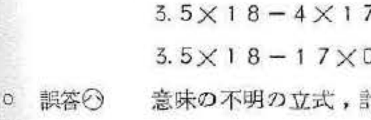
4×2×18=144
3.5×18=63

6300−144=6156
A，61m51cm

3.5×18−0.4×2×17=49.4　　　A，49.4m

その他　誤答㋑の類型に属すると思われるもの5名

○ 誤答㋺



3.5m=350cm
350×18−4×17=6232
A，62.32m

誤答㋺の類型に属し，答えが62.32mとしたものが8名もいた。

その他の誤答も多く，この類型に属し，なかでも小数の計算ちがいがいちばん多かった。

3.5×18−4×17=528　　　A，528m

3.5×18−17×0.4=56.2　　　A，56.2m

○ 誤答㋩　　意味の不明の立式，計算　8名

○ 無答　　7名

⑦の問題の応答調査（正答率40%）

○ 参考答案　I．A君　($\frac{5}{7}$−5−66−5)

① それぞれひとり分のバス代

② おとな2，　こども3のバス代

おとな1，　こども4のバス代

③

大 大 小 小 小	240円
大 大 小 小 小 小 小 小 小 小	440円

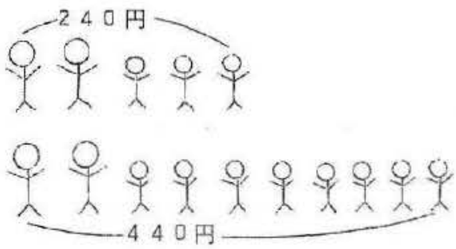
④ (440－240)÷5　　　　A，こども　40円

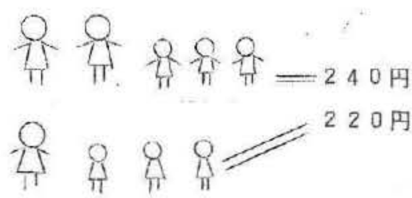
(240－40×3)÷2　　　　A，おとな　60円

⑤ 60×2＋40×3 ………… 240円

60×2＋40×8 ………… 440円

o その他の図　(正答者のもの)





o 正答の分類 ― 観点「そろえる」による分類　(正答者17名)

a 型 ― 図をそろえてかいているもの(8名)

例

大 大 小 小 小	240円
大 大 小 小 小 小 小 小 小 小	440円

b 型 ― 図はそろえて書いてないが，正しい立式をしているもの(9名)

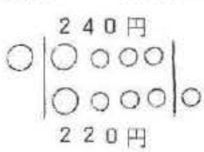
例 大 大　小 小 小　＝ 240

大　小 小 小 小　＝ 220

(220×2－240)÷5＝40　　　　A，こども　40円

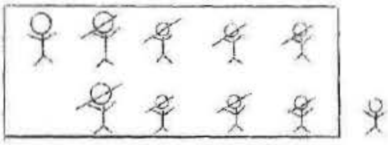
220－40×4＝60　　　　A，おとな　60円

o 誤答㋑ ― 答えは合って式がちがっているもの　8名(この数は誤答㊀と重複)

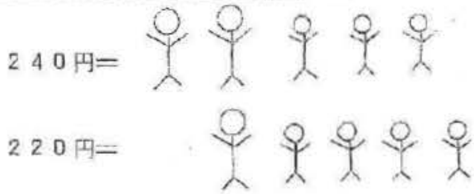


(240－220)×2＝40

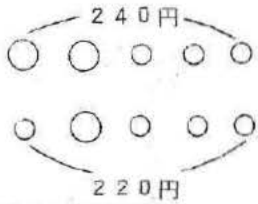
(220－40×4)＝60



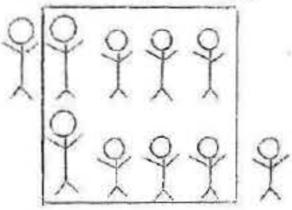
200÷5＝40　　A，こども　40円
220－40×4＝60　　A，おとな　60円



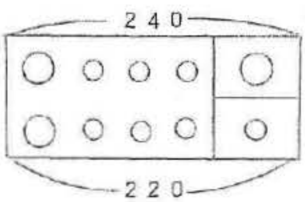
240－220＝20
20＋　20＝40　　A，小　40円
20＋（20＋20）＝60　A，大　60円



240÷4＝60
240－（60×2）＝120　　A，おとな　60円
120÷3＝40　　A，こども　40円

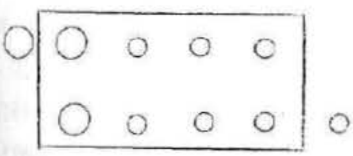


＝240円　240÷2＝120
120÷2＝　60　　A，大　60円
＝220円　（240－60×2）÷3　A，小　40円



240÷2＝120
120÷2＝　60
240÷3＝　80　　A，　大　60
80÷2＝　40　　A，　小　40

大 大 小 小 小　＝240円　（240÷2）＝120
大 小 小 小 小　＝220円　120÷2　＝　60　　A，　大　60円
（220－60）＝160
160÷　4　＝　40　　A，　小　40円



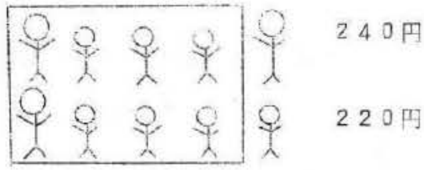
240－（220－40）＝60　A，　おとな　60円
240－（60×2）÷2＝40　A，　こども　40円

o　誤答(ロ)　—　観点「そろえる」による分類　（25名）　………　正答者は17名

a型　大 大 小 小 小　240円
例　大 小 小 小 小　220円　9名

b 型

例



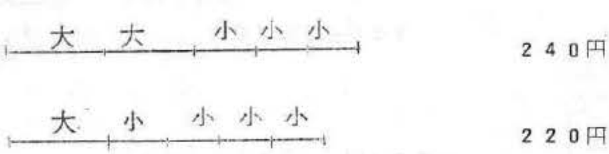
5名

c 型　図はかいているがそろえてないもの　8名

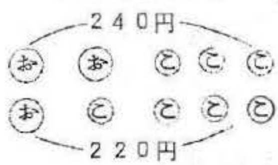
例

C_1

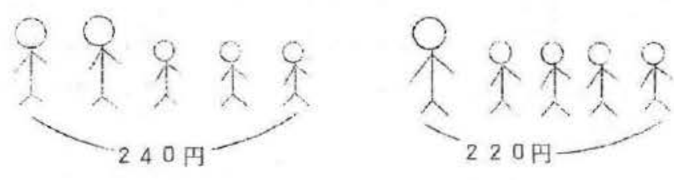
C_2



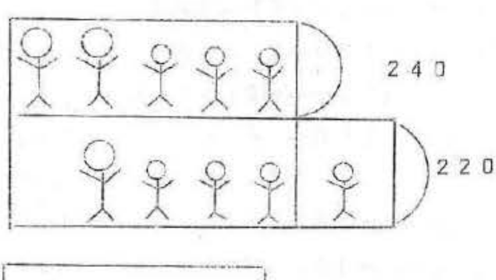
C_3



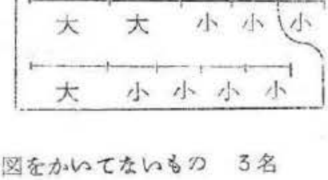
C_4



C_5



C_6



d 型　図をかいてないもの　3名

11 その考察 —— 指導後テストの応答調査を中心として

全体的にみて

解答形式を5段階に分けて書かせたのであるが，第1段階の「きいていること」第2段階の「わかっていること」に対する書きかたが一般に詳しすぎるので，かんたんに要点を書くように指導する必要がある。第3段階「もんだいの図」は，問題解決の生命であるので，じゅうぶん指導しなければならないが，一般的にいって，題意に即した図をかくこと，誰がみてもわかる図をかくこと，抽象的な図から次第に記号的なものに発展していくこと，型にはめたものでなく児童の創意工夫をこらしたものであること，等がたいせつであると思う。第4段階「式と答え」の式は，図より考えられた式であること。式には単位名はつけなくてよいが，答えには忘れずにつけること。第5段階「たしかめ」は2本，もしくは3本の式が必要なことがある。立式がちがっているため答えを式にあてはめてたしかめても，誤りが発見できないことがある。これはまちがった立式の場合である。答えを問題にあてはめてたしかめても，誤りを発見できないことがある。これは問題をまちがって解釈している場合である。各段階をとおしていえることは，無理に型にはめることなく，自由な発展を促進することである。自由な思考によってのみ思考力は高まると思われる。それにしても野ばなしでは指導にならない。模範的な図や式，考え方など，発表させたり，板書させたりして，話し合いによって自己反省したり，同僚のよいところを見ならうということがたいせつである。

次に各問題について考察する。①，④，⑦の問題は項をあらためて考察する。

②，⑤の問題 — 分配算

この問題は「そろえる」という観点ではなくて，図をかいている正答者がある。このような児童は，図をかかなくても解答できる児童ではなかろうか。導入段階においては，あるいは⑤のような複雑な問題においては，「そろえる」という観点で図をそろえてかく。余分のところ（そろわないところ）を処分して（取り除いて），のこったところをそろえるという観点と，そろわないところ（不足のところ）に加えてそろえるという観点と2つある。つまり，いづれにしても「そろえる」という観点，方法によって解決する。それには正しくそろえて図をかくことがたいせつである。⑤の問題の b 図とその式とはよく結びついているが，c 図とその式とは結びついていない。a 図ならどちらの式とも結びつくと思う。このように図と式が結びついてなくても解決できる児童は，分配算解決の原理がわかっているか，ほぼわかっている児童であろう。よくわからない児童または，導入段階においては，さきの観点で図をかき，図を操作し，解決させることとともに忘れてならないことは，その観点，方法を児童にコトバで発表させることによって原理をつかませることである。

③，⑥の問題 — 植木算

この種の問題は，問題の数値を小さくして関係のしかたをとらえることをねらいとした。この考え方は抽象的思考によるのであるが，操作的段階であるといわれる小学校5年生でも適切な指導によって効果をあげることができると思う。

③の問題の正答率は40％であるが，この40％の児童は図をかくことによって，なんらかの思考過程を経て問題を正しく解決している。この植木算においても指導しなければならない重要なコトバが2つある。ひとつはのりしろ，切れ目，つなぎ目，4ｍおき等というコトバで，これをかり

にさかい（境）というコトバで抽象化する。他のひとつはさくらの木とさくらの木の間隔，テープの長さ，まるたの厚さ等というコトバでこれをかりにあいだ（間隔）というコトバで抽象化する。しかしもっと適切なコトバがあったらそれでもよい。また，むりに抽象化しなくて，のりしろにあたるところとか，テープの長さにあたるところという表現でもよいと思う。とにかく植木算においては，この2つのコトバを指導することがたいせつであると思う。というのは，植木算はそのさかいとあいだの関係の問題であるから。⑧の問題は８０÷４＝２０であいだが２０あることになる。両側にまつの木がうえてあるのでさかいは２０－１＝１９である。このさかい１つに，１本のさくらの木をそろえて（１対１の対応）うえるのであるから，さくらの木は１９本うえられるということになる。この③の問題は両側にまつの木がうえてあるので両端のさかいは考えなくてよい。⑥のひもをつなぐ問題，第９時の③のテープをつなぐ問題も両端のさかいを考える必要はない。したがっていつもさかいはあいだより１つ少ない。この原理によって児童は立式し解決している。

③の参考答案や正答者の図式によってわかるとおり，この原理を，かんたんな場合におきかえてたしかめ，あるいはかんたんな場合におきかえて発見して複雑な問題（課題）を解いている。正答者のなかには，e図（*P* 46）のように，かんたんな場合ではなくて，全部の図をかいている児童もある。誤答者等には，このような図によって，あいだやさかいの数をかぞえること，コトバでいわれることなどの指導によって原理をわからせなければならない。

⑥の問題は正答者はわずか２名（全児童４２名）にすぎない。誤答分析によってわかるとおりつなぎ目（さかい）を正しく解釈したと思われるものは正答者も含めて１１名である。つなぎ目をのりしろのように（誤答図）誤答しているもの，小数計算の誤りなどが誤答の大部分である。この問題は１８本のひもであるからあいだは１８で，さかいは１８－１＝１７である。

12　その考察 ——未知数が２つもしくは３つの場合について

未知数が２つ，もしくは３つの場合の問題について，図を文字化して解法を次に考える。

これは，小学校５年生に図を文字化して，次に示すような方法で教えるというのではなくて，連立方程式を指導する導入段階としての意味をもたせようとするものである。

第１時の例題

おとなふたりと，こども３人のふろ代は６８円で，おとなふたりと，こどもひとりのふろ代は，４４円です。おとなとこどものふろ代は，それぞれいくらですか。

$$\begin{array}{llll}
x\,x & y\,y\,y & = & 68\text{円} \\
x\,x & y & = & 44\text{円} \\
\hline
 & & & (- \\
 & y\,y & = & 24\text{円} \\
 & y & = & 12\text{円} \\
x\,x & & = & 44-12 = 32 \\
x & & = & 16\text{円}
\end{array}$$

第１時の①の問題

大小２種類のトラックがあります。大型２台と小型３台では１４ｔまで，大型４台と小型３台では２２ｔまでのものが運べます。大型と小型のトラックには，それぞれ何トンまで積めるでしょう。

$$
\begin{array}{llcl}
xx & yyy & = & 14t \\
xxxx & yyy & = & 22t \\
\hline
\end{array} \quad (-
$$

$$
\begin{array}{llclcl}
xx & & = & 8t & & \\
x & & = & 4t & & \\
 & yyy & = & 14-4\times 2 & = & 6 \\
 & y & = & 6 \div 3 & = & 2 \\
 & y & = & & & 2t
\end{array}
$$

第９時の①の問題

みかん４個と，りんご２個の代金は１３０円です。みかん２個と，りんご２個の代金は１００円です。それぞれ１個の代金はいくらですか。

$$
\begin{array}{llcl}
xxxx & yy & = & 130\text{円} \\
xx & yy & = & 100\text{円} \\
\hline
\end{array} \quad (-
$$

$$
\begin{array}{llclcl}
xx & & = & 30\text{円} & & \\
x & & = & 15\text{円} & & \\
 & yy & = & 100-15\times 2 & = & 70 \\
 & y & = & & & 35\text{円}
\end{array}
$$

第９時の④の問題

大きなたまご１個と，小さなたまご２個の代金は３９円です。大きなたまご２個と，小さなたまご３個の代金は６６円です。それぞれ１個の代金はいくらですか。

$$
\begin{array}{llcl}
x & yy & = & 39\text{円} \\
xx & yyy & = & 66\text{円}
\end{array}
$$

この問題はこのままでは，xもyもそろえることができないので，上の式を２倍してxをそろえる。

$$
\begin{array}{llcl}
xx & yyyy & = & 78\text{円} \\
xx & yyy & = & 66\text{円} \\
\hline
\end{array} \quad (-
$$

$$
\begin{array}{llclcl}
 & y & = & 12\text{円} & & \\
xx & & = & 66-12\times 3 & = & 30 \\
x & & = & & & 15\text{円}
\end{array}
$$

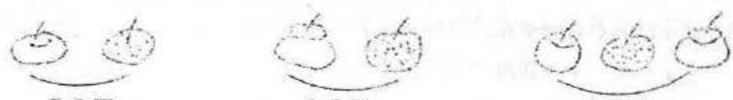
テストの①の問題

がよう紙3枚とノート2冊の代金は45円です。同じがよう紙5枚とノート2冊の代金は55円です。がよう紙1枚，ノート1冊の代金はいくらですか。（正答率78％）

$$\begin{array}{lcl} x\,x\,x \quad y\,y & = & 45円 \\ x\,x\,x\,x\,x \quad y\,y & = & 55円 \\ \hline x\,x & = & 10円 \\ x & = & 5円 \\ y\,y & = & 45-5\times3 = 30 \\ y & = & 15円 \end{array} \quad (-$$

テストの④の問題

やおやの店先に，なし，りんご，かきが下の図のように組合わされてねだんがついていました。それぞれ1このねだんはどれだけですか。（正答率64％）



50円　　　　45円　　　　65円

$$\begin{array}{lcl} x\ y & = & 50円 \\ y\ z & = & 45円 \\ x\ y\ z & = & 65円 \\ \hline z & = & 65円-50円 = 15円 \\ x & = & 65円-45円 = 20円 \\ y & = & 45円-15円 = 30円 \end{array} \quad (-$$

テストの⑦の問題

おとなふたりと，こども3人のバス代は240円です。おとなひとりと，こども4人のバス代は220円です　それぞれひとり分のバス代はいくらですか。（正答率40％）

$$\begin{array}{lcl} x\,x \quad y\,y\,y & = & 240円 \\ x \quad y\,y\,y\,y & = & 220円 \end{array}$$

この問題はこのままでは，xもyもそろえることができないので，下の式を2倍してxをそろえる。

$$
\begin{array}{llll}
xx\ \ yyy & = 240\text{円} & & \\
xx\ \ yyyyyyyy & = 440\text{円} & & \\
\hline
 & & & (- \\
yyyyy & = 200\text{円} & & \\
y & = 200\text{円} \div 5 & = 40\text{円} & \\
xx & = 240-40\times 3 & = 120 & \\
x & = & & 60\text{円}
\end{array}
$$

以上のように，未知数が2つまたは3つの場合の問題について，図を文字であらわして解法を考えた。なおこれを簡素化すると⑦の問題の解法は次のようになる。

$$
\begin{array}{ll|ll}
xx\ \ yyy & = 240\text{円} & 2x\ \ 3y & = 240\text{円} \\
xx\ \ yyyyyyyy & = 440\text{円} & 2x\ \ 8y & = 440\text{円} \\
\hline
 & (- & & (- \\
yyyyy & = 200\text{円} & 5y & = 200\text{円} \\
y & = 40\text{円} & y & = 40\text{円} \\
xx & = 120\text{円} & 2x & = 120\text{円} \\
x & = 60\text{円} & x & = 60\text{円}
\end{array}
$$

未知数が2つまたは3つの場合の問題は，実践例やこれまでの考察によってわかるとおり，明らかに連立方程式の問題である。未知数が2つの場合は2元1次連立方程式，未知数が3つの場合は3元1次連立方程式である。したがってこれまでの考察によって**連立方程式を指導段階によってわけると**次の4段階になる。

第1段階　象徴的な図によって解く段階

第2段階　記号的な図によって解く段階

第3段階　文字によって解く段階

— さきの7つの問題の解き方のようにして

第4段階　連立方程式として解く段階

— この段階は現在の中学校2年生の教材であって，解きかたとしては消去法や代入法によっている。未知数に係数が加わり（ax，by 等の a，b），数量関係が複雑になるので，式に＋，－等の記号がつかわれる。

このような段階をこまかく順序だてて連立方程式を指導することによって，　連立方程式は容易に児童，生徒にわからせることができるであろう。したがって将来，新しく連立方程式の指導体系を計画する場合，この4段階は重要な参考になると思う。

小学校5年生のこの問題解決には，「そろえる」（対応させる）という観点と方法（操作）が効果的であり，それはまったく，中学校2年生のこの種の問題の解き方の消去法と同一の観点である。一

般的に適用され，また上級の数学にも役立つ観点ほど有効な観点であり，このようにすぐれた観点を生徒の身につけさせることがたいせつなのである。それでこのような問題（未知数が2つもしくはは3つある問題ーかりにこれを小学校5年生の連立方程式の問題という。）を解く観点 —「そろえる」に児童はどのような誤りをおかすか，どのような指導上の注意が必要であるか，テストの応答分析によって考察してみる。さきの7つの問題には2元1次式と3元1次式があるが，3元1次式は多少の複雑さがあっても観点のたてかたにおいては，2元1次式の場合と質的に異ならないように考えられるので，2元1次式の場合を分析してみる。

2元1次式は，さきの問題を分類すると次の2種類になる。

単純型 $\begin{cases} ax+by = m \\ ax+dy = n \end{cases}$　　複雑型 $\begin{cases} ax+by = m \\ cx+dy = n \end{cases}$

単純型はxまたはyの係数のどちらかが等しい型，複雑型はx，yのどちらの係数も異なる型である。第1時の例題，①，第9時の①，テストの①，④の問題は単純型であり，第9時の④，テストの⑦の問題は複雑型である。ただしこの複雑型の問題でもどちらかの式を2倍すれば，未知数をそろえる（等しくする）ことのできるもっとも簡単な場合のみである。$\begin{cases} 2x+3y=a \\ 3x+5y=b \end{cases}$ のような問題は，両方の式を何倍かしないとxの係数がそろわない（等しくならない）ので困難な問題である。したがって，単純型の問題は，どちらの式も何倍かする必要はなく，未知の数のどちらかをそろえようとすれば，正しくそろえることができるのであるが，複雑型の問題は，どちらかの式か，または両方の式を何倍かしなければ，そろえることのできない問題である。

単純型の問題は観点をよく指導すれば授業時間中でもよくわかるし，またテストの正答率も高い。図を正しく整頓しそろえてかくこと，図をみて図のとおり立式することがたいせつであり，誤答者は多く図をそろえてかいてない（対応させてない。）。ただ図を象徴的にこまかくかきすぎるので漸次むりなく記号的（文字ではない）にかかせる指導も重要である。この問題は児童が非常に興味をもって解決にあたるが，すぐれた観点を教えることの重要さがよくわかる。複雑型の問題になると児童の思考はゆきづまってしまうが，そろえるということを強調しながら教えるとなるほどと驚嘆して次の問題からはわかってくる。もっとも複雑な問題といっても小学校5年程度では

$\begin{cases} x+2y = 39\text{円} \\ 2x+3y = 66\text{円} \end{cases}$　　$\begin{cases} 2x+3y = 240\text{円} \\ x+4y = 220\text{円} \end{cases}$　（正答率40％）

のような問題であって，どちらかの式を2倍すればxの係数をそろえることのできる問題である。

しかし優秀児は $\begin{cases} 2x+3y=a \\ 3x+5y=b \end{cases}$ のような問題（どちらの式も何倍かしなければxの係数が等しくならない問題）でもそろえるという観点によって解決方法を発見した。

次にこの複雑な問題の誤答分析によって，指導上の留意点を述べる。

⑦の問題 — 誤答㊀（P_{51}）

a型　そろえるというのは，おとなはおとなと，こどもはこどもと，整頓してならべることであることをよく知っているため，こどもひとりと，おとなひとりがはみでてそろえる

ことができなくて思考がゆきづまったもの，単純型の観点よりぬけでることができない。（９名）単純型の問題の観点とは，未知数のどちらかをそのまま（何倍もしなくて）そろえることであり，複雑型の問題の観点とは，どちらかの式を何倍かして未知数をそろえる（等しくする。）のである。

b型　正しくそろえるということはわかっていても，a型のゆきづまりを打開するため，ついに，おとなとこどもをそろえている。（５名）複雑型のときの方法を適用することのできないことはa型と同じ。

c型 ― 図はかいているが，そろえていないもの（８名）

複雑型になるとc型は多くなる。とくにc_3型は初めからおとなもこどもも差別なくそろえている。これはそろえたことにならない。がよう紙とがよう紙をそろえ，ノートはノートとそろえる。大きなたまごと大きなたまごをそろえ，小さなたまごと小さなたまごをそろえる。いいかえれば同じ種類のものをそろえることになる。つまり何をそろえるのかという一般化ができない。同種のものをそろえるというコトバによる表現が重要であると思われる。単純型の問題においても正しくそろえることのできない児童もあるので，このような児童には図を正しくそろえて書くことの意味をわからせる指導がたいせつであることはいうまでもない。

⑦の問題 ― 誤答④（P５０）

これは答えは合っているが式のちがっているものが８名もいた。これらの児童の図はいづれも正しくない。意味の不明の計算で１つの未知数を算出して偶然正しい答えをみつけることができれば，他の未知数は容易に正しく算出できる。答えを問題にあてはめてたしかめても正しいことになる。これは，式を調査しても思考過程はよくわからないが，複雑型の問題であるため試行錯誤か，あるいはかん（勘）によって答えをみつけ，逆に式を考えたものもあると思う。複雑な問題になると自分でも意味のわからない立式や計算をやっている児童生徒がよくあるものである。

正答の分類（P５０）

いずれにしても正しい図をかいているものは正答であるが，（８名），図が正しくなくても，立式が正しくて正答のものが９名もある。これは題意をそのまま図解し，操作は頭のなかで行ない，立式したものと思われる。このように図解しなくて問題解決できることが理想であろう。ただし図をかくことを要求されたとき正しい図解ができるようでなければほんとうにわかったとはいえない。

Ⅲ　中三の学習指導の実践例とその考察

―― コトバの指導を中心とした研究 ――

1 **学年**　中学校第３学年（男女共学）　５０名

2 **日時**　昭和３８年１１月１９日（火）第３限（１０時５０分より１１時３７分まで）

3 **教材**　円　（中学数学３必修選択用実教出版株式会社）

4 **指導のねらい**

円についての性質と，これから類推される球の性質を直観的論証的に扱い，それによって図形に対する直観力や論証の能力をいっそう伸ばすとともに論理の過程を正確に表現する能力を養う。

5 **指導計画**　〔２４時間〕

(1) 直線と円〔５時間〕
- 円の弦
- 円と直線の位置関係

(2) 中心角と円周角〔８時間〕
- 弧と中心角
- 円周角
- 接線と弦との間の角

(3) 内接円と外接円〔４時間〕
- 円の接線
- 内接円と外接円（本時はこの第１次）

(4) ２つの円〔３時間〕
- ２つの円の位置関係
- ２つの球の位置関係
- 共通接線

(5) まとめ，問題練習，評価〔４時間〕

6 **本時の計画**

(1) 題　目　"内心と外心"（本時はこの第１次）

(2) ねらい　図形の論証指導でつまずく要因は概してはじめの導入段階での指導の不徹底によると思われるものが意外に多い。その中でも特に用語の定義がじゅうぶん身についてなく，数学用語を扱った文章が理解できないことに起因していることがみられる。それらの観点にたってここに三角形の"内心と外心"を題材として用語を図を通して理解させ，定着させようとするものである。

(3) 展　開

学習内容	指導上の留意点	備考
○三角形の重心について復習する。 ・かってな三角形を１つかいて中線を引く。 中線というコトバの定義をかいてみる。自分のかいた定義が正しいかどうか，いろいろ話し合ってたしかめる。 ・１つの三角形に何本の中線が引けるか考え，この三角形に引いてみる。	・はじめから重心というコトバをださずにだんだんと思いだすようにさせたい。 ・かってなというコトバの意味も復習しておきたい。 ・中線の定義の中には当然中点というコトバもでてくるので，このコトバも正しく認識させ，理解を深めておかねばならない。	本時の指導に関係のある既習の用語 角の二等分線 中点 垂線 垂直二等分線 垂線をおろす 垂線をたてる

学習内容	指導上の留意点	備考
・3本の中線は1点で交わることをたしかめ，この交点の名称が重心であったことを思いだす。 ・重心の定義をかいてみる。 ・重心についての復習	・中線の引き方はコンパスを使ってもまたは，目盛りを使ってもよいと思う。	距離 { 点と点間 点と直線間 平行線間 } かってな
○内心について学習する。 ・かってな円を1つかいてこの円に外接する三角形を1つかく。 ・この円をこの三角形の内接円の中心であることから内心というコトバを理解する ・この三角形の頂点と円の中心（内心）を結ぶ線分をひく。	・円の接線の引き方は，コンパスと定木による作図のしかたも既習であるがここでは，三角定木の直角を用いてもよいことを指示する。 ・かってな三角形においては，中線と頂角の二等分線は必ずしも一致しないことを確認させて重心と内心の違いを理解させたい。	証明 基本性質 定理 定義 補助線 仮定 結論 中線
・この線分が頂角の二等分線であることを発見する。 ・たしかに頂角の二等分線になっていることを直観だけにたよらず，また分度器による測定だけにたよらず，既習の定理ではっきりさせる。	・「円外の1点からその円に引いた2本の接線の間の角は，その点と円の中心とを結ぶ直線によって2等分される」ことを思いださせ，頂角の二等分線の交点と内接円の中心が一致することを理解させる。	重心 円の接線 内接する 外接する
・内心の定義をコトバでいいあらわしてみる。（頂角の二等分線の交点） ・かってな三角形をかき内心を求め，内接円をかく。 ・この円が内接円であることの証明を次の時間まで考えてくる。	・三角形の中線は1点で交ったが頂角の二等分線も1点で交わることを対比して理解させたい。	

(4) 備考

次の別紙プリントに記入させながら指導を展開していく。

別紙プリント

三角形の内心

自分の考え

○かってな三角形を1つかいて中線を引いてみよう。

○中線の定義をかいてみよう。

正しい結果

中線とは

○ 1つの三角形には，何本の中線が引けるだろうか。

○これらの中線は，どうなっていたか思いだしてみよう。

○この点を[　　　]というのであった。

○では　この[　　　]の（定義）をかいてみよう。

重心とは

○このように三角形の中に，できる特別な点が，まだ，ほかにもないか考えてみよう。

○かってな円をかいて，この円に　外接する三角形をかいてみよう。

○この円は，この三角形に，どうなっているといえばよいだろうか。

○そうすると，この円の中心は何といえばよいだろう。

○この三角形の頂点と円の中心を結んでみよう。この直線は何という直線になっているだろうか。

内心とは

○このことは，前に学習した，どんな定理を用いればはっきりするだろうか。

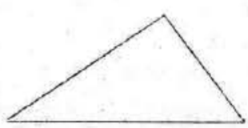
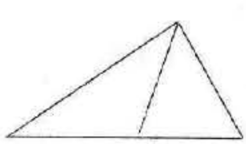
○これで三角形の内心の定義をどのようにいえばよいことがわかるか。

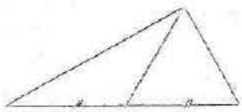
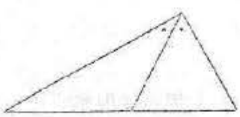
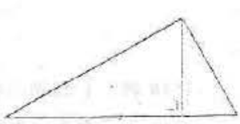
○かってな三角形をかき，内心を求めて，内接円をかいてみよう。

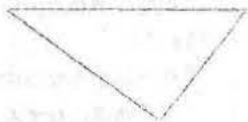
○この円が，たしかに三角形に内接していることを証明するにはどうしたらよいだろうか。

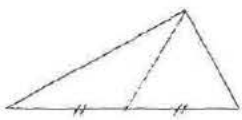
この次の時間までに考えてこよう。

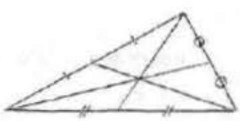
7. 指導過程

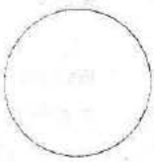
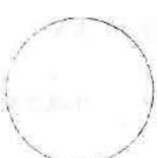
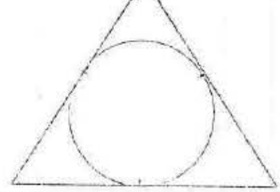
時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
0		・きょうは自分の考えをかいてください。	
		・ハイ，それでは道具ありますか，三角定規，コンパス。分度器はむりになくてもよいですけれど，	
		・これから三角形の内心について勉強するんですけれども，そのまえに三角形のいろいろの心があったわけですが，まえに習ったいろいろの心を復習するわけです。	
		・それでプリントの点線でかこんであるところに自分でかってな三角形をまずかきなさい。	
		・点線でかこんであるところですよ。自分のかってな三角形ですから，かってな三角形ですから何でもいいわけです。	
			（生徒は用紙にかってな三角形を書く）
		・かってな三角形できましたか。その三角形の中に１本だけ，１本だけ中線をひいてください。	（生徒は，各自中線をひく）
		・かってな三角形かきました？	
		・さあ，ひきましたか。中線，	
		・ひけない人もあるかもしれませんがとにかく，これが中線だと思うのをひいてください。	
		・とにかく自分でひけた人？	
		・ひけた人？	（約半数　挙手）
		・まだわからなくてひけない人？	（数人挙手，ひかない生徒まだ多数いる。）
	（再掲）	・ハイ，それではここでひとりひいてもらいましょう。さあ　きょうは，きょうは何日だっけ，１９日，ハイ男子の１９番，さあひいてください。何でもいいです。	・P10君（教師の板書してある三角形に中線をかく，目盛りを使って中点をみつける。）
5		・どうせひくんだからきれいにかきこんでください。だめですか，	
		・コンパスを使わなくてひいた人	（数人　挙手）
		・コンパスを使わなくてもひけるそう	

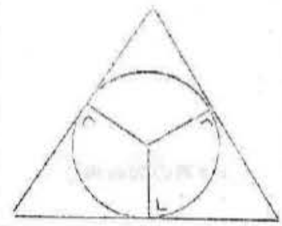
時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		です。三角定規をこうして目盛りがかいてあるからこうして，目盛りの半分，目盛りの中点，それをこう使えばこれを中心といいます。1本でいいですよ。	
		・ハイ， （教師コンパスを使って中線をかく）	
		・いまみたいにコンパスを使ってこんなふうにひいた人，	（10人程度　挙手）
		・ハイ，わかりました。	
		・目盛りを使ってもよいでしょう。目盛りの半分，中点，これを中点といいましょう。もっと別のことをやった人，えんりょしなくて手をあげてください。ほかの組でこれをやったらいろいろな人がいたんです。	
		・これを紹介しておきましょう。 みんながかいたのどれです。 左のこれ（正しくかいた図）ですか中線，こんなのを（左図）かいた人もいたんです。これは中線でなかったら何といいますか。	
		・ハイ，19番の女の人，	・P_{19}さん（黙）
		・これ何といいます，これ，？	・P_{19}さん　二等分線
		・二等分線	
		・三角形の，三角形の何の二等分線？	・P_{19}さん　頂角
		・角の二等分線ですね，中線ではないですね。	
		・たしかめる（中線かどうか）にはどうしたらよいですか。	・P　長さをはかってみればいい
		・長さをはかってみればいいですね，ここのところを，ここのところをこうやって，（二等分された線をコンパスではかる。）	
		・それではその次，こんなふうにかいた人もいますね。これはいったい何というなまえでしょう。	・P　垂線
		・垂線，頂点からこの辺，頂点からこの辺，対辺に垂線	
		・これ（左の下図）は何でしょう。	・P　垂直二等分線
		・なんの？	・P　底辺

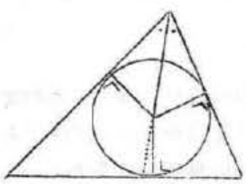
時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
10		・底辺ですか，これは底辺で，これは斜辺ですか，これは？　一般の三角形は，底辺とか斜辺といいませんから，これは1辺の何でしょう。 それでよさそうですね。	・P　垂直二等分線
		・中線とはどういうコトバであらわしたらいいか，定義というのがプリントに書いてあります。自分の考えをかけばいいのですよ。ひとのかいたのをまねしてもだめなんです。	(生徒は用紙に，自分の考えで中線の定義をかく。)
		・三角形の中線とは，どうあらわしたらよいか，三角形の中線とは …… …………………… (教師　机間巡視)	(生徒作業)
		・とにかく自分の考えをかけた人？	(4，5人挙手)
		・黒板に出てかいてみようと思う人，誰でもいいですよ。	(挙手なし)
		何でもいいからかいてみようと思う人，まちがってもいいから，	(挙手　3人)
		・自分の考えを人にこうと教えるわけです。	
		・ハイ	・P_1君　板書 (頂点と対辺の中点を結ぶ線分)
	頂点と対辺の中点を結ぶ線分(P1君の板書)	・まだ別のコトバでかいた人？	
		・P_2さん	・P_2さん　(黙)
		・女子の9番の人，自分のかいたのを読んでみてください。	・P_9さん 三角形の頂点と，その対辺の中点とを結ぶ線分とかきました。
15	三角形の頂点と，その対辺の中点を結ぶ線分(P9さん)	・ハイ，それでは10番の男子，どうかきました。	・P_{10}さん　わかりませんでした。
		・わかりませんでした。ハイ，かけなかった人？	(多数)
		・ハイ，10番の女子の人はどうかきました。	・P_{10}さん 三角形の頂点と辺の半分の中心のところを垂直にむすんだ直線
		・ハイ，いろいろありましたね。まだほかにある人，ありません？P10さ	

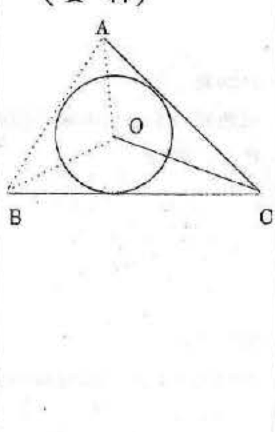
時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		ん，もう1回，	・P_{10}さん 三角形の頂点と………
	三角形の頂点と辺の半分の中心のところを垂直にむすんだ直線（P_{10}さん）	・それから読んでみてください。	・P_{10}さん 頂点と辺の半分の中心のところを垂直にむすんだ直線
		・（P1君の板書を指して）頂点と対辺この人（P_9さんの板書）は，頂点とその対辺，	
	（再　掲）	・そのというのはどのことです？ ・そのというのはこれですね，	
		・P_{10}さんは，対辺といわなくて何といった？	・P　1辺，辺の
		（P_9さん の板書を指して） 辺の半分の中心のところを垂直に結んだ直線， ・まだいろいろありますか， ・（P_1君の板書を指して）頂点と，ここのところです，対辺というのは ・その人（P_9さん の板書）は，頂点とその対辺 ・そのというのはどのことです？ ・この（頂点の対辺を指して） ・この頂点の対辺の中点をむすぶ ・（P_{10}さん の板書）三角形の頂点と辺の半分，この辺のこともあるし，この辺の半分もあります。垂直に，いつも垂直になりますか？	
		・ならないこともあるし，なることもありますね。どんな場合になります	・P　二等辺三角形
		・または，	・P　正三角形
		・これは（垂直ということ）はっきりいわれないから，正しいところをとると，三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分（P_9 さんのもの）とこんなふうにかいた人，	（挙手　10人）
		・ハイ，わかりました。それで中線がはっきりしましたが，三角形のなかに1本しかひきませんでしたが，中線はまだ1本しかひかなかったけれども，まだひけそうです。さっきみたいにコンパスを使ってもいいし，目盛りを使ってもいいです。	・P　何本ひくんですか？
		・あるだけ，あるだけひくんです。図	

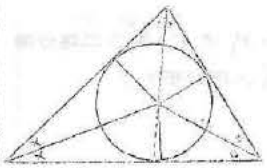
時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
20		はできるだけ正確に。 （机間巡視）	（生徒作業）
		・できのわるいコンパスも使いかたによっては正確になります。	
		・3本ひきましたか？	
		・あるだけひけといいましたが，何本ひきました。	・P　3本
		・全部，3本こうはっきりひいたと思いますが，ひいた3本の中線はいったいどうなりました。？	・P　1点で交わりました。
		・1点で交わりました。3本の中線が1点で交わりました。	
		・この点を？	
		・まえにならったおぼえがあるでしょう。いつならいました？	・P　2年生
		・2年生のとき，ハイ，何とならいました？	・P　重心
		・この点を重心，重心，	
		・どんな字をかくんだったろう。	・P　重いという字
	重　心	・重いという字に，	・P　こころ
		・重心	
		・どうして重心というのでしょう？	
		・なんの中心なんでしょう？	
		・なんの中心？	・P　重さの中心
		・重さの中心，重さの中心，	
		・この場所でささえると，全部質と量が一定ならば水平になりますね，質量が一定ならば水平になりますね。こういうのを重心というんです。ここまでは復習ですよ。	
		・それでプリントに記入してもらいましょう。	
		・1つの三角形には，何本の中線が引けるだろうか？	・P　3本
		・これらの中線はどうなっていたか思いだしてみよう。	・P　1点で交わる。
		・1点で交わった。	
		・この点を	・P　重心
		・重心というのであった。	
		・ではこの重心の定義をかいてみよう。	
		・重さの中心のことであり，3本の中線の交わったところ，3本の中線の	

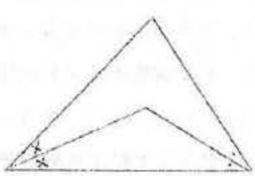
時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		交点を重心という。かんたんにかけそうなので点線のところにかいてください。	
25	三角形の3つの中線の交点		
		・さあ，ほかに三角形のなかにほかの意味の中心があるかもしれませんので，そのなかの1つをこれからやるんですけれども，こんどは，今まで円を使っていましたので円という武器を使います。円を使って別の何かの中心をさがします。 ・こんどは三角形をかかないでかってな円を書いてもらいます。あんまり大きくすると，はみだしますからこの程度の，かってな円をひとつかいてください。あんまり大きくないほうがいいですよ。 （机間巡視をしながら注意）	（生徒作業 ―― プリントに円をかく。）
		・そうしたらその円に外接する三角形外接する三角形というのは1年生のときあったのですよ，円に，円に外接する三角形，外側から接する三角形，できるだけ正確にかいてください，どこで接してもいいです。外接三角形，外側から接する三角形， ・さあ，いいかげんに接する三角形ではだめですよ，たしかに外から接するということがわかるように， ・いろいろ考えてもらいたいんですが外側から接する三角形も自分のすきなかってな三角形です。さあかいた人，外接三角形　？	（生徒作業 ――外接三角形をかく） （大部分挙手）
		・どうでしょう，ここにでてかいてください。外接三角形， ・P3君 ・かいてしまった人は，1つの接点をかいてください，1個所あるはずです。接点をかいてください。それから，これが気にいらなかったらもう1個所かいてもいいですよ。自分の思うとおりにかいてください。	・P3君　（板書） 

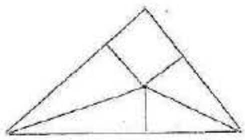
時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
30		・ハイ，どうしてきめました？ ・P_3 さん ・接点を正確にきめるとき，どうしてきめたらいいか，P3 さん，ここにきてかいてください。 ・接線は接点を通る半径に垂直である ・外接三角形ができました。 さあ，これは外接三角形といいます。外側から接するから， ・いまかいたこの三角形，初めからあるのは円の方です。円の方はこの三角形に対してどうなっていると思うか？ ・プリントに書いてください。 ・この円はこの三角形に（P3君の板書を指して）どうなっているといえるか，どうなっているといえばよいか。 ・三角形は円の外側から接しますから外接三角形，円の方は，ハイ，まえから3番め， ・ハイ，いいですか，内接している，こうかいた人？ ・円の方は内接している，内側から内接しているという状態です。 ・内接している円ですからこの円に名	・P_3 さん 中心と円周上の点をむすんだ。 （一部分再掲）  （接線のひき方　三角定規の直角をつかって中心より辺に垂線をおろす） （生徒はプリントに記入……大部分，内接しているとかく） ・P　内接している。 ・P_4 君 内接している。 （大部分挙手）

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		まえをつけたいと思います，ハイ，	・P_4さん　内接円
	内接円	・内接円ですね。この円の中心は何といえばいいだろうか，内接円の中心だから，内接円の中心だから	・P　内心
	内心	・さっきの重心は重さの中心だから重心，内接円の中心だから内心	
	（P3君の図再掲） 	・今，これを円の上に三角形を書いたのですから中心が見つかりますけれども，三角形があって内心を見つけるのはたいへんです。これからそれを見つけるのです。けれども，この中心と頂点を１本だけ結んでみてください。この頂点がいやだったら，どの頂点でもいいですよ，自分のすきなところへ。	（生徒作業）
		とののをまっすぐのばしてみてください。まっすぐのばしました。ちょうど，垂線になった人もあるかもしれません。すこしはずれた人もあるかもしれません，かさなった人?	（数人　挙手）
		・はずれた人?	（大部分挙手）
		・必ずしも垂線になりそうもありません。	
35		・これが，中線であるかどうか，三角定規でもいいです，コンパスでもいいです，この対辺と交わったところの両方をはかってみてください。	（生徒作業　対辺の長さを２等分するか，どうか，すなわち，中線であるかどうか，しらべる。）
		・ちがうようですか，同じ人もありますか，同じ人もあるかもしれません。	
		（教師机間巡視しながら生徒の測定をたしかめる。）	
		・ちがう人が多いようです。必ずしも中線になるとは限らない。	
		・この三角形の頂点と円の中心を結んだのですね。この直線はなんという名まえの直線になっているだろう。	
		・中線でもなさそうです。垂線でもなさそうです。こうやってくると何らしいか，そこにかきこんでください。	
		・さっきやりましたいろんな線がありました。	（生徒はプリントに記入）
		・かきましたか?	

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		・かけた人？	（大部分挙手）
		・何線になりました，かいた人……	・P_5 さん　角の二等分線
		・二等分線とかいた人？	（大部分挙手）
		・ハイ，二等分線であって中線ではない。二等分線であるかどうか，しらべる方法は？	・P　コンパス
		・コンパス？ ・そうですね。分度器ではかる方法もあります。そんな幼稚なことのきらいな人はどうすればよいか？ ・さあ，どうすればよいか？	・P　合同
		・合同？ ・ならったでしょう。このまえの時間に，	・P　定理
		・定理？　どんな定理があったか。定理何番などと番号などいわなくてもどんな定理があったか？	・P　（？）
	（資　料）  	・この辺は全部どうなっています。接線ですね。なにか接線の定理があったですね。 ・接線では，この円の外側にある点から接線をひくと，その点と中心を結ぶ直線は，この角を2等分するというのがあったようです。おぼえていますか。 （資　料　提　示） （左図について説明）この円のこの点（C），円外の点とはどの点ですか，どこでもいいですよ。（AでもBでもよい） ・この円外の点から接線は何本？	・P　2本
		・接線が2本，この点（C）と中心を結ぶ直線は，この接線の間の角（∠ACB）を2等分する。というのがあったでしょう。 ・このコトバをかいてもらいたいんですが，時間がありませんからあとでかいておいてください。 ・まだひけそうですね。 ・この点と各頂点を結んでください。 ・各頂点を結びました。これは全部円	

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
	(P_3君の図再掲)	外の1点です。	
40		・(P3君の図を指して)この角(・)は等しく,この角(×)とこの角(×)も等しく,同じようにここ(○,○)も等しいということがわかりましたから,中線の交点は重心でしたけれども,内接円の中心は内心といいました。内心とは,この線とこの線とこの線の交わったところです。	
		・内心とはどう定義したらよいか,それをかいてもらいたいです。これで三角形の内心の定義はどのようにいえばよいことがわかるか,かきこんでください。	
		・内心とは,三角形の内接円の中心です。しかもそれはこういう3本の線の交わったところになる。そうすると重心とは中線の交点といったように,内心とは,何の何といったらよいか。	(生　徒　作　業)
		…………………………………	
		・さあ,どうでしょう。かけた人? かけた人?	
		・いってもらいたいのですけれども,出て書いてみようと思う人?	(なし)
		・じゃ,そこでいってもらいましょうハイ,20番の男子,そこで読んでください。	・P20君 三角形の3辺の中線の交点
		・それは何というのですか。	・P　　重心
		・重心をいうつもりだったでしょうか三角形の中線の交点は重心,重心だったでしょう。	
		・いま,いってもらいたいのは内心なんです。ハイ,	・P6さん 三角形の角の二等分線の交わった交点
	三角形の角の二等分線の交点	・交わった交点?	
		・交わった点,はやくいえば,交点,ハイ,ほかに?	・P　　中心
		・交わった中心?	

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		・中心にもいろいろあるんですよ，重さの中心，いまは，内接円の中心	
		・どうもこれはちがうようです。	
		・ハイ，またほかにいってもらいましょう。女子の20番，どう書きました？	・P20さん 外接三角形の3本の等角二等分線の交わったところ。
		・ああ，なるほど，角の二等分線といわなくて等角二等分線というのも，交わっているのもあります。ハイ，	・P7君 頂角の二等分線の
	頂角の二等分線の交点	・の何ですか？	・P7君　交点
		・交わった点でもいいですが，交点と書くとみじかくていいね。これが内心です。 内心というのは，三角形の内接円の中心のことで，重心とはちがうようです。重心は中線の交わったところ内心は内角の二等分線の交わったところです。	
45		・そうするといま，円をかいて外接三角形をかいたらこうなったんですけれども，それでは初めから三角形があって，自分のすきなかってな三角形があって，この内心をもとめる，どうすればいいか？	
		・どうすればいいです？	・P　円をかく
		・どうして円をかく？	・P　頂角を2等分して
		・（左図のように板書しながら）こう2等分して，こう2等分して，そうすると交わりますね。もう1つかく必要はありますか？	
		・この交わった点を，そこから垂線をおろす。垂直におろしますか，垂線をおろして，それでこの長さを半径として，こう円をかくと内接円ができそうですか？	
		・内接円はひとつですか？	
		・この次まで，しらべてきてもらいたいところがあるんですが，いまいったところで，三角形があるとします	

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		2つの角を2等分して結びます。いまいったように垂線をおろして，これを半径として円をかきます。たしかにこれは内接円になっているかどうかということを，何すればいいでしょう?	・P　証明すればいいです。
		・それには何を証明すればいいかというと，この垂線と，この垂線と，この垂線とみんな等しいことを証明すればいいですね。この証明方法を書いてくること。証明するのをこの次まで考えてくること。	
		・そうするときょうやったことは，重心は復習です。勉強したのは新しい内心です。重心は重さの中心であったように，内心というのは，三角形に内接する円の中心のことです。これはたまたま，角の二等分線の交わったところになっています。	
		・それではこの次の時間には，内接することを証明するにはどうすればいいかやります。	
47		おわり。	

8. その考察

この授業は指導のねらいにも明らかなように，数学用語の理解，定着を図を通して徹底させようとしたものである。コトバの指導は国語科の最も重要な任務であろうが，算数，数学科においても，コトバの指導は重要と考えられる。特に中学校の論証指導にはその感を強くする。まず別紙プリントに生徒が自由に回答したものをそのまま次にかかげる。

教科書では中線の定義を「三角形で，ひとつの頂点と，これに対する辺の中点とを結ぶ直線をその三角形の中線という。」と述べている。

生徒の回答の主なもの ——— 中線の定義

三角形の頂点と対辺の中点をむすぶ線分

○三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分

ひとつの頂点とそれに対する辺の中点とを結ぶ線分

三角形のひとつの角とこれに対する辺の中点とを結んだ線分

ひとつの頂点とその対辺の中点とを結ぶ線分

×三角形のひとつの角から対辺を結んで2等分する線

ある頂点からその対辺の中点に引いた線分

×三角形の1辺を2等分する線分

×三角形の頂点と対辺を結ぶ線分

三角形の頂点とその対辺の中点にひいた線分

1辺の中点と頂点を結んだ線分

三角形のある角とその角の対辺の中点を結んだ線分

上の角と対辺の中点は線分である

1辺を半分にして頂点を結ぶもの

×頂点とその対辺の二等分線とを結ぶ線分

×中線とは1辺の半分の中心を垂直にして線をひいたところ

×辺の二等分線

対辺の中点と頂点を結ぶ線分

頂点のひとつと対辺の中点とを結んだもの

×三角形の中点を通る直線

三角形でひとつの頂点とこれに対応する中点を結ぶ直線

三角形の重心については，教科書は，「三角形の3つの中線は1点を通る。この点をこの三角形の重心という。」と書いてある。

生徒の回答の主なもの　　　　重心の定義

中線が交わったもの

重さの中心のことであり，三角形の3本の中線の交わった所

3本の中線の交わった重心

重さの中心

中線が交わったところ

○三角形の3本の中線の交わった点（重さの中心）

重心とは中線の重なりあった1点

×3つの線分の交わった点

×三角形の辺の中線の交わった点

1つの三角形において3本の中線の交わった1点

○三角形の3つの中線は1点を通る。この点を重心という。

以上は，中線や重心の定義を生徒なりに書きコトバによって表現したものである。なかには正しいものあり，不じゅうぶんのものあり，ちがっているものもある。これらは，できるだけ生徒の表現を尊重して，教科書の定義の表現にとらわれずに訂正する必要がある。定義や定理を生徒に自由にいわせたり書かせたりすると，いつもこのように種々雑多な表現になるが，生徒には，自分の既有知識を自由に発表することによって，誤りをさとり，これを正す体験が貴重なのである。

この授業は，数学用語の理解，定着を図を通して徹底させようとしたのであるが，中線や重心のような数学用語は，まず図を正しくかけること，つぎに，話しコトバで正しく表現できること，第3に，文章で正しく書けることとの3つがたいせつである。しかし話しコトバや書きコトバで正しく表現できたとしても定義のまる暗記であっては，生きた知識として働かない。図形と結びついたコトバでなければならない。したがって，実践例の授業のとおり，中線や重心のような定義を理解・定着させるためには，まず，図形を正しくかかせ，それらの図形と関係づけ，生徒の表現を尊重しながら，生徒の表現の不じ

ゅうぶんなところは補い，誤りは正していく概念形成の指導が重要である。このようにして初めて，中線や重心という数学用語の定義が正しく理解され，ながく定着するものと思う。

これまでの算数・数学科の授業では，このようなコトバの指導がおろそかにされてきたように思われる。特に中学校の数学科，なかでも論証幾何の授業においては，よく意味が把握されていないコトバが，多くつかわれているように思う。この実践例のようなコトバの指導は，算数・数学科においても重要なことと思う。

参考事項

・概念はコトバのなかに現われるので教授が正しく行なわれる場合，生徒たちはコトバ――用語，概念の定義，規則など正しく記銘したり再生したりすることができる。②

・定義というものは，通俗的な考え方とは反対に物事についてわれわれに何も説明するものではない。それはただ人々の言語的習慣を述べるだけである。すなわち，定義はいかなる条件のもとで人々がいかなる音声を発するかを説明するだけである。③（注…用語の対象や操作を示さなければならないこと）

Ⅲ　中二の学習指導の実践例とその考察

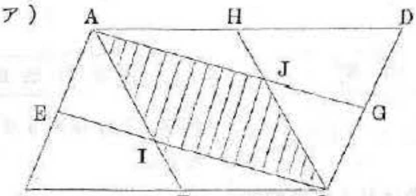
——論証教材の基礎的知識の構造化を中心とした研究——

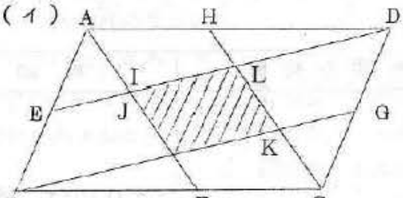
1 学　年　中学校第２学年（男女共学）　５０名

2 日　時　昭和３９年１月２３日（木）第６限（１３時４０分より１４時５０分まで）

3 教　材　平行四辺形の練習問題（中学数学２ー実教）

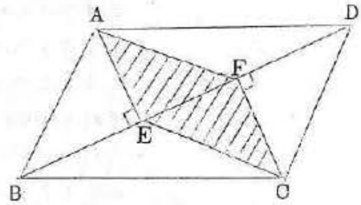
① 下の（ア），（イ）の図の平行四辺形ＡＢＣＤでＥ，Ｆ，Ｇ，Ｈは各辺の中点である。斜線を引いた図形が平行四辺形になることを証明せよ。（同教科書Ｐ１７７の５番）





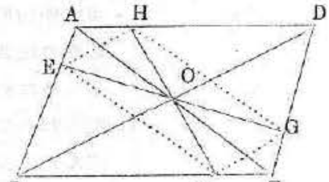
② 右の図のように，平行四辺形ＡＢＣＤの対角線ＢＤにＡ，Ｃから垂線を引いてその足をＥ，Ｆとすれば，四角形ＡＥＣＦは平行四辺形になることを証明せよ。

（同教科書Ｐ１７８の３番）



③ 平行四辺形ＡＢＣＤの対角線の交点Ｏを通る２つの直線を引き，平行四辺形の４つの辺と右の図のように，Ｅ，Ｇ，Ｈ，Ｆで交わらせる。Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈを結べば平行四辺形になることを証明せよ。

（同教科書Ｐ１７８の４番）



4 指導のねらい

- 数学的思考の観点，数学的思考の方法を身につけさせ，教材の構造化をはかる。
- 数学的思考の観点　　既有の経験をどう役立てたらよいかと考える。

　　「………についていったいどんな定理があったろうか」④
- 数学的思考の方法　　解析的方法（上からの方法）によっての考え方

　　予想—試行—予想の修正（観点の変更）—試行
- 平行四辺形になるための５つの条件と問題とが合理的に結合すること。（課題解決に最も有利な条件を利用する能力の養成）

5 指導計画

- ①の問題は，平行四辺形になるための条件の「２組の対辺がそれぞれ平行。」と結びつく。

・ ②の問題は，平行四辺形になるための条件の「1組の対辺が平行で等しい。」「2組の対辺がそれぞれ等しい。」}と結びつく。

・ ③の問題は，　〃　「対角線がたがいに他を2等分する。」と結びつく。

・ 考える時間を与えること，コトバによる発表を重視すること，直観的取扱いを重視すること。

・ 授業終了の翌日同一問題をテストして応答分析をやりたい。

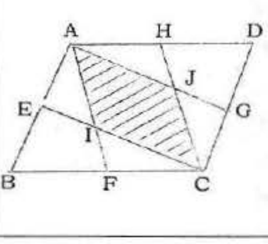
6. 指導過程

以上による授業の実践記録はつぎの通りである。

P1さんは特定の女生徒，P2君は特定の男生徒，Pは数人以上同時の発言，其の他は前の授業記録と同じ。

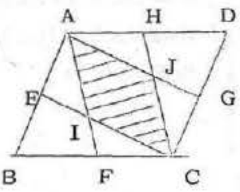
時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
0			・起立，礼，総員50名異状なし。
		・それではね，きょうは私と1時間勉強してください。平行四辺形の問題を4つばかりやりたいと思うんですが，きょうは，そういう問題を解くとき，どのように考えたらよいか，それを中心にやろうと思います。 ・それでは平行四辺形の問題をやるまえに173ページをひらいてください。	
		・平行四辺形の問題をやるには平行四辺形の性質と，それから平行四辺形になるための条件，これをよくおぼえておかなくてはなりませんが，おぼえるこつとしましてね，これから先生のいうところにまるをつけてください。平行四辺形の2組の対辺，対辺をまるでかこんでください。は，それぞれ等しい，等しいをまるでかこんでください。対辺，等しい，つぎ，平行四辺形の2組の対角，対角をまるでかこんで，は，それぞれ等しい。等しいをまるで。そのつぎ，平行四辺形の対角線は，対角線をまる。たがいに他を2等分する。2等分，まる。それが性質ですね，それから平行四辺形になるための条件，条件というのはどういうとき平行四辺形になるのかということですね。	参考事項 使用教科書173頁の平行四辺形の性質と条件のところの主要な語句に，生徒自身にまるを次のようにつけさせる。 ・平行四辺形の性質 5. 平行四辺形の2組の対辺はそれぞれ等しい。 6. 平行四辺形の2組の対角はそれぞれ等しい。 7. 平行四辺形の対角線はたがいに他を2等分する。 ・平行四辺形になるための条件 (1) 2組の対辺がそれぞれ平行(定義) (2) 2組の対辺がそれぞれ等しい。
		・2組の対辺がそれぞれ平行，対辺，	(3) 2組の対角がそれぞれ

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		平行，それをまる。 2組の対辺がそれぞれ等しい。対辺等しいをまるでかこんで。つぎのページをだして，2組の対角がそれぞれ等しい。対角，等しい。対角線がたがいに他を2等分する。他を2等分する。1組の対辺が平行で等しい。平行，等しい。	(等しい。) (4) 対角線がたがいに(他を2等分する。) (5) 1組の対辺が(平行)で(等しい。)
		・まるをつけたところを読んでもらいましょうかね，平行四辺形の5のところから，まるをつけたところ，まるのなかだけ，P_1さん	・P_1さん　対辺，対角
		・等しいをまるでかこみましたか。	・P_1さん　対角，等しい，対角線，2等分する，対辺平行，対辺，等しい，対角等しい，他を2等分する，平行，等しい，
		・よし，	
		・平行四辺形の問題を解くときは，この性質や条件をよくおぼえておかなくてはなりませんね。それを忘れては話しになりませんね。それを先生にきかれたときは，対辺，等しいといってもわかりませんね。2組の対辺はそれぞれ等しいといわなければならないわけですが，それをみんなおぼえるのはなかなかおぼえにくいから，それより対辺が等しい，それぞれ等しい，それから対角は等しい，それぞれ等しい，対角線は2等分する，たがいに他を2等分するのだ，	
		・平行四辺形であることを証明せよ，という場合には，対辺が平行であればそれは平行四辺形になることがわかるね。くわしくいうには，それぞれ平行でなければならない。対辺が等しい場合は平行四辺形になりますね。それぞれ等しいときは，それから対角が等しい，対角が等しい場合は，これを正しくいうと，それぞれ等しい場合ですね。対角の等しい場合は平行四辺形になる。他を2等分	

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		する，対角線がたがいに他を２等分する。あるいは，１組の対辺が平行で等しい，こういうとき平行四辺形になる。こういうことを証明すればいいということになるね。	
		・この性質や条件は，平行四辺形の問題を解くときは念頭においておかなければなりませんね。	
		・しかしみんなはよくおぼえていると思いますが，忘れたときはここを見て考えると考えやすいと思うんですが，	
10		・それでは１７７ページの５ばん，それをＰ２さん読んでください。 P_2君 だな，P_2君	・P_2君 下の（ア），（イ）の図の平行四辺形ＡＢＣＤで，Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈは各辺の中点である。斜線を引いた図形が平行四辺形になることを証明せよ。
		・ハイ，もうひとり，P_3さんか，休みか，P_4君，	・P_4君 下の（ア），（イ）の図の平行四辺形ＡＢＣＤで，Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈは各辺の中点である。斜線を引いた図形が平行四辺形になることを証明せよ。
		・中点というのは何です？ P_5さん，中点というのは？	・P_5さん　………
		・もう１回。	・P_5さん 直線の，線分のまん中
		・線分の中心，線分のまんなか，わかりますね，中点というのは。 それではノートに図をかいてください。 （教師　三角定規，コンパスで板書）	（生徒，各自ノートに作図）
15		・ハイ，図をかいた人，手をあげてごらん	（４０人位挙手）

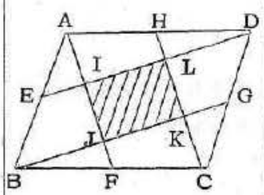
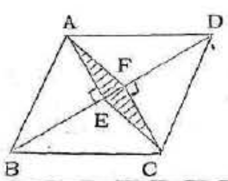
時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		ほとんど全部かいたね。それでは鉛筆をおいて， ・P_6 さん，この黒板の図を見ながらこの問題をいってごらん。文章を見ないで，	・P_6 さん ………
		・大きい声で	・P_6 さん 平行四辺形ABCDにおいてそのABの中点EとDCの中点Gを結び，
		・そうですか？	・P_6 さん AとGを結び，EとCを結び，BCの中点FとAを結ぶ，ADの中点HとCを結ぶ，その中にできるAICJの四角形は平行四辺形である。その斜線をひいたところの四辺形が平行四辺形になるかどうかというのです。
		・そうですね，それでは仮定は？ P_7 君	・P_7 君　AE=EB （内容がはっきりわからない　声が小さい）
		・もう少し大きい声で，もう1回いってごらん。	・P_7 君 AE=BE，BF=CF，CG=DG，DH=AH
	仮定 AE=EB BF=FC CG=GD DH=HA 各辺の中点	・それだけですか？ …………	・P_7 君（黙）
		・これをかんたんにいったらどういうことになる，かんたんにいったら， ・P_8 さん， P_8 君か，これをかんたんにいったらどうなる，	・P_8 君　各辺の中点
		・そう，仮定をかくとき，これを各辺の中点と書いてもいいし，このようにこまかくかくと問題を解くとき考えやすいと思いますね。 ・仮定はこれだけですか。	

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		P_9 さん　どうです，	・P_9 さん　………
		・もうすこし大きい声をだして	・P_9 さん　AB∥DC
	AB∥DC AD∥BC }平行四辺形	・それから	・P_9 さん　AD∥BC
		・これはどういうことです？	
		これをかんたんにいえば？	・P_9 さん　（黙）
		・これを別ないいかたをすれば，	・P_9 さん　平行四辺形
		・そう，平行四辺形だということですね。これで結論は？　P_{10} 君	・P_{10} 君　ACは，
		・え　？	・P_{10} 君　AI，……
	結論　AI∥JC	・AI，それから	・P_{10} 君　AI，JCは平行
		・それから，	・P_{10} 君　AJ∥IC
	AJ∥IC	・これとこれが平行だ（AI∥JC）あるいはこれとこれが平行だ（AJ∥IC）ということを証明する，これを2つ証明するのは何を証明するためですか。	・P　平行四辺形
	四辺形AICJは平行四辺形である。 AI∥JC, AJ∥IC {平行四辺形 {AF∥HC, AG∥EC	これ（AI∥JC）を証明するかわりにこれ（AF）とこれ（HC）が平行だということを証明してもいいわけですね，それから，これ（AJ）とこれ（IC）が平行だということを証明するのに，これ（AG）とこれ（EC）が平行だといってもいいわけですね	
		・平行四辺形だということを証明するのに，これ（四辺形AICJ）が平行四辺形だということを証明するのに，この2辺が平行であると，それぞれ平行であるということを証明してもよいわけですね。それからもう1つは？ どういうことを証明してもよいわけですか？	
		・さっきのしるしをつけたところを見てごらん。	
		・どういうことを証明してもよいわけですか？　P_{11} 君	・P_{11} 君　対辺が等しい，対角が等しい。対角線が2等分する，対辺が平行で等しい。
		・対辺がそれぞれ等しい。対角がそれ	

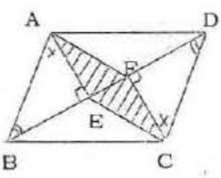
時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		それ等しい。対角線がたがいに他を2等分する。対辺が平行で等しい。	
		・この場合，考えられるのは対角がたがいに他を2等分するというのは，これはつかわないかもしれませんね対角線がひいてないからね。	
		・平行四辺形であるということを証明するためには，そのほか，1つ，2つ条件がありますが，この問題の証明に役立つと思われるのはどれですか？	
		・この角(∠JAI)と，この角(∠JCI)は等しく，この角(∠AJC)と，この角(∠AIC)が等しいということを証明してもよさそうですね。あるいはそれで証明できるかもしれません。どちらでやってみます。	
		・こちら(対辺がそれぞれ平行)でやってみますか？	・P　ハイ
		・どうして？	・P　かんたん
		・かんたん？　うん	
		・どうしてこちら(対辺平行)でやろうと思う？	・P　かんたんらしい。
30		・かんたんらしい，かんたんらしいね。証明方法わかりますか。	
	(再掲) 	・今，証明しようと思うことは，これ(AI)とこれ(JC)が平行にならないかどうか，これ(AI)と，これ(JC)が平行であるという証明ができれば，これ(AJ)とこれ(IC)が平行であるという証明もできるでしょうね。それでます，これ(AI)とこれ(JC)が平行であることを証明してみます。わかる人手をあげてごらん，	(挙手なし，考えている)
		・これ(AI)とこれ(JC)だとわかりにくそうですが，ここまでのばして，これ(AF)とこれ(HC)だとわかりやすそうですね。	
		・なにを証明するの？	・P　平行
		・どれが？	・P　AFとHC

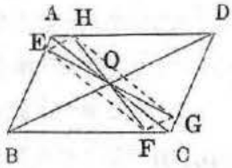
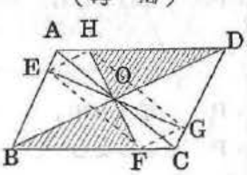
時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		・AFとHCが平行であるということが証明できないかどうか考えているわけですね。	
		・どうです，わかりますか？平行になりますか？わかる人手をあげてごらん。P_{12}君，ここ（教だん）にきていってごらん。	（挙手なし）
			・P_{12}君 四角形AFCHにおいて，FCとAHは平行で，それからAHとFCは同じ長さだから。平行で，対辺が平行で長さが等しいからAFCHは平行四辺形になって平行四辺形になると，AF∥HCになる。
		・なるほどね，おわりまでやってしまったな。P_{13}君，ここ（教だん）にきてもう1回いってごらん。今，P_{12}君がいったこと，	・P_{13}君 AFはあの，AFCHにおいて，平行四辺形ABCDは平行四辺形なので，ADとBCは長さがひとしくて平行であるから，AFとHCは中点を結んだ線分であるから等しい，それに平行四辺形ABCDのAH，FCはその線上にあるので平行である。したがって長さが等しくて平行であれば，四辺形AFCHは平行四辺形である。
		・AHとFCが，長さが等しくて平行であるのですよ。ね，AFとHCは等しいかどうか証明してみないとわかりません。	
		・AHとFCは長さが等しくて平行であるから平行四辺形ですね。だからどうだというのです。	・P_{13}君 だから，AFとHCは平行である。
35		・もうひとりいってもらいましょう。P_{14}君	・P_{14}君　（黙）

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		・いわれませんか。	
		・さあ，書いてみましょうかね。今，ふたりの言ったのを，ＡＨとＦＣは長さが等しい。長さが等しいわけわかりますか？	
	ＡＨ＝ＦＣ	・わかる人，手をあげてごらん。	（２０人ほど挙手）
	ＡＨ∥ＦＣ	・わからない人，手をあげて，	（なし）
		長さの等しいのわかるね。この長さ（ＡＨ）と，この長さ（ＦＣ）は等しいね。これ（Ｈ）は中点，これ（Ｆ）は中点，ＡＨはＡＤの半分，ＦＣはＢＣの半分，ＡＤとＢＣは長さは等しいから，その半分は等しいわけだな。それからＡＨとＦＣはどうして平行ですか？	・Ｐ　平行四辺形の対辺だから
		・四辺形ＡＢＣＤは平行四辺形だからＡＤとＢＣは平行ですね。したがってＡＨとＦＣも平行になりますね。	
		・それで，四辺形ＡＦＣＨは？	・Ｐ　平行四辺形
		・まるつけたところのどこですか？	・Ｐ　５ばん
		・そうですね。１組の対辺が平行で等しい，そういうときは平行四辺形ですね。	
40		・四辺形ＡＦＣＨは平行四辺形だから	・Ｐ　ＡＦとＨＣは平行である。
	ＡＦ∥ＨＣ	・ＡＦとＨＣは平行だということがわかりましたね，つぎはなにがわからなければなりませんか？	・Ｐ　ＡＧとＥＣが平行
		・ＡＧとＥＣが平行ということがわからなければならない。	
		・いまとどうです？	・Ｐ　同じ
		・いまと同じですね。	
		・ＡＥとＧＣは？	・Ｐ　平行
	ＡＥ∥ＧＣ	・平行で？	・Ｐ　等しい
	ＡＥ＝ＧＣ	・長さが等しい。だからこの四辺形（四辺形ＡＥＣＧ）は，平行四辺形，故に	・Ｐ　ＡＧ∥ＥＣ
	ＡＧ∥ＥＣ	・ＡＧとＥＣは平行である。	
	∴　四辺形ＡＩＣＪは平行四辺形である。	・そうするとこの四辺形（四辺形ＡＩＣＪ）で，これ（ＡＩ）とこれ（ＪＣ）が平行，これ（ＡＪ）とこれ（ＩＣ）が平行，故に四辺形ＡＩＣＪは平行四辺形。	

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		・177ページを見て，5の問題のアをやったのですが，そのつぎの問題（イ）をやってみましょう。わかりますか？ （教師　問題を板書）	（生徒は図を見て考えている）
		・さあ，わかりますか，なにを証明すればよいわけです？ ……………………	
		・なにを証明すればいいわけです？ ……………	
		・P_{15}君か，	・P_{15}君 IJKLが平行四辺形であること
		・そのためには何を証明すればいいわけです？	・P_{15}君 AFとHC，EDとBGが平行
		・そういうことを証明すればいいですね。そうするとまえと同じで，どの四辺形が平行四辺形になるの？ P_{16}君　いってごらん	・P_{16}君　IJKL
		・うん，IJKLが平行四辺形になるのだが，そのまえに，	・P_{16}君　AFCH，EBGD
		・そうですね，いまと同じですね。	
		・それではね。1枚まくって，178ページの3の問題，P_{17}君　読んでごらん。	・P_{17}君 右の図のように，平行四辺形ABCDの対角線BDにA，Cから垂線を引いてその足をE，Fとすれば，四角形AECFは平行四辺形になることを証明せよ。
45		・図をかいてもらいましょう。 （教　師　板　書）	（生徒各自作図）

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
50	仮定	・ハイ，やめて。いっしょに。仮定は？	・P　AB∥CD
	AB∥CD } 平行四辺形	・それから	・P　AD∥BC
	AD∥BC	・それから，いっしょに。聞こえません。	・P　BD⊥AE
	BD⊥AE	・それから	・P　BD⊥CF
	BD⊥CF	・BDとCFは垂直，BDとAEは垂直，	
		・結論は？　結論は？	・P　AE∥CF
		・それから	・P　AF∥EC
	結論　四角形AECFは平行四辺形である。	・平行四辺形ね。四角形AECFは平行四辺形である。	
		・さあ，それには，何がわかればいいかな？	
		・わかる人？	（黙）
		・どういうことがわかればいいかな？ ……………	
		・これ（四辺形AE CF）が，平行四辺形であるためには何がわかればよい？	
		・さっきのところ（条件のかいてあるところ）を見てごらん，どれがいいかな こちらのP_{18}君	・P_{18}君　5ばん（1組の対辺が平行で等しい。）
		・5番　平行で等しい。それでは，P_{18}君　いってごらん	・P_{18}君 AEとCFが平行で等しいということ。
		・AEとCFが，平行で等しいという証明ができれば，これ（四辺形AECF）は平行四辺形になるね。 平行であることはわかりますか？ ……………	
		・AEとFCが平行であることがわかる人？	
		・手をあげてごらん	（挙手　4人）
		・どうして平行です。P_{19}君，	・P_{19}君　錯角が等しい。
		・そうですね，こゝ角（∠AEB）とこの角（∠DFC）は直角で交わっているね，故に平行ですね。	
		・これ（AE）とこれ（FC）は長さが等しいということはどうすればわかるか？ ……………	
		・どうすればわかる？　P_{20}さん	・P_{20}さん　△ABE……
		・もう1回	・P_{20}さん △AEFと△EFCが等しい。

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		・もう1回，どの三角形とどの三角形？	・P_{20} さん　△AEFと△EFC
55		・この三角形（△AEF）とこの三角形（△EFC），これが等しいという証明ができるかな，できればよさそうですね，はかに，P_{21}君	・P_{21} 君 △ABEと△DCFが等しいということをいえばよい。
	（再　掲） 	・この三角形（△ABE）とこの三角形（△DCF）が等しいということがわかればいいですね， （図に等しい角をしるしながら）	
		・この角（∠FDC）とこの角（∠ABE）は？	・P　等しい。
		・なぜ？	・P　錯角
	∠FDC=∠ABE	・この角（∠AEB）とこの角（∠DFC）は？	・P　直角
		・残るこの角（∠EAB）とこの角（∠DCF）は？	・P　等しい。
	∠EAB=∠DCF AB=DC	・この辺（AB）とこの辺（DC）は？	・P　等しい。
		・なぜ？	・P　平行四辺形の対辺
		・等しいね。それでいいですか？	・P　ハイ
		・そうすると△ABEと△DCFは，1辺と両はしの角が等しいから合同ですね。	
	∴△ABE≡△DCF ∴　AE=FC	・それでAEに対応するCFは等しいとね，AEとFCは平行で等しいから四辺形AECFは平行四辺形であると，	
		・さあ，時間がきましたけれども，もう1つ次の問題の考え方をやってみましょう。	
		・P_{22}君　問題を読んでください。	・P_{22}君 平行四辺形ABCDの対角線の交点Oを通る2つの直線を引き，平行四辺形の4つの辺と右の図のように，E，G，H，Fで交わらせる。E，FG，Hを結べば平行四辺形になることを証明せよ。

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
		（教師板書）	
		・よし，それではこの図をよく見てください。この点線の四角形が平行四辺形になることを証明せよというのですね，	
		・どの条件をつかったらいいだろう。まえの条件を見て，どういう条件をつかったらいいですか？ ……………	
		・P_{23}さん，どうです。どの条件をつかったらよさそうだ？	・P_{23}さん 4番の，対角線がたがいに他を2等分する。
		・どうもそうらしいね。ここに対角線がひいてあるから。そして長さがだいたい，くらべてみると2等分になっているようですね。それが2等分されるということが，わかれば，証明することができればいいわけですね。	
65		・証明できますか？ …………… ・証明できますか？	
	（再　掲） 	・この長さ（OH）と，この長さ（OF）が等しいということが証明できますか？ ……………	
		・P_{24}君　できますか？	・P_{24}君　HO＝OF
		・何を証明しようというのですか？	・P_{24}君　△HOD
		・それに	・P_{24}君 △BOFが合同ということ
	（HO＝OF） △HOD≡△BOF	・△HODと△BOFが合同ということがわかる人，手をあげてごらん。君，いってごらん	・P_{25}君 ∠HDOと∠FBOは錯角で等しい，∠DOHと∠BOFは対頂角で等しい。それから，BOとODは対角線であるから等しい。
	∠HDO＝∠FBO ∠DOH＝∠BOF BO＝OD		
		・対角線の交点だからね。	・P_{25}君 そうなると三角形は合同になる。

時間	教師の板書	教師の活動	生徒の活動
	∴△HDO≡△BFO ∴ HO＝OF	・それで△HDOと△BFOは合同である。故に，HOとOFは等しい。わかりましたか，これ（HO）とこれ（OF）が等しいという証明ですね。次は何を証明するわけですか，P_{26}君	・P_{26}君 EOとOGが等しいということ
	（EO＝OG）	・こんどは，これ（EO）とこれ（OG）が等しいという証明ですね。 ・それには何がわかればいいだろう。P_{27}さん	・P_{27}さん △BEOと△DGOが合同である。
	△BEO≡△DGO	・いいね，これ（△BEO）とこれ（△DGO）が合同である。 ・これ（∠ODG）とこれ（∠OBE）は？ ・なぜ？	・P　等しい。 ・P　錯角
	∠ODG＝∠OBE ∠EOB＝∠DOG （BO＝OD）	・それからこれ（∠EOB）とこれ（∠DOG）は？ ・これ（BO）とこれ（OD）は，これ（O）は対角線の交点ですから等しいね。 ・ですからこの三角形（△BEO）とこの三角形（△DGO）は合同である。 ・故に？	・P　対頂角で等しい。 ・P　EO＝OG
	∴EO＝OG	・それで，四辺形EFGHは平行四辺形である。 ・それではこれでおわりにしましょう。	・P_5　起立，礼， ・P　さようなら
70		・さようなら	

7. その考察

平行四辺形の基礎的問題の指導を中心にして，

平行四辺形になるための条件（観点）……「……について一体どんな定理があったろうか」④

(1)　2組の対辺がそれぞれ平行（定義）

(2)　2組の対辺がそれぞれ等しい。

(3)　2組の対角がそれぞれ等しい。

(4)　対角線がたがいに他を2等分する。

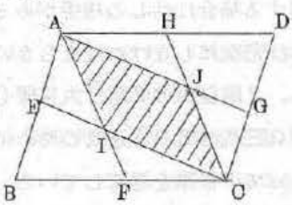
(5)　1組の対辺が平行で等しい。

教材の3つの問題は平行四辺形になるための条件を適用する基礎的な問題で中学校2年生では，このような基礎的な問題において論証にじゅうぶんなれさせる必要がある。このような問題解決においては平行四辺形の5つの条件が問題構造に応じてできるだけ正しくすみやかに選択され適用されなければならない。この選択が正しくはやいほど洞察力が高いといわれるのである。それには第1に5つの条件を同じ程度に記憶し理解していなければならない。生徒の実態は条件の(1)，(2)はよく理解し記憶しているが(3)，(4)，(5)はとかく忘れがちであり理解も浅い。

①の問題は条件(1)と容易に結びつく。これは条件(1)に平行四辺形の定義としてよく理解されているからであろう。③の問題は問題図より容易に条件(4)と関係づけられると思うが，実際の授業ではそうではない。条件(4)は生徒にはなじみがうすいからであろう。②の問題解決には条件(1)，(2)，(5)のいずれでもよさそうである。この3つの条件(1)，(2)，(5)，つまりこの3つの観点のいずれが問題解決に役立つか，洞察力の高い生徒は直ちに観点(5)をたてて，すなわち条件(5)を適用して問題解決を試みる（試行する）であろうが，洞察力の低い生徒は，1つ1つ次々に試行しなければならない。いいかえれば観点変更して試行をくりかえさなければならない。知識の構造化のじゅうぶんな生徒ほど洞察力が高いと考えられるので，観点変更のできる生徒は能力の高いことになるが，多くは1つの観点につまずくと問題解決を放棄するか，強力に不合理な証明をして自分では正しく解決したと考えているようである。平行四辺形であることを証明せよとの問題において，その四辺形が平行四辺形であることの証明が目標になるわけであるが，この目標を分析して5つの観点をたて，「1つ1つ次々に処理されても解決の源泉となりうるのであるから・さまざまの観点を一望の中にもつことができれば・思考者はよりよく解決発見に至るのである。」⑤

応答の類型と誤答分析を中心にして、

①の問題



誤答例㋐

CF＝AH

∠FIC＝∠AJH

∠HAJ＝∠FCI

∴ △CIF＝△AHJ

∴ HJ＝FI

∴ AI＝CJ

∴ 四角形AICJは平行四辺形である。

誤答例㋑

AF∥HCは，

AH＝HD，BF＝FC

AD＝BCだから

AF∥HC

AH∥FC　は同上

∴ AF∥HC，AH∥FC

だから四角形AICJは平行四辺形

誤答例㋒

△ADGとBEC　において，

∠B＝∠D

EB＝DG（AB＝DCでE，Gはその中点だから）

仮定からBC＝AD

△ADG≡　BECであるから

AG∥EC

∴ AJ∥IC， AI∥JC

同じようにして

△ABF≡CDH

AF∥HC

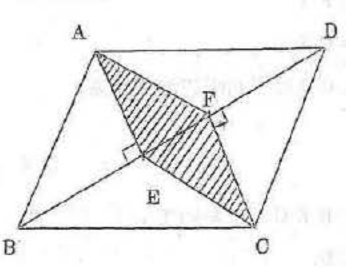
∴ AG∥EC， AF∥HC

誤答例㋑　この答案では，(2)の観点，つまり2組の対辺が等しいという条件をつかって見とおしをたてていると考えられる。かりにこの答案の証明過程のすじみちがとおっているとしても，AI＝CJだけ証明してAJ＝ICを証明してない。この問題の大目標は四辺形AICJが平行四辺形であるという証明である。小目標は2つあってその1つは△AHJ≡△FCIの証明，他は△AEI＝△CGJの証明である。小目標の他の証明を忘れているわけである。このような証明で小目標が2つある問題では，1つの小目標を証明しただけで他の小目標の証明を忘れ，直ちに大目標の結論にはしってしまう。ここではかりに大目標，小目標というコトバをつかったが，論証過程においては，このようなコトバをつかってその意味をは握し，適用できるようにしておくことが便利である。なお，この生徒は直観幾何と論証幾何を混同しているので三角形の合同の証明も誤っている。

誤答例㋺　この答案は論証の論理が誤っていることはもちろんであるが，第1に書きコトバによる表現のむりな生徒である。この程度の生徒は学校によっては非常に多いのであって，論証指導には段階的な取り扱いの必要な理由がここにある。このことについては論証の段階のところで詳細にふれるが，何としても証明を，まず話しコトバで表現できるようにすることである。「AF∥HCは」「だから四角形AICJは平行四辺形 ∴AJ∥IC，AI∥JC」というような表現は話しコトバとしてはよく用いるのであるが，論証としては意味が不明であったり，矛盾したり，重複したりすることが多い。

誤答例㋩　この生徒は2回目の三角形のときは必ず三角形の記号（△）を略している。われわれも内言としてはこれを略して考えているわけである。しかしコトバで表現する場合は話しの相手があるのであるから略してはならないし，まして書きコトバのときは一段と文章は完全にしなければならないのである。この生徒は，この問題の小目標達成のための観点が誤っている。2段証明の問題は大目標（課題の結論の証明）達成のために観点をたて，次にまた，小目標（△ADG≡△BEC）達成のためにまた観点をたてるわけであるからたいへんなことである。直観幾何にたよって小目標を達成している。

(2)の問題



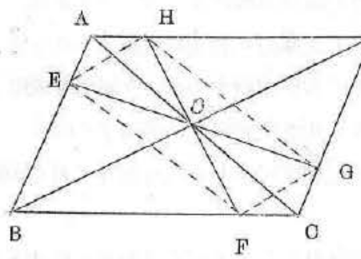
この問題は(5)の観点（条件）で解決したものが最も多い。これは当然であるがしかしこれらの生徒で直角三角形の合同条件をつかって△ABE≡△DCFを証明しているものが少ない。この合同条件は教科書には問題として出題されているのであるが，たびたび利用されるため記憶しておくことが肝要である。(2)の観点で正しく証明している生徒もあるが，これは証明が繁雑であるので容易でない。この類型（(2)の観点）の答案は多く誤答であるか不備であった。誤答の代表的なものは証明が中途半ばなものがいちばん多い。また次のようなものも2，3人あった。

BF－EF＝DE－EF

∴　BE＝FD

これはＢＦ＝ＤＥという前提がなければならないわけであるが，生徒には過去経験として，ＢＦ＝ＤＥの直線（はりがね）の一端が図のようにかさなった場合，残るＢＥ，ＦＤが等長であることの実証が知覚表象として残っており，ＢＦ＝ＤＥ（はりがねの長さが等しい）という仮定を忘れてしまったものと思われる。(1)の観点で解決をはかっている生徒もある。これは誤答である。その他の誤答は①の問題の誤答の類型とほぼにているのが多い。

③の問題



誤答例㊀

∠ＨＯＥ＝∠ＧＯＦ

ＯＨ＝ＯＦ

ＯＥ＝ＯＧ

∴△ＯＦＧ≡△ＨＯＥ

対角線ＥＧとＨＦはたがいに他を２等分している。

故に四辺形ＥＦＧＨは平行四辺形である。

誤答例㊉

△ＨＥＧと△ＦＧＥ　において

ＥＧ＝共通

∠ＨＥＧ＝∠ＦＧＥ（錯角）

∠ＨＧＥ＝∠ＦＥＧ（錯角）

△ＨＥＧ≡△ＦＧＥ

したがって合同な三角形をふたつ組み合わせれば平行四辺形になる。

∴ ▱ＥＦＧＨ，ＥＦ∥ＨＧ，ＨＥ∥ＧＦ

誤答例㊅

∠ＨＯＤ＝∠ＦＯＢ

∠ＥＯＢ＝∠ＧＯＤ

∠ＡＯＥ＝∠ＧＯＣ

∠ＨＯＡ＝∠ＣＯＦ

対頂角が等しければその四辺形は平行四辺形である。

誤答例㊀，㊉は典型的な「断案せっ取の似而非推論」⑥　であって，㊀は証明しなければならない結論ＯＨ＝ＯＦ，ＯＥ＝ＯＧを△ＯＦＧ≡△ＨＯＥを証明するためにひそかにつかっている。㊉は，ＥＦ∥ＨＧ，ＨＥ∥ＧＦを証明しなければならないのであるが，ひそかにその断案を根拠にして，∠ＨＥＧ＝∠ＦＧＥ（錯角），∠ＨＧＥ＝∠ＦＥＧ（錯角）を立言している。このような誤りは，直観幾何と論証幾何の交点におきやすいと思われる。いいかえれば中学校の論証指導の導入段階に多くあらわれるようである。これは知覚表象によって論理的思考がさまたげられるのではなかろうか。㊅の誤答例の生徒は条件(3) ２組の対角がそれぞれ等しいの対角と，対頂角を混同しているのではなかろうか。とにかくこのような応答をする生徒は過去に強く定着した概念や法則が，意味なくして問題解決に結びつき，観点としてあらわれるようである。

以上３つの問題の誤答例の外，白紙答案や，ほとんどそれに近いものが多い。論証教材においては他の教材よりも一層この傾向が強いようである。それだけ論証教材は生徒にとっては難しい教材であるということができるわけであるが，この難教材の好ましい指導のありかたを言語指導の観点より考えたのが次の「論証の段階」である。

論証の段階

石谷茂氏は論証の段階として次の3つをあげている⑦。すなわち第1段階として図をつかって理由を説明する段階，第2段階として話しコトバで説明したり書いたりする段階，第3段階として簡潔に論証をかく段階を。また兵藤鎮馬氏はこの3つの段階の前に「推論のすじみちを納得できる段階」をおいているということである⑧。　これら両氏の着眼は多く教えられるものがある。この段階を，ヴイゴッキー氏の言語の分類⑨などによって次のように再構成したいと考える。

内言の段階 ── A段階（思考の段階）──── 第1段階（納得の段階）

外言の段階
- B段階（話しコトバの段階）
  - 第2段階（直観的な説明の段階）
  - 第3段階（数学用語をつかった説明の段階）
- C段階（書きコトバの段階）
  - 第4段階（生活用語で書く段階）
  - 第5段階（簡潔にすじみちをたてて書く段階）

第1段階は内面的な思考による問題解決の段階である。第2段階は，たとえば△ABC，∠ABC，∠BCAなどといわないで，この三角形，この角というように生徒が自分なりのコトバで図をさしながら説明する段階である。第3段階は，たとえば△ABC，∠ABC，∠BCAというように数学用語や記号をつかって，できるだけ簡潔にすじみちをたてて説明する段階である。第4段階は生徒が自分なりのコトバで論証過程を書く段階で表現が多少冗漫であったり，すじみちがたってなくてもやむを得ない段階である。第5段階は，数学用語によって論理的に簡潔に書く段階である。

数学の問題解決は上記のB段階，C段階においても行なわれるのであるから，A段階は各段階に含まれているとも考えられる。またこの5つの段階は必ずしも論証教材の指導過程を示すものではなくて，教材の指導段階（導入段階，練習段階等）や問題の難易，生徒の能力等によって，この5つの段階は，それぞれ伸縮されたり，前後したり，軽く扱われたり，重視されたり，省略されたりすることがある。要はこの5つの論証の段階を念頭において，簡潔にすじみちをたてて書くという論証指導の最終目標になりなく到達するよう心がけなければならないと思う。次にかかげる参考事項は，この論証の段階を5つに分けるために参考にしたものである。

参考事項

- ある意味では，内言の構文法は書きコトバの構文法と正反対の関係にある。これらの極の間にあるのが話しコトバの構文法である。⑩
- 話しコトバの省略を容易にするこれら2つのモメント ── 主語の知識と語調による思想の直接的伝達 ── が書きコトバには欠けているということは明らかである。それゆえに，書きコトバにおいては，われわれは同一の思想の表現のために話しコトバにおけるよりもはるかに多数の単語を使用しなければならない。だから書きコトバは，もっともコトバ数の多い，正確なくわしい言語形式である。⑪
- われわれは，きわめてしばしば，最初に独言を言ってから，のちに書く。ここでは頭のなかに草稿がある。この書きコトバの頭のなかの草稿は………内言である。⑫
- 言語の相的側面の縮少と述語主義を，内言の省略の2つの源泉としてあげてきた。⑬

V　高二幾何の学習指導の実践例とその考察

―― 幾何の応用問題解決の観点・方法を中心とした研究 ――

1 学　年　　高等学校普通科第２学年（男女共学）４７名

2 日　時　　昭和３９年１月１７日（金）第３限（１０時５０分より１１時４５分まで）

3 教　材　　幾何の補充問題（高等学校数学Ⅰ幾何編－好学社）

① △ＡＢＣの辺ＢＣの中点をＤとし，∠ＡＤＢ，∠ＡＤＣの二等分線が辺ＡＢ，ＡＣと交わる点をそれぞれＰ，Ｑとするとき，次式を証明せよ。

$BP+CQ>PQ$　　（同教科書２１１頁９番の問題）

② 台形ＡＢＣＤの両底を横切り，その面積を２等分する直線はある定点を通ることを証明せよ。

（同教科書２１１頁１１番の問題）

③ 角ＸＯＹの２辺ＯＸ，ＯＹ上にそれぞれ線分ＡＢ，ＣＤが固定してある。頂点を共有する２つの三角形ＰＡＢ，ＰＣＤの面積の和が一定であるように頂点Ｐが角ＸＯＹ内を動くとき，頂点Ｐの軌跡を求めよ。　　（同教科書２１４頁３８番の問題）

4 指導のねらい

- 数学的思考の観点，数学的思考の方法を身につけさせ，教材の構造化をはかる。
- 数学的思考の観点

　①の問題　既有の経験をどう役立てたらよいかと考える。（……どんな定理があったろうか？）

　②の問題　単純な問題におきかえて考える。

　③の問題　特殊な問題におきかえて考える。―― 特殊，一般の関係をおさえる。

- 数学的思考の方法

　解析的方法（上からの方法）によっての考え方

　予想 ―― 試行 ―― 予想の修正（観点の変更）―― 試行

5 指導過程

以上による授業の実践記録が次の通りである。Ｔは教師の発言，Ｐは数人の生徒，　P_1，P_2……等は特定の生徒の発言である。わくの中の図形，文字は教師の板書である。再掲とある板書は，授業の記録を読みやすくし，授業のようすをわかりやすくするために，前の図形をそのままかかげたり，前の図形に教師が板書で書き加えたものをかかげたりしたものである。

時間	指　導　過　程
0	Ｔ（教師）きょうはこれから問題を解くときどういうふうに考えたらよいか，問題をどういうふうに見ていったらよいかということ，問題の見方，考え方を中心としてやっていきたいと思うんです。 ２１１ページの９番，　P_1君（男子の生徒氏名，以下おなじ）読んでください。
	P_1君　△ＡＢＣの辺ＢＣの中点をＤとし，∠ＡＤＢ，∠ＡＤＣの二等分線が辺ＡＢ，ＡＣと交わる点をそれぞれＰ，Ｑとするとき，次式を証明せよ。 $BP+CQ>PQ$
	Ｔ　この問題をノートに作図してください。

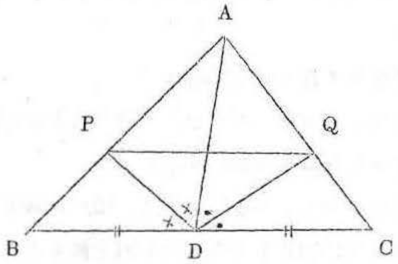
時間	指　導　過　程

図を正確にかくことが問題を解くにたいへんたいせつなことです。

（生徒ノートに各自作図）

（教師は板書，以下教師の板書はわくで

5 下のようにかこむ）



仮定　BD＝DC

∠ADP＝∠PDB

∠ADQ＝∠QDC

結論　BP＋CQ＞PQ

証明

10 （教 師 机 間 巡 視）

12 **T**　ではこれからこの問題を考えましょう。鉛筆をおいて，………この問題はなかなかめんどうな問題ですが，幾何というのは，解答をきくと，ハーハーとすぐわかるが，解答をきかなくても，ハーハーとわかるようになる考え方をこれからやりましょう。それにはこの問題がよくわからなければなりませんね。P_2君　この図をみてこの問題をいってみてください。教科書の文章を見なくてこの図を見てこの問題をいってください。

13 **P**₂君　三角形ABCにおいて，辺BCの中点Dをとおり，頂点AからDに中線をひき，∠ADBの二等分線とABの交わりをPとし∠ADCの二等分線QDとACの交点をQとし，BPとCQの和がPQより大きいことを証明する。

T　よし，そういうふうにいわれることがたいせつです。頭のいい人や，かんたんな問題のときは定規を使わなくても，どう解けばよいかということがわかりますが，めんどうな問題になったり，あるいは私のように頭のよわい人は，正確に図をかいてその図をにらみつけんとよくわからないね。それで私もこの問題をきのう考えてみたんですが，どういうふうに考えたかというとこういうふうに考えた。

考え方にはこつがあるわけですね。長さが大きい小さいをくらべる問題はね，これが2つ（BPとCQ）ありますね。2つある場合は，このBPとCQというのがはなれていますね。BPとCQがはなれていてこれ（PQ）とくらべられないでしょう。はなれている直線はどこかに移動して1本にならないかと考える。こういうふうに（QC又は，BPをいろいろ移動する）。

PBとQCね，これがはなれているもんだからこういうふうにくっつけられないかという考え方が1つある。どこかにくっつくかどうか，QCならQCをこちら（PBの延長）へ移動するとか，そうして1本の直線にしてしまう。そういう考え方が1つね，そういうふうに先生は考えたけれども，この問題はうまくいかなかった。

直線になおしてうまくいかない場合は，こういうふうに直線におきかえてうまくいかない場合は，これ（BP）とこれ（QC）がはなれている場合は，これとこれが（BPとQC）はなれていますから近くに移動できないかと考えるわけです。この線分（PD）をよくみますと，この線分（PD）とこの線分

16 （QC）はどうも平行のようにみえますね，平行のような気がするからこの線分（QC）をここ（PD）にもってこれないかと，あるいはこれが平行なら（QC∥PD），こちら（BPとDQ）も平行ではないか，そうする

時間	指導過程
	とこの直線（ＱＣ）をここ（ＰＤ）へ移動する，これ（ＢＰ）をここ（ＤＱ）へ移動するそうすると，ＱＣがＰＤになり，ＢＰが，ＤＱになると，これ（△ＰＱＤ）が三角形になって，三角形の２辺の和は，１辺より長いからできるんではないかと，こういうふうに先生は考えた。そうすると，これ（ＱＣ）とこれ（ＰＤ）が等しくなる。そうすると，これは（四辺形ＰＤＣＱ），平行四辺形にならないだろうかと考えた。平行四辺形になると，ＱＣとＰＤが等しく，また，四辺形ＢＤＱＰも平行四辺形になるだろうから，ＢＰとＤＱも等しくなる。そうなると問題が，うまく解決するがなと思った。
	これは（ＰＱとＢＣ）平行になりますか？ 平行になるということがわかる人？ （挙　手　な　し） 平行になるとつごうがいいですね。 どうも平行のようだ。 平行になるということがわかる人？ ……… わかる人？ ……… えんりょしなくて， ………　（挙手なし） これ（ＱＤ）は∠ＡＤＣの二等分線ですね，そうするとこの三角形（△ＡＤＣ）において角の二等分線はどうなりますか？
20	三角形において，角を２等分する。頂角を２等分するのは，これ（ＡＣ）を，ＡＣをこれ（ＡＤ）とこの（ＤＣ）の比にわけてやるのでしたかね。どうだったかね。幾何をやる場合いせつな定理をおぼえていないと話になりませんね。頂角を２等分する直線は，対辺を２辺の比にわける。この定理は，みんなの教科書のどこにありますか。
	Ｐ　（２，３人の生徒）９８ページにあります。
	Ｔ　９８ページにありますか。９８ページにあります。ちょっとひらいてみてください。 **P_3さん**（女子の生徒の氏名，以下同じ）よんでください。
24	**P_3さん** 二等分線による比の移動，定理４．△ＡＢＣの∠Ａ（またはその外角）の二等分線が辺ＢＣ（またはその延長）と交わる点をＤとすれば $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$
	Ｔ　これはたいへんたいせつな定理ですからおぼえておかなければなりませんね。時間がありませんから先生が考えたのをいってみますと，これ（四辺形ＤＣＱＰ）が平行四辺形になればいいがなと考えたと，さっきお話したわけですね。そうすると，これ（∠ＡＤＣ）を２等分すると，ＡＤ対ＤＣは，ＡＱ対ＱＣですね。そうですね。また，ＡＤ：ＤＢは，ＡＰ：ＰＢですね。そうですね。するとＡＱ：ＱＣは，ＡＰ：ＰＢですね。そうするとこれ（ＡＱ）対この（ＱＣ）比は，これ（ＡＰ）対この（ＰＢ）の比に等しいから，ＰＱとＢＣはどうなります。
	Ｐ　平行（指名しなくて２，３人の生徒が，いっしょに答えたときはＰとする。）
	Ｔ　平行ですね。平行四辺形になるためにはこれが平行（ＰＱ∥ＢＣ）になるということと，もう１つなにか必要ですね。そこで先生はなにか平行四辺形になる条件をみつけだそうとしたが，みつからなかった。そこで先生はこまったわけです。それで，こういう考え方ではだめだなと思ったのです。だからこれ（ＱＣ）をここ（ＰＤ）に移動して，これ（ＢＰ）をここ（ＤＱ）に移動して，この三角形におきかえて考えてもうまくいきません。

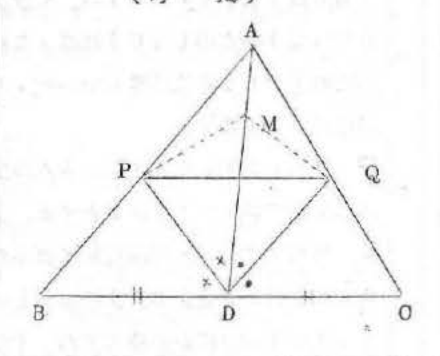
時間	指導過程

と，先生は思ったわけです。

そこで，こんどはどうしょうかなと考えた。幾何の問題はなかなかうまく解けないことが多いね。次にどういうふうに考えたかというと，いいですか，ＰＢとＱＣがはなれているのでね。どこかにうつされないか，移動できないかと考えるわけです。これ(ＱＣ)をどこかに移動できないかと考える。そのときこれは条件ですが，この条件(仮定)をもう１回よく考えてみなければなりません。これがたいせつです。これ(仮定)は何のためにあるかというと，かざりにあるんではないですね。問題を解くために必要な条件です。条件はこういうふうに図にかいておいたほうがわかりやすい。これ(ＢＤ)とこれ(ＤＣ)が等しい。これ(∠ＡＤＣ)が２等分されているし，これ(∠ＡＤＢ)も２等分されているということを，利用しなければなりません。

そこで考えついたのは，根本は，ＢＰとＱＣをどこかに移動するということです。

(再　掲)



Ｔ　それでこれ(ＢＤ)をこうもってきた(ＤＭ)のです。ここをＭとしましょう。この長さ(ＤＭ)とこの長さ(ＢＤ)を等しくした。そうしますと△ＢＤＰと△ＤＰＭはどうなります。

Ｐ　合同になる。

Ｔ　どうして？　ハイ，

Ｐ４さん　２辺と狭角がそれぞれ等しい。

Ｔ　そうですね。∠ＢＤＰと∠ＰＤＭは等しい。ＢＤ＝ＤＭ，ＰＤは共通ですね。だから△ＢＤＰと△ＤＰＭは合同ですね。だからどうです？　Ｐ５君

Ｐ５君　ＢＰとＰＭは等しい。

Ｔ　同様にして，こちらのほうは？Ｐ６君，

Ｐ６君　∠ＱＤＣ＝∠ＱＤＭ，ＤＣ＝ＤＭ　ＱＤは共通，故に△ＤＱＣと△ＤＱＭは合同　したがってＱＣ＝ＱＭ

Ｔ　そうですね。それで？　Ｐ７さん，

Ｐ７さん　ＰＭ＋ＭＱは三角形の２辺の和だからＰＱより大きい。ＰＭ＝ＢＰ，ＱＭ＝ＱＣだから，ＢＰ＋ＱＣはＰＱより大きい。

(教師は聞きながら板書)

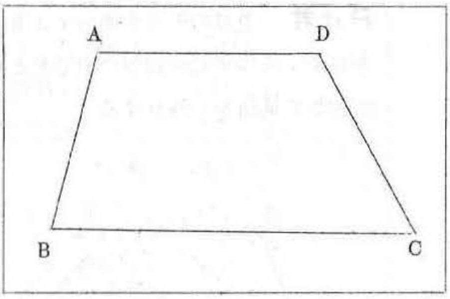
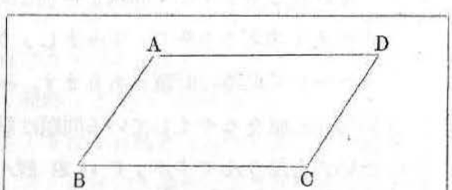
証　明

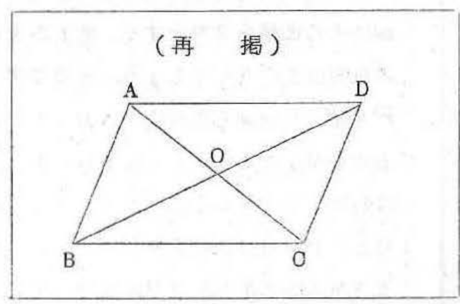
∠ＢＤＰ＝∠ＰＤＭ
　ＢＤ＝ＤＭ
　ＰＤは共通
∴　△ＤＰＢ≡△ＤＰＭ
∴　ＢＰ＝ＰＭ
∠ＱＤＣ＝∠ＱＤＭ
　ＤＣ＝ＤＭ
　ＱＣは共通
∴　△ＤＱＣ≡△ＤＱＭ
∴　ＱＣ＝ＱＭ
ＰＭ＋ＭＱ＞ＰＱ
∴　ＢＰ＋ＣＱ＞ＰＱ

Ｔ　ということがわかるね。

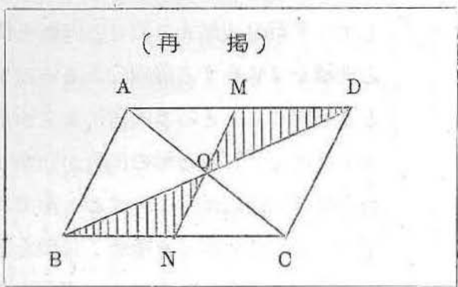
考え方は，これ(ＢＰとＱＣ)がはなれているのでどこかにくっつけられないか，こういうふうに(直線になるように)くっつけるか，こういうふうに(折線として)くっつけるかね，２種類ある。どうです。

それではひとつとばして１２番をやってみましょう。Ｐ７さん，読んでください。

時間	指導過程
	P7 さん 台形ＡＢＣＤの両底を横切り，その面積を２等分する直線はある定点を通ることを証明せよ。
	T 図をかいてください。ノートに。
	（生徒はノートに作図）
28	
	T こういう問題はね，これはだいぶむずかしい問題ですが，条件はただ台形ということですね。これ（ＡＤとＢＣ）が平行だということですね。わかりますか？
	この問題の解きかたはいろいろあると思いますが，きょうは，こういう問題は，かんたんな問題におきかえて考えるという考え方でやってみましょう。
	五辺形とか，七辺形という問題は，五辺形の問題だったら四辺形の問題になおせないかそれよりかんたんな問題にね，四辺形の問題は三角形の問題になおして考える。そういう考え方もひとつの考えるコツです。この問題は台形だから台形より性質のかんたんな問題は平行四辺形の問題ですね。一般にそうでしょう。そうするとこの問題は平行四辺形の問題におきかえて考えてみる。ほんとうは台形の問題なんだけれども，平行四辺形の問題だったらどうだか考えてみる。
31	

	T この問題は台形ＡＢＣＤの両底を横切りというのですが，もう少しかんたんな問題にして，平行四辺形ＡＢＣＤの両底を横切りその面積を２等分する直線はある定点を通ることを証明せよ。という問題におきかえる。そうすれば，平行四辺形の問題がわかったら，台形は平行四辺形になおすことができますね平行四辺形でわかった場合，台形を平行四辺形になおして考える。平行四辺形になおすのはかんたんですね。それで，平行四辺形の両底を横切り，いま両底はこれ（ＡＤ）とこれ（ＢＣ）ですから，ＡＤとＢＣを横切って２等分する直線は，どこか定点を通るだろうというふうに考える。
	どこを通るだろうか？
	わかりますか？ これなら，わかりそうだなさあ，Ｐ８君
	P8 君 中心
34	T 中心？ 対角線の交点ね，
	
	T こういう問題を考えるときは，対角線の交点を，円の問題のときは円の中心ね，とにかくそういうところになにかないかと考える人間にも急所というものがある。どんな図形にも急所がある。まず，そこをあたってみるそうだかどうだかわからないですよ。平行四辺形の対角線の交点をみて，そこを通らないだろうかなと考える。そこ（交点）を通る線でまず考えてみる。

時間	指　導　過　程



P　等しい。

T　等しい？　このOを通る直線はどこにひいても平行四辺形の面積を２等分するようですね，それはわかるか，２等分するようですね，というので，２等分するというのではないよ，どうも２等分するような感じがする。初めわかるのはみんな感じです。問題の解決法をみつけるときはその感じからでてくる。そして，そこから考えていけばいいわけだ。平行四辺形の場合はこの点（Ｏ）をとおる直線はその面積を２等分する。感じがする。この証明はかんたんでしょう。どうです，Ｐ９君

P９君　Ｏを通る直線が，ＡＤ，ＢＣと交わる点をＭ，Ｎとすると，△ＢＮＯと△ＤＭＯは合同，△ＡＭＯと△ＮＣＯも合同，△ＡＢＯと△ＤＣＯは面積が等しいから，四辺形ＡＢＮＭと四辺形ＤＣＮＭは面積が等しい。

T　そうですね。だからＭＮは，　ＡＢＣＤの面積を２等分する。この証明はかんたんですね。

　そうすると，平行四辺形の場合は，ここ（交点Ｏ）をとおるのであれば，それでは，台形のときはどうなるかと，もとの問題を考えるわけですね。そうすると，これが，平行四辺形であれば，かんたんなのだから台形を平行四辺形になおせないかと考える。Ｐ10さんどうですか？

P10さん　？

T　平行四辺形つくれますか？

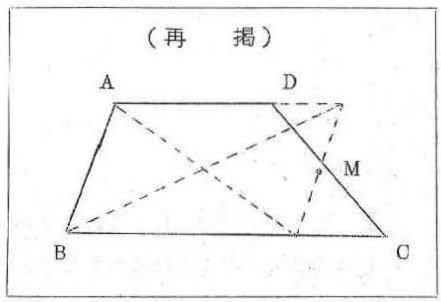
P10さん　わかりません。

T　それでは，Ｐ11さん

P11さん（返答なし）

T　わかる人，手をあげてごらん。えんりょなく手をあげてごらん，高校生はどうもえんりょぶかくてこまる。Ｐ12君どうだ，

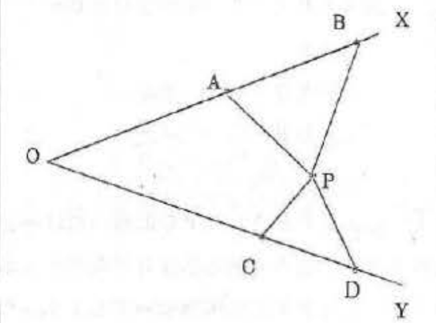
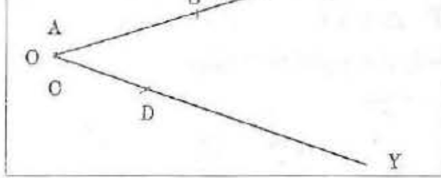
P12君　ＤＣの中点を通ってＡＢに平行線をひく，その平行四辺形の中心をとおる直線が台形の面積を２等分する。

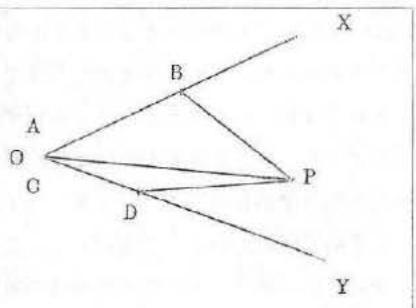


T　おわりまでいってしまったが，いまは平行四辺形は，台形と等しい面積の平行四辺形は，どうすればつくれるかということですねＤＣの中点Ｍをとおって，ここからＡＢに平行線をひく。できたこの平行四辺形は台形と面積が等しくなりますね。そうですね。この平行四辺形の対角線の交点をとおる直線はこの台形の面積を２等分しないだろうかと考えると問題が解決されそうです。先生はできると保障しませんから自分でよくあとからやってみてください。

　この問題はまた別の解きかたもありますね特別な点を考えて解くときかたね。その方がかんたんかもしれません。自分で考えてみてください。

　それからもう１つ，問題を特別な問題におきかえて考えるのをやってみましょう。２１４ページに軌跡の問題があります。みんながいちばん頭をなやましている問題は軌跡ではないかと思うんですが，Ｐ13君読んでもらいますか，２１４ページの３８番

時間	指導過程
	P13君　角XOYの2辺OX，OY上にそれぞれ線分AB，CDが固定してある。頂点を共有する2つの三角形PAB，PCDの面積の和が一定であるように頂点Pが角XOY内を動くとき，頂点Pの軌跡を求めよ。
	T　図をかいて考えてください。
36	（生徒各自ノートに作図する。）
	 △ABP+△DCP　一定 AB，CD　固定 Pの軌跡 特　殊
39	T　ハイ，やめて，わかりますか。
	……………
	T　この軌跡を考えてみようと思って先生はきのう考えてみたがなかなかわかりませんでした。わからなかったが最初お話ししたように軌跡の問題の考え方はまだおぼえておった。どういうふうに考えたかというと，みんなの幾何でやる軌跡は直線だか，円だか，それをまず考えればよいわけですね，両方ののもむずかしい問題にはあるようだが，だいたい直線だか，円だかということをまず考えればよい，直線だか，円だかということを考えるんですが，軌跡，どういう軌跡かということをみつけるときに，特殊な点を考えればよいね 先生が考えた特別な場合はどうだかというと，この面積（△ABP）とこの面積（△CDP）をたした和が一定なのだから，この場合の特別な場合は，こちらの面積（△ABP）がだんだん小さくなって零になった場合，ね零になる場合，これは特別の場合でしょう。あるいは，こっち（△ABP）がだんだん大きくなって，こちら（△CDP）が零になった場合，零になった場合は，この点（P）はどこにあります？この上（OYの上）にあるでしょう。この直線上のどこかにあるわけですね。こちら（△CDP）がだんだん大きくなってこちら（△ABP）が零になったときは，この上（直線OX上）になるわけですねこう考えても，なかなかわからなかった。 特殊な場合どうなるかという考え方ですねさきほどの問題のときは，直線にならないかそれでうまくゆかないときはどこかにくっつけることができないか，そういう考え方でしたね。いまの場合，軌跡を求める場合は，特別のところをみつけるわけです。しかし，そうはいってもなかなかうまくいかなかった。そこで考え方をかえてこう考えたわけです。 これ（AB）が，ここにあるからむずかしいんですね。ここ（OX上のいまの位置）にあるからむずかしいんです。OX，OY上のここ（前の図のとおり）に固定しているからむずかしいんです。それでこの場所の特別な場合を考える。この特別な場合，特別の位置というと，どこですか？どうです，P14君
	……………
	P14君（返答なし）
	T　この特別な場合というと，これ（AB）がここ（O）にくっついたときですね。
	

時間	指導過程
	これが一方（ＡＢか，ＣＤ）だけくっついたときと，両方（ＡＢも，ＣＤも）ともくっついたときとある。Ｏ点に，ＡＢのＡと，ＣＤのＣがかさなったときが，両方とも特別のときです。これが両方ここにくっついたこういう問題におきかえて考えてみる。（上図の場合） ＡＢがＯＸ上の適当なところにあるのではなくて，ＡとＯが重なった特別な場合，ＡがＯに重なった場合，ＣがＯに重なった場合，こういう問題であるとどうなります？ 角ＸＯＹの２辺ＯＸ，ＯＹ上に，それぞれ線分ＡＢ，ＣＤが固定してある。しかもＡ，Ｃ，Ｏが重なっている。頂点を共有する２つの三角形ＰＡＢ，ＰＣＤの面積の和が一定であるように頂点Ｐが角ＸＯＹ内を動くとき，頂点Ｐの軌跡を求めよ。
46	

△ＡＢＰ＋△ＣＤＰ　一定

Ｔ　どうです，これならわかるでしょう。Ｐ15さん，どうです？

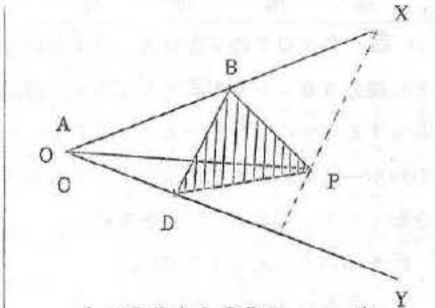
Ｐ15さん　わかりません。

Ｔ　それではその前

Ｐ16さん，わかりません。

Ｔ　△ＡＢＰと△ＣＤＰ（前の図の）の和が一定である頂点Ｐの軌跡は………

（再　掲）



△ＡＢＰ＋△ＣＤＰ　一定

△ＡＢＰ＋△ＣＤＰ＝△ＯＢＤ＋△ＢＤＰ

△ＯＢＤ　固定

△ＢＤＰ　一定

Ｔ　△ＡＢＰと△ＣＤＰの面積の和は一定なんですね。△ＡＢＰと△ＣＤＰの和は，△ＯＢＤと△ＢＤＰの和に等しいでしょう。そうですね，△ＯＢＤは固定していますね，そうすると，△ＢＤＰの面積は？　Ｐ17さん

Ｐ17さん　一定である。

Ｔ　そうですね，△ＢＤＰの面積はきまっているんだからＰはどういうふうに動けばいいわけだ，この三角形（△ＢＤＰ）は底辺がきまっているんだから，この三角形の面積が一定であるためには，？

Ｐ　高さが一定であればよい

Ｔ　それには？

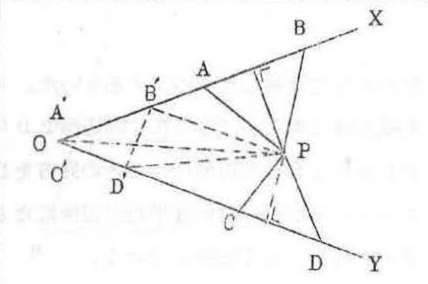
Ｐ　ＰがＢＤの平行線上にあればよい，

Ｔ　この頂点（Ｐ）がＰを通って，ＢＤの平行な直線上にあればいいわけですね，この三角形（△ＢＤＰ）の高さが一定だから，この面積（Ｐが移動しても）は一定であるわけですね，だからこの頂点Ｐの軌跡はこの点（Ｐ）をとおってＢＤに平行な直線上にあることになる。ただし，Ｐが，∠ＸＯＹ内を動くときというのだから，この平行線の∠ＸＯＹ内の線分上ということになるわけです。

それで，こういうことから，もとの問題を考えてみましょう。

時間	指　導　過　程

（もとの問題の図にかえる。次の図は，もとの図に書き加えながら説明したもの）



$\triangle ABP + \triangle CDP = m^2$

$\triangle ABP = \triangle A'B'P$

$\triangle CDP = \triangle C'D'P$

$\triangle ABP + \triangle CDP = \triangle A'B'P + \triangle C'D'P$

$\therefore \triangle A'B'P + \triangle C'D'P = m^2 = \square A'B'PD'$

$\therefore \quad \triangle PB'D' = m^2 - \triangle OB'D'$

T　このPが条件を満足する点だとします。つまり△ＡＢＰ＋△ＣＤＰが一定，たとえば，m^2のＰだとします。ＡＢを移動して，ＡをＯに重ねてそれをA′ B′ とします。そうすると△ＡＢＰの面積と△A′ B′Pの面積はどうですか？

P　等しい。

T　なぜ？

P　底辺と高さが等しいから

T　そう，底辺と高さが等しいからね，ＣＤも移動してＣをＯにかさねます。そうすると△ＣＤＰと△C′D′Pは，

P　等しい。

T　そうですね，さっきとおなじように底辺と高さが等しいからね。ＣＤとC′D′は等しい。この三角形（△ＣＤＰと△C′D′P）の高さは両方ともこれですね。そうすると，△ＡＢＰと△ＣＤＰの面積の和は，△A′B′Pと△C′D′Pの面積の和に等しいですね。これ（△ＡＢＰ＋△ＣＤＰ）がm^2なんだから，これ（△A′B′P＋△C′D′P）もm^2です。つまり，これ（△A′ B′ P）とこれ（△C′D′P）の和はm^2で，一定で，この四辺形（▱ A′B′PD′）ですね。そこで，△ＯB′D′は動きませんから，△B′D′Pの面積が一定であればよいわけです。そうするとＰはB′D′に平行でＰを通る直線上にあるということになる。軌跡は，Ｐを通ってB′D′に平行である直線の∠ＸＯＹの内にあるということになりますね，これを厳密に証明するには，この逆も証明しなければなりませんね。きょうは考え方だけをやるつもりだったからどの問題も最後までしっかり証明しませんでしたが，家へ帰ってよく考えてやってみてください。最後まで式をかいて順序正しく証明することはとてもたいせつなんですから。じゃ，今の

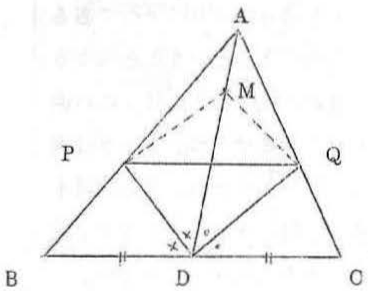
55　時間はこれでおわりにします。

授業の翌日，教材と同一の問題を3題と類似問題を1題，合わせて4題をテストした。そのテストの結果を次のように類型別に分析したが，これは誤答を中心としたものである。

6. 応答の類型の主なもの

①の問題

（①の問題の図解）



A型（誤答）

2回目の観点を誤解して解答したものが7名もいた。2回目の観点とは，実践記録で明らかなように，四辺形PDCQまたは，四辺形PBDQは平行四辺形になるとの見方をしたことである。つまりその2つの四辺形は平行四辺形になるからPB＝QD，PD＝QCとして証明している。

B型（誤答）

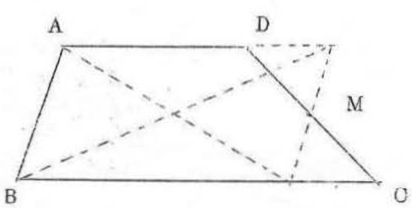
上からの方法（解析的方法）と下からの方法（機械的方法）を混同していると思われるもの，つまり発見過程と証明過程を混同しているもの，たとえばBPと同じ長さをAD上にとる，CQと同じ長さをAD上にとる，交点をEとするなどである。

C型（誤答）

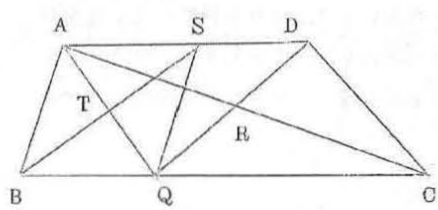
結論がちがっているもの，たとえばPQ∥BCとして証明をおわっている。

②の問題

（②の問題の図解）



D型（誤答）



D型（誤答）

考え方の型だけをまねて理由のわかっていないもの，たとえばAよりDCに平行線を引きBCとの交点をQとし，平行四辺形AQCDの対角線の交点をRとする。QよりABに平行線を引きADとの交点をSとし，平行四辺形ABQSの対角線の交点を求める点としたもの

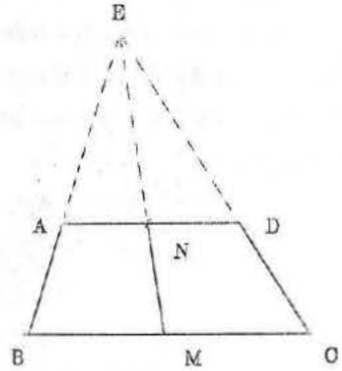
E型

定点は正しく求めて証明が略されているもの，証明がふじゅうぶんのもの

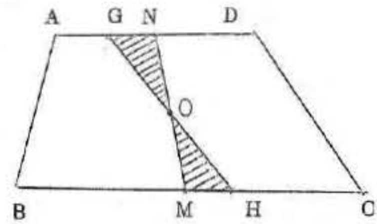
F型（誤答，正答）

指導をうけたものとちがった観点で考えているもの

下図は不成功におわったもの



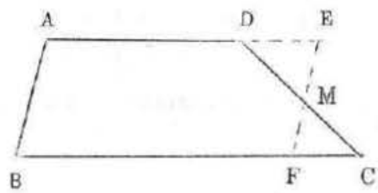
下図は成功したもの



$$\begin{pmatrix} AN=ND \\ BM=MC \\ NO=OM \end{pmatrix}$$

O型

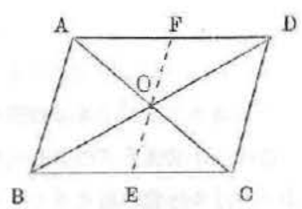
結論のちがっているもの



たとえば左図で，△DME≡△FCMまで正しく証明して，あとはなにも書いていない。

G型（正答）

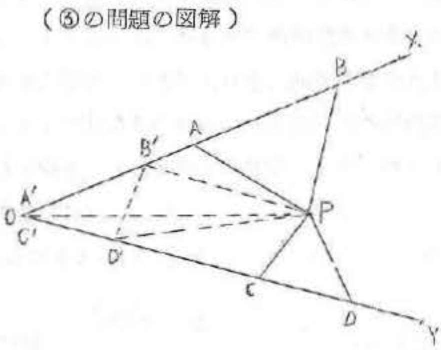
証明過程がくわしすぎるもの



たとえばEFが，平行四辺形ABCDの面積を2等分するという証明がくわしすぎるもの，── △ABO≡△CDO △AOF≡△ECO，△BEO≡△DFO，EO=OF等これらをひとつひとつ詳しくその理由から証明している。

③の問題

（③の問題の図解）



H型（正答，誤答）

問題解決の考え方まで書いている。

I型（正答，誤答）

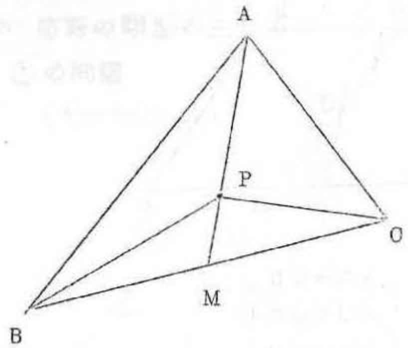
解く必要のないおきかえた問題まで解いている。

J型（不じゅうぶんな解答）

軌跡の2段の証明がなされていない。

わかっていてもすじみちをたてて考えられないもの。

④ の問題（①の類似のテスト問題ー好学社の教科書２１１ページ１０番）



問題　ＡＢ＞ＡＣの△ＡＢＣにおいて，辺ＢＣの中点をＭとし，線分ＡＭ上の任意の点をＰとすれば，

ＰＢ＞ＰＣ　かつ　ＡＢ－ＡＣ＞ＰＢ－ＰＣ

であることを証明せよ。

ＰＢ＞ＰＣ　の証明について（④の前半の問題）

Ｊ型（誤答）

直観的に説明して論証してない。たとえば上図において，ＢＣの中点をＭとするとＡＭは右側に傾く（条件により），故に定点Ｂ，ＣからＡＭ上に線を引けばＢＰ＞ＣＰとなる。

Ｃ型（誤答，不じゅうぶんな証明）

結論だけ正しくて証明過程が全くわからないか，すじがとおっていないもの，或は証明の中途でゆきづまったもの，証明の中途で証明がおわったとかんちがえているもの

Ｋ型（誤答）

基礎的学力が特に不足と思われるもの，たとえば

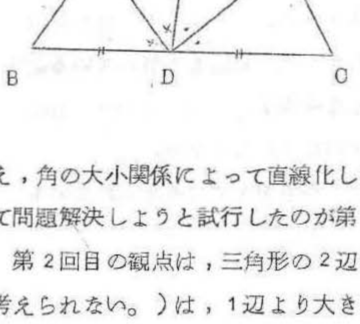
ＡＢ＞ＢＰ

ＡＣ＞ＰＣ

∴　ＡＢ－ＡＣ＞ＢＰ－ＰＣ

7. 実践授業の考察

① の問題



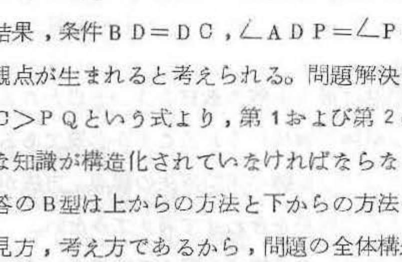
線分の大小関係の証明は既有知識によれば，１つの三角形における角の大きさに対する辺の大小関係（２つの三角形の場合――２辺相等夾角の大小――は今は思い出さなくてもよい。）と，２辺の和または差と１辺の大小関係の２つである。ところで，証明しなければならない式はＢＰ＋ＣＱ＞ＰＱである。この式はそのままでは解決できない。最初にまずそのことを確認しなければならない。それで問題解決の最初に考えられることは三角形の角と辺の大小関係の既有知識より，ＢＰとＣＱのどちらか，あるいは両方を移動して，直線化し１つの三角形の１辺になるようにして三角形の問題におきかえ，角の大小関係によって直線化した線分とＰＱの大小関係を証明できないかと考える。このようにして問題解決しようと試行したのが第１回目の観点である。

第２回目の観点は，三角形の２辺の和（この場合は証明しなければならない式の構造より２辺の差は考えられない。）は，１辺より大きいという既有知識よりＢＰまたはＱＣの１つか又は両方を移動することによって，１つの三角形におきかえることができれば問題解決が容易になるという考え方である。

そこで図形を直観して（これが，むずかしい問題ほど図形を正しくかかなければならない理由である。）△ＰＤＱに課題をおきかえることができないかと考えたわけである。これが第２の観点である。この操作は不可能であった。しかし直観的にＰＱ∥ＢＣであり，また，ＰＱ∥ＢＣの論証も可能である。ただＰＱ∥ＢＣの証明に多くの労力を要したためか，この第２の観点で問題を誤答したものが７名もいた（A型）。いずれの指導過程においても当然であるが，特に観点の指導過程においては，生徒が，主体的に積極的に活動していないと講義をうのみにして，正しく理解することができない。

第３の観点。第２の観点では解決に到達できないので，思考の混迷をきたすのである。第１の観点，第２の観点と２回も壁につきあたると多くの生徒はそこでざせつするのであるが，このような場合第３の観点をたてること，つまり観点の変更の指導が重要である。このとき必要なことは，課題解決のために必要と思われる既有知識の整理と，与えられた条件の再吟味である。課題を既有経験（知識）に結びつけるということは，盲目的偶然的な結合でなく，課題の構造と同一のもの，類似のものでなければならないから，この場合，観点を変更するとしてもＢＰ＋ＣＱ＞ＰＱの式の構造よりどうしても第２の観点以外にないということに気づかなければならない。そのように考えられる生徒はこの課題解決に必要な知識がじゅうぶんわかっているのである。つまり△ＰＱＤへのおきかえ（第２の観点）は不可能であるから何か別の三角形へのおきかえが必要である，と考えるのである（観点変更）。その新しい観点をたてるに必要なのが，問題の条件の再吟味である。いいかえるならばこの問題は三角形の問題に帰着させる以外に方法はないと考えるのである。三角形ＰＱＤとのおきかえ（結論のＢＰ＋ＣＱ＞ＰＱを証明するのに△ＰＱＤを利用しようとすること。）が不可能ならどんな三角形とおきかえることができるかおきかえを可能にするためにどんな条件が与えられておったかを，あともどりして考えるわけである。その結果，条件ＢＤ＝ＤＣ，∠ＡＤＰ＝∠ＰＤＢ，∠ＡＤＱ＝∠ＱＤＣを再吟味することによって，第３の観点が生まれると考えられる。問題解決には課題の構造をとらえなければならない。すなわちＢＰ＋ＱＣ＞ＰＱという式より，第１および第２の観点がたたなければならない。それにはその課題解決に必要な知識が構造化されていなければならないのである。

誤答のＢ型は上からの方法と下からの方法を混同している生徒である。解析的な方法は問題を上からみる見方，考え方であるから，問題の全体構造をとらえやすいので問題解決の発見的方法である。　証明するときは下から理路整然とつみあげてゆかなければならない。　Ｂ型はこれがよくわかっていない。しかしこれは必ずしもうれえなければならないことではない。Ｂ型は指導の積み重ねによって正しく考えることができるようになるが，うれえなければならないのは，下からの方法によって機械的に理路整然と問題を解答し，テストの結果，同一の問題を正しく解答したので問題解決力がついたと考える考え方である。機械的方法は，与えられた問題そのものをわからせるにはかりによいとしても，新しい問題に対する解決力，応用の力，つまり思考力の高まりは解析的方法より劣ると思われるからである。誤答のＣ型は第２の観点で問題を解決しようと考えて思考がていたいしたか，解答おわりと誤認したかの生徒であろう。



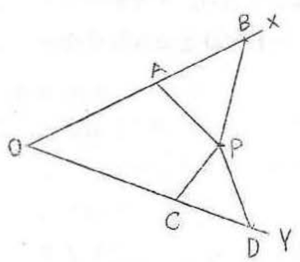
この問題は左図のようにして△ＰＱ'Ｂを利用しても解決できる。解答がいろいろあるときは，数学は問題そのものを教えるということより，問題の見方，考え方を教えるのであるから別解の指導もたいせつと思われる。左図による方法を第４の観点というならば，これは第３の観点より一層困難である。第３の観点は条

件に着眼して対称移動することになるのであるが，第４の観点はＢＣの中点Ｄに着眼して回転移動しなければならない。そのためには平行四辺形の知識まで関連して構造づけられていなければならない。

②の問題

台形の問題を平行四辺形の問題におきかえる観点は，問題構造を単純化して，課題解決のヒントを得ようとする試みである。しかし生徒の答案には平行四辺形よりも一層単純な三角形の問題におきかえて考えたのが１名あった。しかしこれは正答まではいたらなかったが観点としては正しいと思う（Ｆ型）。つまりＦ型の図解（Ｐ１０５）をみると，右図で解いた生徒はどうしてＡＤ，ＢＣの中点Ｅ，Ｆに気づいたか？　他の解説書をみて知っておったか，または，特殊化の観点が身についているのか，などといろいろ考えられる。Ｆ型の左図（Ｐ１０５）に問題をおきかえて考えれば，この場合，三角形の面積を２等分する直線はＢＣの中点Ｍを通る１本しかないことになる。そのときＥＭはＡＤの中点Ｎをとおるから　ＭＮは台形ＡＢＣＤの面積を２等分する特殊の線分になる。このやり方のほうが，ＭＮという特殊な線分に気づくのに自然ではなかろうか。Ｆ型の左図は単純化という観点であり，右図は，特殊化という観点である。またＭＮの中点Ｏも特殊化の観点である。特殊な点や線分を考えて問題を解決する観点は非常に有力であるので③の問題はこの観点によったのである。誤答のＤ型は意味のない補助線を引いている。この生徒は前日の授業を理解していない。相当学力の高い生徒でも困難な問題に当面するとむやみに補助線を引くことがある。観点をたてなくて引く補助線は盲目的であってひとつの試行錯誤である。偶然その補助線によって問題解決ができたとしても問題解決力がついたとはいわれない。見とおしのある補助線でなければならない。Ｅ型は論証になれていない生徒であるから教師は，時には，下からの正しい証明を示範して証明過程を指導しなければならない。証明過程のくわしすぎるもの（Ｇ型），結論がちがっているもの（Ｃ型），Ｂ型も同様である。

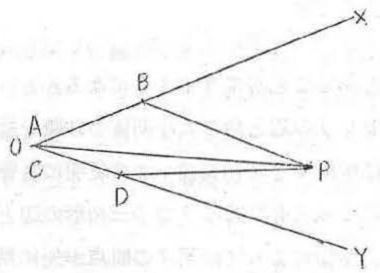
③の問題



高校においては，軌跡は最も困難な教材の１つと思われる。それには軌跡の考え，軌跡の論法になれることが必要であることは当然であるが，ここでは軌跡の問題解決の観点，方法が研究対象であるので，それに焦点を合わせて考えてみたい。

この問題解決で最初に思いつく観点（第１の観点という）は△ＡＢＰ，または△ＣＤＰのどちらかの面積が零であって頂点が，ＯＸ上か，ＯＹ上にある特殊の場合である。つまり△ＡＢＰの面積が最小の零になり頂点ＰがＯＸ上にある場合とその反対の場合である。どちらにしてもＰがＯＸ上，またはＯＹ上にあることはわかるが，定点がみつからない。つまり定点，特殊点がみつからないというところにこの問題の困難点がある。第１の観点は不可能であると考えて観点を変更する。

次に考えられることは，この問題を特殊な問題におきかえるという観点である。（これを第２の観点という）。ＡＢ，ＣＤはＯＸ上，ＯＹ上に固定しているという仮定であるが，ＡＢ，ＣＤはＯＸ，ＯＹの一般的な位置にあるのでＡＢ，ＣＤの両線分とも次図のように一端がＯ上にある最も特殊な位置を考える。特殊という観点を身につけさせることによって，このような観点のたてかたが可能になろうという前提があるわけである。



第２の観点によって③の問題を変形すると次のようになる。

角ＸＯＹの２辺ＯＸ，ＯＹ上にそれぞれ線分ＡＢ，ＣＤが図のように固定して頂点Ｐを共有する２つの三角形ＡＢＰ ＣＤＰの面積の和が一定であるように頂点Ｐが角ＸＯＹ内を動くとき，頂点Ｐの軌跡を求めよ。

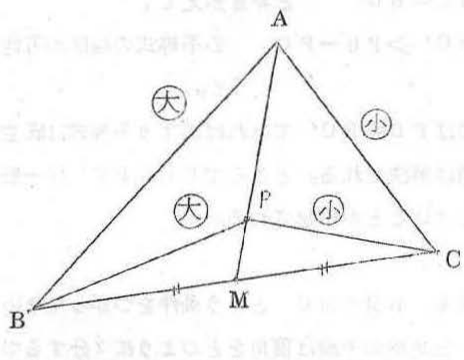
この変形した問題の図はもとの問題（課題）の図とは別に新しく書く必要があるが，線分や角の大きさ，特にＰの位置，名称などはもとの問題と同じにする。このことは特殊と一般の関係をおさえるためにたいせつである。このおきかえた問題（変形した問題）は非常にかんたんになっているので多くの生徒に解答が期待できるのであるが，③の問題のこの観点の難点は特殊と一般の結びつきにある。

第３の観点として考えられるのは，ＡＢ，ＣＤをそのまま特殊点Ｏまで移動して，初めから特殊，一般を関係づけながら解答することである。第２の観点は，もとの問題とは別個におきかえた問題を解答し次に第３の観点に移るのである。第３の観点は上位群によく，第２の観点は中下位群にわかりやすいように思われる。考え方としては第３の観点がよいと思われるが実情は第３の観点は図形が複雑になったり，特殊，一般の関係をおさえながら考えなければならないことから下位群にはむりのようである。どちらの観点をたてるかは生徒の能力や教師の指導観によらなければならないが，観点方法を身につけさせるという角度より考えてこの授業は第２の観点によったのである。

この問題の正答率はよくなかった。応答を類型によって考察するとＨ型，Ｉ型は証明過程の指導によって解決すること，Ｃ型は軌跡の２段証明法がわかってない。軌跡の２段証明は生徒にとっては最も抵抗の大きいところであって，軌跡の定義を明白にして２段証明の理由をよくわからせ論法になれさせることは当然であり，特にテストなどのとき時間の不足した場合，２段目の証明を簡略に述べる方法などを指導してもよいと思う。

④の問題（事後テストの問題で①の問題に類似のもの，この問題は指導してない。Ｐ１０６）

ＰＢ＞ＰＣを㋑の問題，ＡＢ－ＡＣ＞ＰＢ－ＰＣを㋺の問題とする。生徒はこの課題のように２つの証明の要求があると，問題が複雑になったと誤解して，初めから困惑している。



これは問題が複雑になったのでなくて，２つの問題を１つの問題にまとめたのであって最初㋑の問題を解き，次に㋺の問題を解答すればよいと確認することがたいせつである。教師にとってはわかりきっていることでも生徒にとってはわかりにくいことが案外多いものである。このこともその１つであろうと思われる。

㋑の問題　　　ＰＢ＞ＰＣの証明

①の問題は，１つの三角形の辺と角との大小関係が理解されていればよかった。

㋺の問題は，それに加えて，２辺がそれぞれ等しい２つの三角形における辺と角との大小関係がわかっていなければ，この課題解決に必要な知識が構造化しているとはいわれない。ところで，この課題は

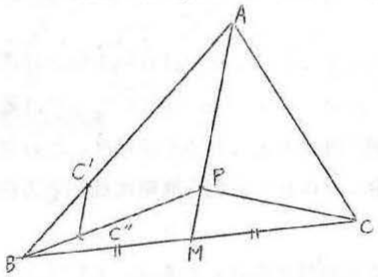
ABCを1つの三角形とみているかぎり解決されない。△ABCを2つの三角形ABM，AMCとみなければならない。

そこでどうして△ABCを2つの三角形ABM，三角形AMCとみることができるようになるかということである。問題の構造よりPB＞PCは1つの三角形（△BPC）の辺と角の大小関係の知識と結びつく。これが第1の観点になるであろう。第1の観点では問題は解決できないので，この証明に必要な知識が構造化している場合は再度の条件分析（BM＝MC等）によって必然的に2つの三角形の辺と角との大小関係に観点が変更（第2の観点）されることになろう。生徒によっては第2の観点が先に見えるものもあると思われる。このような生徒には，a，bの2つの型が考えられる。a型は2つの知識（三角形がひとつの場合と2つの場合の知識）がじゅうぶん構造化しているため課題の構造と知識とが直観的に結びついて，途中の思考が圧縮されたもので，いわゆる洞察力がついた生徒であろう。b型は第1の観点に必要な知識は忘れておったが，第2の観点に必要な知識だけおぼえておったという生徒である。ただしこの課題ではb型の生徒はあり得ないと思われるが，困難な問題になるとb型の例はしばしばあることは周知のとおりである。テストに予想問題が出たため実力以上の成績をとれたというのはb型ではあるまいか。

この課題の正答率の低かったのは第2の観点より見ることができなかったためと思う。直観的に解答している生徒（J型）も第1の観点より見ている。

㋥の問題

$AB-AC>PB-PC$　の証明



第1の観点 ―― 1つの三角形の辺（角）の大小関係

$\left.\begin{array}{l} AC\rightarrow AC' \\ PC\rightarrow PC'' \end{array}\right\}$ の移動

$AB-AC=BC'$

$PB-PC=BC''$

$BC'>BC''$　の不等式が成立するかどうか。

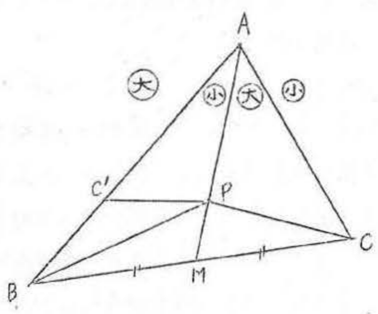
第2の観点 ―― 三角形の2辺の差と1辺の大小関係

$AB-AC>PB-PC$

の式の形，つまり課題の構造的要求より考えて，

$AB-AC=BC'$　とおきかえて，

$BC'>PB-PC$　の不等式の論証が可能か。



第2の観点では$PC=PC'$であれば図より不等式は成立するから課題は解決される。ところで$PC=PC'$は一般的には成立しないことが確認される。

第3の観点

第1，第2の観点を捨てて条件を再吟味すると，どちらも　$BM=MC$　という条件をつかってないことに気づく。この条件を生かすにはどうすればよいか。三角形の中線は頂角をどのように2分するのか思い出す。その性質を活用できないかと考える。反面，第1，2の観点を再吟味して，課題の構造より第2の観点にちがいないと考える。

第3の観点

これは第2の観点の変形である。図をよくみると，さきほど明らかなようにPC＝PC′ではないがPC＞PC′であることも明らかなようだ。（難問題はとくに図を正確に作る必要がある。）PC＝PC′ならいちばん都合がよかったのであるけれども，それは不成立であり，それなら次の策としてPC＞PC′なら解決策があるかと考える。

AB－AC＝BC′＞PB－PC′　　　である。

PC＞PC′　　　であるとすれば，

PB－PC′＞PB－PC　　　である。

よって，　AB－AC＝BC′＞PB－PC′

AB－AC＝BC′＞PB－PC　　　として解決するであろう。

PC＞PC′　　の既有知識を確認する。

このようにして問題解決の見通しがつく。

問題を解くときは，既知の定義や定理をもとにして解くわけであるが，むずかしい問題になると既習の問題の結論を借用して解かなければならない。このような既習の例題や既習の問題を補助問題というならば，むずかしい課題にはこの補助問題が多いのである。㈣の問題はPC＞PC′がわかるための補助問題があるが，この補助問題をわすれておってはほとんど解決できないし，かりにできたとしても証明が長くなったり，したがってまた，目標をとりちがえて，補助問題の証明を課題の証明と誤解したりすることもある。したがって学年が進むにつれ知識の構造連関が広く高くならなければならないことになる。

誤答のJ型は，いわゆる直観幾何（論証幾何以前の幾何）の域を脱していないものや，あるいは脱していたとしても，いろいろの観点では不可能のため，窮余の策として既有経験である直観幾何にたよったのであろう。K型（誤答）は基礎学力の不足の者が，問題をただ形だけからとらえた典型的な誤答であろう。

第三章　結　び

長い研究をたどってここまできたのであるが，結局は小，中，高の児童生徒の身につけさせなければならない数学的な思考 ── 問題解決を保証し，数学をさらに発展させるような思考の観点，数学的な方法にはどんなものがあるか，それを身につけさせるにはどうすればよいかということであった。指導法の研究は永遠の課題とも考えられるが，ここで一応いままでの研究をまとめることにする。

I　数学的観点・方法について

第１次研究ならびにその後の授業の実践によって次のことを数学的観点や方法であると考える。

- 条件分析 ── わかっていることは何か，それから何がわかってくるかと考える。
- 目標分析 ── 求めるものは何か，そのためになにがわかればよいかと考える。
- 全体のあるいは部分的な見とおしを立て，方針を定めて処理にあたる。
- 既有の経験をどう役立てたらよいかと考える。すなわち，似たような経験との異同を比較しその結果が利用できないか，その方法が適用されないか，わかっている問題に変形できないかと考える。
- 図をかいたり，その表象を頭に思い浮かべたりして考える。
- 具体的な場面に即し，具体的に思考操作をする。
- 基本的な要素をとらえ，分析し，総合する。
- 数量を考える場合に，基準の量，すなわち単位量をおさえて考える。
- 数量や操作を文字や記号で表わし，関係を式で表わして考える。
- 順序よく，あらゆる場合を考える。
- 特殊 ── 一般の関係をおさえる。
- 行きづまったら観点を変えて考えなおす。
- 対応関係をおさえる。
- 用語や記号の意味，計算の規則で考える。
- 公式や定理 ─ 数量や図形の基本的な関係で考える。
- 簡単化して考える。

以上を数学的観点，方法と考えたが，このすべてが妥当であり，遺漏がないかどうかは，今後の研究にまたなければならない。次にこれらの観点について考察を加える。

これらの観点・方法を授業に適用する場合はできるだけ一般性のある，しかも具体的なコトバを使用するのがよい。たとえば，小学校5年の研究授業で用いた対応させる意味の「そろえる」という観点は，非常にわかりやすく児童にも親しみやすい。また適用範囲もひろく，上級の数学にも用いることができる。ポリアの「似た問題を知っているか」⑭などというコトバは小，中，高のいずれの段階でも適用できる用語である。「かんたん化して考える」の観点も同様である。しかしこの観点は，小学校の5年生の下位群，4年生以下の児童には困難のように思われた。それは用語としてはわかりやすくとも，思考としては抽象的になるからである。ドウンカーは「この特殊化は有意味なことであり，まさしく一般的発見方法である。」⑮といっているが，この特殊化の観点は高校においては効果的であるが，中学校，小学校では適当でないように感じた。しかし，これを操作におきかえて考えられるようにできれば有効と思う。高校生は抽象的な用語によっても，観点の指導は可能のようである。中学校2年の文字を数学におきかえる比較群法による実験研究の授業の観点，つまり文字を数字におきかえる観点は，具体化の原理によったもので，わかりやすい具体的な数値におきかえて関係を把握しようとすることが有効であろうと考えたわけである。

条件分析，目標分析の観点はいずれの学年においても，どんな問題においても必要不可欠な観点ではあるが，実践例のとおり小学校ではとくにこの観点を身につけさせておかなければならない。高校になると困難な問題に遭遇したときにだけこの観点が必要のように考えやすいが，やさしい問題においても，無意識のうちにこの観点をたてているものと考えなければならない。

以上は，研究授業によって試みた観点の考察であるが，これらの観点を体系化し，構造化できないかと試みたが，小，中，高をとおし，しかもすべての教材に適用できる観点の構造化は至難であった。しかし，小，中，高のいずれかに校種を限定し，図形教材というように，教材の範囲を縮少して，究明するならば，部分的な観点の構造化は可能のように思える。このような指導のくふうがなされたならば，問題解決に多いに役立つであろう。

児童生徒の身につけさせるべき数学的観点，数学的方法は，数学の各教材の本質についての検討と，今後児童生徒にどのような数学の学習を期待するかという将来の見とおしと，さらに児童生徒の心理的発達段階とをふまえ，今後とも地道に研究を進めていかなければならないのであって，この研究でおわりをつけたわけではない。

Ⅱ　思考力を伸ばす学習指導の原則

この研究の目標は小・中・高校の児童生徒の身につけさせるべき数学的な思考（生産的思考）—問題解決を保証し，数学をさらに発展させるような思考の観点，数学的な方法には，どんなものがあるか，そのような思考力を伸ばす学習指導はどうあるべきかを追求し，学習指導上の原則を見いだすこ

とであった。したがって第1次研究の成果により，6つのことがらを第2次研究仮説としてかかげ，これの例証につとめてきた。この例証はじゅうぶんではなかったが，一応，この研究仮説を，思考力を伸ばす学習指導の原則として次にかかげて，第2次研究の成果より考察する。ただし，この各原則の趣旨については紀要〔1〕に詳細に述べてあるので，参照されたい。

1. 算数数学科の指導は，数学的な観点や数学的方法を身につけさせること，一数学的な思考の力を伸ばすことをねらいとして行なわなければならない。

小学校5年の研究授業で「そろえる」という観点による指導例をあげた。この観点は非常に有効であった。ブルーナーは「うまく教えているときには，生徒の75％のものが中位以上であるのではないかといつも思われる。」⑯といっているが，指導が有効であったか，失敗したかの判定にはこの体験が非常に重要である。どの指導でもそうであるが，観点や方法は，児童生徒になじみやすいコトバ，したがってわかりやすいコトバであること，そのコトバを正しく理解させることによってその観点・方法を身につけさせることができるのである。しかしそのように観点が身についたとしても，観点の質的発展は望めないようである。たとえば，この実践例の

単純型 $\left(\begin{array}{l} ax+by=m \\ ax+by=n \end{array}\right)$（P 58） はよくわかっても，複雑型 $\left(\begin{array}{l} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{array}\right)$

で，「xの係数をそろえればよい」ということはわかっていても，どうそろえるのか，方法がわからなかった。複雑型のいちばんかんたんの型は $\left(\begin{array}{l} x+2y=39\text{円} \\ 2x+3y=66\text{円} \end{array}\right)$（P 58）で，$x$の係数が1と2の場合であるが，これさえわからない。それで，一方を2倍することを教えなければならない。これをかりに観点の質的発展という。この質的発展は，優秀の児童でもわからなかった。しかし，もっともかんたんな複雑型の問題 $\left(\begin{array}{l} x+2y=39\text{円} \\ 2x+3y=66\text{円} \end{array}\right)$ がわかってくると，優秀児は

複雑型 $\left(\begin{array}{l} 2x+3y=a \\ 3x+5y=b \end{array}\right)$（$P$ 58）の解決方法を発見した。これは2倍するという方法を教えられることによって「倍する」という方法で，xの係数をそろえることの操作を行なったのであって

「倍する」ということよりみれば，さきの場合 $\left(\begin{array}{l} x+2y=39\text{円} \\ 2x+3y=66\text{円} \end{array}\right)$ と等質の観点に属すると考えられる。つまりこの場合は，量的変化であって，質的変化ではない。いいかえれば，優秀児であっても，そろえるという観点の量的発展はできるが，質的発展は教えなければならなかったのである。この「そろえる」という観点は上級の数学にも非常に重要な観点であるので，小学校時代から身につ

けさせることがたいせつなのであり，身につけさせるには，「そろえる」というコトバを実際の場面に即して理解して教えることが重要になる。それにしても現在の5年生では $\left(\begin{array}{l} 2x+3y=a \\ 3x+5y=b \end{array}\right)$ の型（xの係数をそろえるために両方の式を何倍かする型）までわからせる必要はないと思われる。

中学校2年生の文字指導の実験授業について考えてみる。紀要〔2〕〔3〕に詳細に掲載した実験授業は第2回目の実験で，第1回目の実験は学習効果があらわれなかった（有意差がなかった）ので紀要〔2〕に簡単に記述するにすぎなかった。この文字指導の実験においては比較群，統制群とも指導時間は，第1回目の実験授業は2時間，第2回目の実験授業は5時間であった。第2回目の実験においては，学習の一時的効果において有意差があっただけでなく，1年後における学習の永続的効果においても有意差があらわれたので，学習効果がたしかに身についたと結論したのである。

以上の実践例や実験研究は，数学的観点方法を身につけさせる指導であるので，この原則1の例証としてあげたのである。

2. 数学的な思考の力は，具体的に数学の教材を学習する過程において，かつ，それにおいてのみ育てられる。

紀要〔1〕において，数学的な思考の方法や観点は一般的，形式的に知識として授けようとしても，実際の問題解決に役立つ身構えとはならないものであることを例にあげて証明してある。
したがって，次には，このような観点は具体的に算数数学の教材を学習する過程においては身につけさせることができるという例証が必要になるわけである。このことはいうまでもなく当然のことであり，日々教師は学習効果を認めているのであるが，この研究では，中学校2年の文字指導の実験によってもこのことを例証したと考えてよいと思われる。

ただし，ここで少しほりさげて考えておかなければならないことは，世に多く行なわれているとおり，一群法によって，事前テストと事後テストの正答率を比較し，事後テストの正答率が高まったので，あるいは2つのテストの間に有意差があったので，その指導法はよい指導法であると即断することである。かりに事後テストによって正答率が高まったとしても，その指導法はよいとはいわれない場合もありうる。たとえば，この研究の高校の実践例の誤答分析によってもわかるとおり，この実践例と異なる機械的指導法が有機的指導法（上からの指導法）より正答率が高まり，学習の一時的効果は，大きくなることがありうるように思われるが，かりにそのような結果であったとしても，機械的指導法はよいとはいわれない。

3. 教師の説明は，数学的な思考の過程にしたがつて行なわれなければならない。

思考は，問題の意味の確認にはじまり，一応のまたは部分的な見とおしの成立から，予想－処理－予想の修正－処理の過程をたどるのが本来の姿である。中学校においても図形教材には補助線をひくとかんたんに解ける問題があるが，この補助線を引ければ，問題は半ば解決したのであって，どうしてその補助線を引くのか，補助線を引くのにどう指導すればよいのか。この指導が思考過程にしたがって行なわれなければならない。数学の問題を解くにはまた基本的な型を考えることもできる。たとえば，小学校の実践例では，図をかいて関係を見つける問題の解き方として，次の５段階による指導を行なった。

① きいていること（目標分析）

② わかっていること（条件分析）

③ もんだいの図（構造把握）

④ 式と答え（問題解決）

⑤ たしかめ（吟味）

この５段階は，この種類の問題解決の基本的な形と思われるが，ある時期には，このような型の指導が必要であると思われる。したがって，応答分析によってもわかるとおり，テストにおいても，このとおり書かせるように要求した。しかし，これは決して児童の思考の自由をさまたげるのではなく，問題解決の合理的な過程をふませるのであるから，かえって将来は，正しい意味の自由な思考の発展の素地になると考えられる。しかし，いつまでも，いつまでもこの段階を強制することは，個人差に即応した指導法とはいえない。この研究授業のときわかったことであるが，式や答えをさきに書いて（しかも，式も答えも正しい。）次に，図をかいている児童もあった。また，いつまでも５段階を忠実にかかせると，わずらわしくて，かえって思考をさまたげることになろう。したがって，５段階の指導ののちには自由な記述による指導がなされなければならないと思う。

教師の説明は，このような合理的な思考過程を考えて，この５段階のような思考過程による説明もまたたいせつであると思われる。

4. 教師は，児童生徒が数学的な観点から問題に対処し，数学的な方法で問題を処理するよう，その思考を方向づけなければならない。

問題を考える場合，問題場面を理解し，与えられた条件や目標の確認が，まず行なわれなければならない。これは現実の授業でも，かなり注意されているようである。

次に見とおしをたてることになる。これは思考の過程で，最も重要な段階であると思うが，この点の指導が，実際の授業で，どの程度留意されているであろうか。ただ「よく考えなさい。」「見とおしをたてなさい。」というだけで，見とおしが成立するものではない。どのような観点から，どのような方法で，処理すれば見とおしが可能になるのか指導しなければならない。

問題の構造を把握し，解決の予想を得るのは，然るべき数学的な観点から問題をみつめたときであり，観点が異なれば同一の対象でも異なった構造のものとして姿を表わす。たとえ具体的な事物現象が，目に見えるように示されたとしても，それを見，それを考える観点がなかったら，何も見ることはできないであろう。関係把握や洞察をさせようとするならば，児童生徒の思考を方向づけ，そのような数学的な視点，そのような数学的な方法で問題に対処するようにしむけなければならない。

児童生徒の思考の観点を統一し，方向づけることなしに発せられる「よくみてください。」「何か気づいたことはありませんか。」というような教師のコトバは，児童生徒の思考を前進させたり，発展させるのに何の効果もないことは，紀要〔1〕の授業の観察分析でもみてきたところであり，観点を支えることによって，あるいは，児童生徒が自ら観点をたてることによってだけ，思考の前進，発展を考えることができるということは，さきの実践例のとおりである。

5. 児童生徒が問題解決に成功し，または失敗した決定的な原因が，このような数学的な観点に立ち，このような数学的方法で思考を進めたか否かにあることを，児童生徒に自覚させなければならない。

数学的な観点や思考の方法は，単に知識として知っているだけでは，新しい問題を解決する場合に，能動的にはたらく生きた力にはなり得ない。それが心的傾向となり，積極的な行為的態度となったとき，初めて身につけた力となる。そのためには，実際の問題解決の場で，それに成功し，または失敗した決定的な原因がどこにあったかを痛切に体験させ，自覚させなければならない。さきの授業の実践例はすべてこの体験を取り扱ったものであるが，なかでも高校の単純化の観点，小学校の「そろえる」観点の取り扱いにはこの納得の体験がめだったように思われた。この体験がつまり，「納得の体験」であり，「ハ，ハアの心理」である。

次の問題を解法で示したように，かんたんな方法でできるだけ早く，答えをだすように要求して中学校3年生に実施してみた。

① 7856×999	② 5745×9999
$= 7856 \times (1000-1)$	$= 5745 \times (10000-1)$
$= 7856000 - 7856$	$= 57450000 - 5745$
$= 7848144$	$= 57444255$

その結果は，次のとおりであった。生徒総数は47名である。

①の問題の応答分析

正答者　26名
- 簡便法でやったもの　2名
- 普通の計算をやったもの　24名

誤答者　19名

無答者　2名

②の問題の応答分析

正答者　21名
- 簡便法でやったもの　2名
- 普通の計算をやったもの　18名
- 不明のもの　1名

誤答者　19名

無答者　7名

この問題を簡便法で計算を行なった上記の2名の生徒は，このような計算を簡便法で行なった過去経験のある生徒であった。中学校3年生なら999は1000より1つ少ない数であり，9999は10000より1つ少ない数であることぐらいは知っているのであるが，このような問題解決の観点としては，よほど優秀なものでないかぎりあらわれてこないのである。やはり新しい観点は教えなければならないことになる。この新しい，初めての経験の観点を教えるとなるほどと気づく。これが，「なるほどの体験」であって，この体験をはっきり自覚させなければならない。

次に，短い時間の指導後，下記の問題を同じ要領で課して解答を求めた。

指導後テストの問題ならびにその簡便法による解答，および結果は次のとおりであった。

③
$$\begin{aligned} & 6943 \times 998 \\ = & 6943 \times (1000-2) \\ = & 6943 \times (1000-1-1) \\ = & 6929114 \end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned} & 7486 \times 9899 \\ = & 7486 \times (10000-101) \\ = & 7486 \times (10000-100-1) \\ = & 74103914 \end{aligned}$$

③の問題の応答分析

正答者　20名
- 簡便法によるもの11名
- 普通の計算によるもの9名

誤答者　22名
- 簡便法によるもの15名
- 普通の計算によるもの7名

無答者　5名

④の問題の応答分析

正答者　14名
- 簡便法によるもの　3名
- 普通の計算によるもの10名
- 方法の不明のもの　1名

誤答者　30名
- 簡便法によるもの　17名
- 普通の計算によるもの13名

無答者　3名

この例によっても「なるほど体験」の効果があったように思える。

また，複雑なあるいは抽象的な問題で，児童生徒が解決の見とおしをたてられないで苦しんでいたり，誤ったりした場合，教師の指導によって図をかいてみたら，「ああ！そうか。」と，すぐ理解したとすれば，これは「なるほど体験」であり，教師は児童生徒に，この図をかいてわかったことを自覚させ，身にしみて感じさせることができたら，今後，この児童生徒は，複雑な抽象的な問題で頭の中で考えただけでは，考えられない問題にぶつかった場合，「図をかいてみよう」とするのではないだろうか。

6. 児童生徒の知識，技能が，体制化されたものとなるよう指導しなければならない。

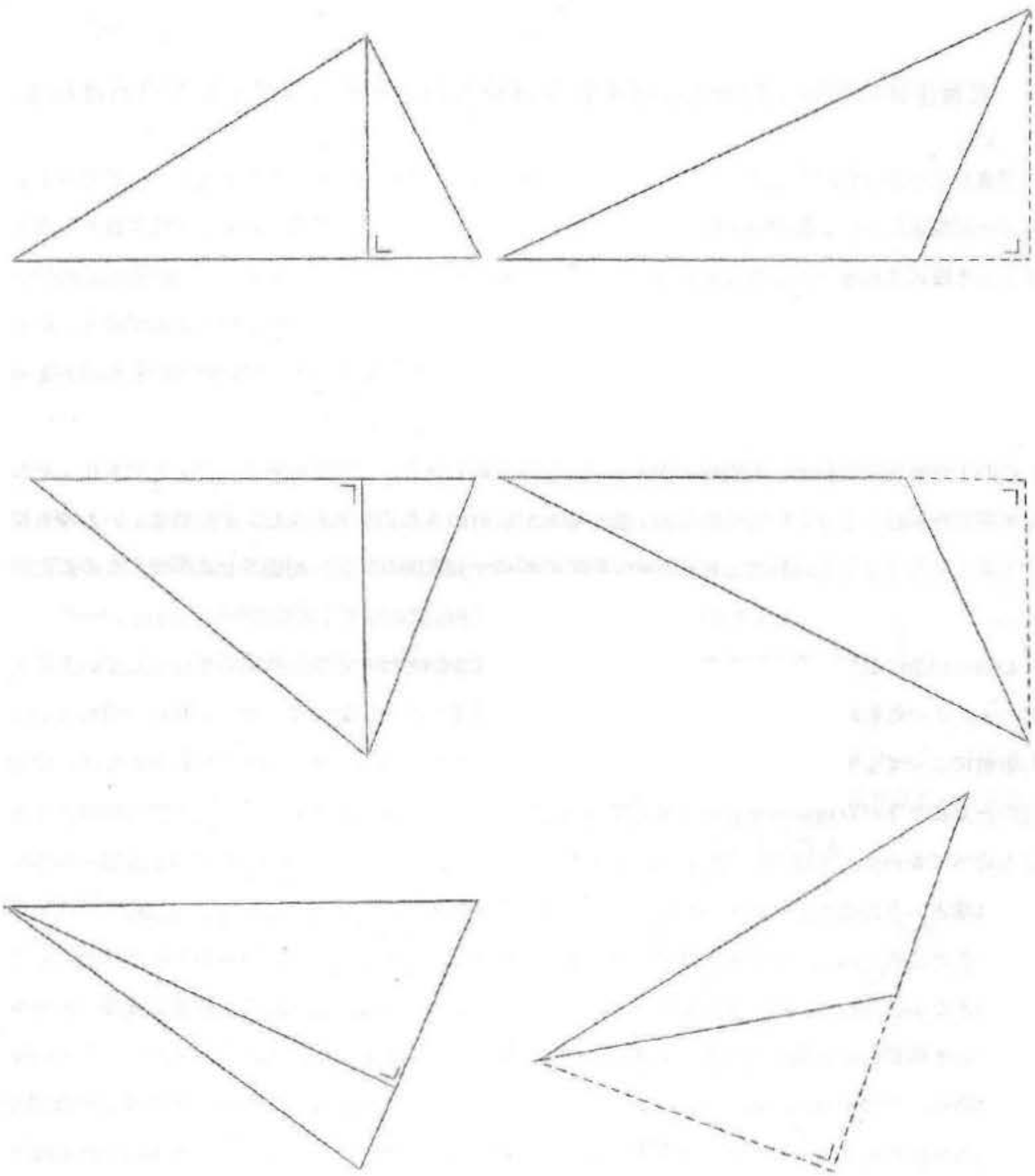
児童生徒の理解し記憶している知識などが，個々ばらばらな断片的なものの集まりとしてでなく，たがいに関連し合い，体系づけられたものとして，いいかえれば，構造化され，体制化されたものとなるよう指導されなければならないということである。基礎的な知識技能がおたがいに強固に結びつけられていること，すなわち，児童生徒の経験が体系的に整理されるようにということである。新しく学習した知識技能等が，他のそれらとどんな関係があり，経験体系のどこに位置づけられるかを考えた指導でなければならないということである。

このような児童生徒は，問題を構成するひとつの要素，ひとつの概念を考えると，ただちに，それと本質的な関係をもっている他の要素，他の概念が思い出されるであろうし，その概念，いわゆる媒介要素を意識することが思考を発達させ，問題の構造や要素間の関係を把握させる契機となることが多い。

知識が構造化しているということは，具体的な教材においては，どういう関係が成立していることなのか。このことについては，小学校の場合は，紀要〔I〕にも記述してあるし，高校の場合は，図形教材によって，実践例で示したとおり詳細に述べたつもりである。ただ，中学校においては，構造化のためにコトバの理解が不じゅうぶんであると思われるから，とくに，そのことの指導が重要であると述べておいた。知識の構造化について新しく例をあげるならば，三角形の面積の，底辺×高さ÷2＝面積という公式がかりにわかっているとする。これは中学校の生徒ならやさしい公式と思う。しかし，この公式がほんとうにわかっているかどうか，適用できるかどうか，いいかえれば構造化しているかどうか。この公式が構造化しているということは，この公式を適用して，底辺と面積がわかっているとき面積が出せるということ，また高さと面積がわかっているときは底辺が算出されるということである。つまりこの公式について，逆思考が成立していなければならないのであるが，その公式がわかる前提として，適用できる前提として，底辺や高さというコトバがよくわかっていなければならない。たとえば，中学生でも，底辺とは， 山形の三角形（次頁の上段の三角形）の下の辺と思っ

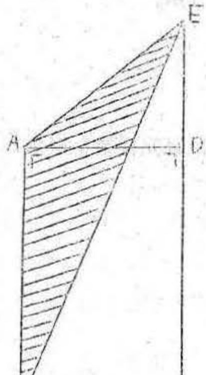
ている生徒がある。高さになると，いっそうほんとうの理解はより困難になる。

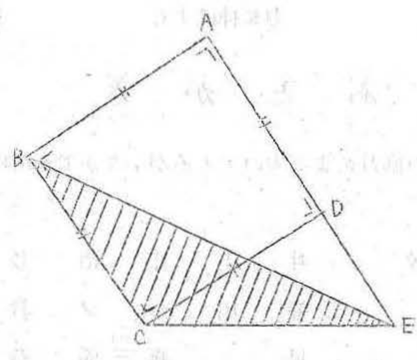
中学校3年生程度で，ほんとうに三角形の底辺と高さの意味を理解しているといわれるためには，次の条件を満足していなければならないと思われる。次の図のいずれの場合も，図を見て，どれが底辺で，どれが高さであるかわかること。また，三角形の底辺や高さを説明するためにこのような場合の図もかかれるし，コトバで底辺や高さの定義（意味）もいわれるようでなければならない。



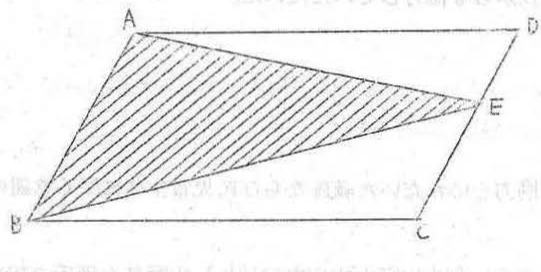
三角形の高さや底辺をわからせる基本的な図形としては，前頁の６つが考えられるが，６つの図形の上の２つが 山形 の図形で，このような 山 形 の図は，教科書にもかいてあるし，教師もつねに板書するのである。 したがって，生徒も 山 形 の 図形の場合は思考も容易である。ところでさきの下の４つの図形においても，どれが底辺であり，高さであるかわからなければならない。図形には本質的属性と非本質的属性とがある。図形の空間的位置は非本質的なものであるが，生徒の図形の概念は本質的な属性と非本質的な属性とがいっしょになって形成されているので，問題解決に役立たないことが多いのである。いいかえれば，図形の空間的位置がかわると，どれが高さであり，底辺であるかわからなくなる。したがって実際指導にあたっては，図形の空間的位置を変化させることによって，（それも多くの場合でなくても，代表的な場合の３つぐらいでよいと思う。）非本質的属性を捨象するとともに，コトバによって正しく底辺や高さの意味を表現できるようにすることが必要なのである。

次に，基礎的な場面において，三角形の底辺や高さがわかったとしても，図形の複雑な場面において直ちにこれを適用できるとはかぎらない。したがって，複雑な図形においても理解できるような指導がなされなければならない。





左図のような複雑な図形においては，底辺や高さの定義（意味）をコトバでいわせることによって，どれが底辺であり，高さであるかを推論させるとともに頂点を平行移動させるという観点よりの指導も考えられる。



左図の平行四変形のなかにある三角形ABEの高さをADと考える生徒がある。これは，四角形，$ABCD$が長方形であった場合の過去経験により直感的に判断した誤りと思われるが，これは，三角形の高さの定義（意味）をコトバで正しくいわせる指導によってこの誤りを訂正しなければならないと思う。

三角形の面積の公式が適用されるためには，三角形の高さや底辺の概念が，正しい指導過程によってて抽象化され一般化されていることが必要なのである。

以上の6つの原則によって指導することが，思考力を伸ばす学習指導法であり，そのような思考力が問題解決の成功を保証し，数学をさらに発展させるのではあるまいか。

以上の記述によって，これまでの3年間（本研究所としては5年間）の研究を一応おわるわけであるが，学習指導法の研究は永遠の課題ともみられる。こんごともこの研究をつみかさねることによって，いっそうたしかなものにしたいと思っている。教育の本質は，愛する文化を，愛する子供たちにつたえることであるとするならば，数学教育の本質は，愛する数学を愛する子供たちにつたえることになろう。したがって何よりもまず数学教師は数学を愛し，こどもを愛さなければならない。数学を愛するとは，数学に親しみ，これをきわめることであろう。こどもを愛するとは，数学のわからないこどもたちを，数学のわかるようなくふうをこらして教え育てることであろう。このような教師によって初めて，こどもたちの生産的な思考力を伸ばすことができるのではなかろうか。

あ と が き

この研究は，多くの方々の協力によるものであるが，なかでも次のかたからは研究授業を担当していただいた。

新潟市立南万代小学校	井上庄治	教諭
同　上	笹川セツ	教諭
新潟市立白新中学校	星　喜三郎	教諭
同　上	小松一子	教諭
新潟県立新潟南高等学校	清野昭一	教諭

なお，この研究は，以上の学校のほか次の学校からも協力していただいた。

北蒲原郡豊栄町立葛塚小学校

新潟市立中野小屋中学校

新潟市立鳥屋野中学校

この研究をおわるにあたり，協力校としてご協力をいただいた職員ならびに児童生徒に深く感謝の意を表する。

なお，この研究の第1次は，前研究員（現，西蒲原郡吉田町立吉田中学校長）山野井嘉瑞氏の担当されたものであって，第2次の研究は，同氏の助言指導によるところも多く，ここに厚く謝意を表したい。（研究担当者　研究員　大森忠勢　）

参　考　文　献

① S．I．ハヤカワ著　大久保忠利訳　思考と行動における言語（岩波現代叢書）　P164

② メンチンスカヤ他著　駒林邦男訳　ソビエト・学習心理学（明治図書）　P139

③ ①の著書　P155

④ カルル・ドウンカー著　小見山栄一訳　問題解決の心理（金子書房）　P 76

⑤ 同　上　P 80

⑥ 中桐確太郎著　論理学綱（大観堂）　P280

⑦ 石谷茂著　論証の新しい指導（明治図書）　P 91

⑧ 同　上　P92.　P99. ― 月刊数学教室No.47. 1958，11月号
「図形の論証指導について，兵藤鎮馬」

⑨ ヴイゴツキー著　柴田義松訳　思考と言語下（明治図書）　P153～P243

⑩ 同　上　P 78

⑪ 同　上　P213

⑫ 同　上　P214

⑬ 同　上　P221

⑭ G，ポリア著　柿内賢信訳　いかにして問題をとくか（丸善）　P163

⑮ ④の著書　P 67

⑯ J，S，ブルーナー著　鈴木祥蔵他訳　教育の過程（岩波書店）　P 12

研究紀要第29集　算数，数学科の問題解決における思考過程とその指導〔1〕新潟県立教育研究所

研究紀要第36集　算数，数学科の問題解決における思考過程とその指導〔2〕新潟県立教育研究所
― 文章題指導の実験的研究 ―