Ⅲ 考　　察

学級集団を対象とする授業では，児童生徒の学習活動を左右する要因は極めて多い。教材の性格はもちろんのこと，児童生徒の知能，性格，学習意欲，既有経験の質と量，教師と児童および児童相互の人間関係，教材提示の順序，方法，時期，教師のことば，動作，板書，児童生徒の発言のとり上げ方から家庭や地域社会の状態，施設設備や教具，学校の行事や天候などの児童生徒に及ぼす心理的影響など，一々数え上げることはできない程である。教師の教育観，教材観，児童観や授業型態などの問題もあろう。しかも，それら多くの要因が複雑にからまり合った中で，学習活動は展開される。そこに授業の特質がある。

したがって，授業そのものを研究の対象とする場合には，それらの要因はすべて見逃すことのできない条件であり，それらの要因がどのようにからまり合うことによって，学習活動がどのように変っていくかを追究しなければならないであろう。

しかし，この研究は，学習指導そのものを研究の対象としているのではない。あくまでも児童生徒が，算数数学の問題を解決する際に，どのように考え，どのような契機で思考が前進，停滞するものかを見ようとしているのである。

したがって，考察の焦点をここに置いて，以下，この授業の観察記録からうかがい得ることを述べてみよう。

1　第一日の授業を便宜上１８の分節に分ける。　（　）内は経過時間を示す。

第１分節――提示された図形が「整った形」であることに気づかせ，本次学習の目的を指示する。
（０分～１１分）

・　教師は６枚の対称図形と４枚の非対称図形を示し，「さあ，何か気がついた人はありませんか」と問うている。しかし，挙手する児童はなく，指名された者も，あらかじめ教科書について学習してきたP36を除いては，教師の期待するような答をしていない。教師は「よく考えてください」「何か気がついた人はありませんか」など，数回くり返し，かなりの時間を与えているが，児童の反応はない。

質問の意味が児童に理解されないからだといえようが，質問の意味がはっきりしないということは，言い換えれば，**これらの図形をみる観点が示されていない**ということである。観点なしに事物現象に対持しても何も見えず，何も考えられないのは当然である。しかも，児童は，何とかして教師の期待にこたえようと努力している。そこに，多くの児童が不安を感じている所以がある。

・　（８分），教師がP36，それを受けたP55の「そろっている」「重なっている」という発言をとり上げ，「みんなもそう思いますか」と問えば，ほとんど全員が「そうだ」となっとくする。教師のことばなどによって，これらの図形を見る観点が一応示されたからである。

第２分節――直線を折り目にして折り重ねると，全く重なる図形であることに気づかせる。
（１１分～１６分）

・　教師は対称図形①～④を示し，「何か気づいたことはありませんか」と問うているが挙手するものはない。この図形をどのような観点からみるのかがわからないからである。

「この４つの図形をずーっと通してみて，何か共通なことはないですか」とも問うている。教師は，この４つの図形に共通な「折ると重なる――対称である」という性質を抽象し，一般化することを示唆したつもりであったかも知れないが，児童には理解されない。したがってやはり挙手する児童はなく，強いて指名されれば，「鳥のようだ」「桜の花みたいだ」「田みたいだ」と答えている。

・ 教師は，教科書について予習してきたＰ361人の「折ると重なる」ということばにすがって，児童を次の学習段階に誘導しているが，「折ると重なる」ことをなっとくしたと思われる児童はほとんどいない。

せめて「この４つの図形のそれぞれを２つの部分にわけて比べてみると，どんなことがいえるか」とでも問うことによって，児童に，どのような観点からこれらの図形をみさせようとしているのかを了解させたら，児童はもっとすなおに「二つの部分が全く等しい」こと，それを確かめるために「折り重ねてみると重なる」と考え進めることができたであろうと思われる。

・ 第１～第２分節からいえることは，**思考の観点がとらえられないような発問，児童の思考を方向づけることなしに行なわれる「何か気がついたことはないか」というような発問は，徒に時間を空費するだけで，児童の思考をうながし，深めるよいう点からはほとんど意味がない**，ということであろう。

第３分節　折り目の直線を引いて，折ると重なり合うことを，作業によって確認させる。
（１６分～２６分）

・ 「折ると重なるかどうか」という観点からみるのだということが了解されたこの分節では，ほとんどの児童が容易に折り目の線を引いている。①～④の図形が「折ると重なる図形であるか否か」を見抜くこと自身には，児童は何等の困難も感じていない。第１～第２分節に見られた児童の思考の停滞混迷は，全く，どのような観点から見るのかが了解されなかったからであることがわかる。

・ この分節の前半の作業は，折ることを要求されたのでなく，折り目となる直線，すなわち対称軸を引くことを要求されただけであるので，多くの児童は，折ってみないで直ちに直線を引いている。しかし・その直線に疑問を感じ，不安を覚えたと思われる児童は，自分から折って，あるいは紙を少し折りまげる動作をしてみて，折り目の線を考えている。直接折る動作をしない児童にも，おそらく，頭の中で折り重ねるという動作を思い浮かべながら，すなわち，**具体的な折るという動作の表象で考えていつた**ものも多いことと思われる。

・ Ｐ41の折り目の線の引き方などから考えると，この児童は対称図形の性質を，かなりのところまで見抜き，その性質にもとづいて直線を引いていることがうかがわれる。

たとえば，台形の折り目の線は，上底，下底それぞれの長さを測って中点をとり，それを結んでいるが，これは「対応点を結ぶ称分が対称軸で二等分される」ことを，一応見抜いているからといえよう。ただ，それらの性質が自覚されず，一般化，定式化されていないだけのようである他の児童についても同様のことが言える。

・ この分節の後半，折り重なることを確認する作業の段階で混乱がみられる。これは，折り目の線を引く技術の未熟から，引かれた直線が児童の意に反し，正しい対称軸の位置からずれていたこと，したがって折った場合に正しく重ならなかったことによる。

作業の順序を逆とし，折り重ねてみて，折り重なることを確認し，そのあとで，自ら生じた折り目の線に注目させるようにすれば，この混乱はさけられたであろう。

第4分節――「直線について対称な図形」の意味（定義）を知らせる。（２６分～２９分）

第5分節――①の図形について，折り目の線が２本あることに気づかせようとする。（２９分～３０分）

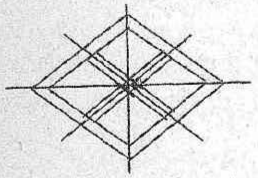
・ ここでもまた「この線の引き方について感じた人いませんか。」「この直線について考えがある人，気がついたことがある人，さっき引いて，あ！こうだな，そう思ったような」と，くり返し問いかけている。第１，第２分節で述べたように，この種の発問は，児童の思考を深めるに効果があったとはみられない。再三の問いかけで，挙手する者が１１名までふえているが，答を求めることなく「それはあとにします」といって打ち切っているので，この１１名もはたして教師の意図するように対称軸の数について考えていたものかどうか疑問である。

・ なお，この分節は，授業全体の流れからみた場合，全くの道草である。

第6分節――「対称の軸」の意味（定義）を知らせる。（３０分～３２分）

第7分節――対称軸を引く作業をとおし，対称軸が何分もある図形があることに気づかせる。（３２分～５４分）

・ ①の図の対称軸を４本と考えた児童が数名ある。これは，平行四辺形の対辺の中点を結んだ直線を対称軸と考えたからであるが，



対称――折り重ねると重なる――二つの合同な図形，という考えから逆に，合同な二つの図形にわけるような直線が対称軸なのだと考えてきたものであろう。

・ 具体的に，重なり合うかどうかを折って確めるという行動で，児童は容易になっとくしている頭の中だけで考えた児童も，おそらく，頭の中で折り重ねる動作をしながら考えていたものと思われるし，またそれが，正しく対称軸を引く方法であろう。**具体的な場面，具体的な行動，またはその行動の表象で考える**ということである。

第８分節以下についても，同様のことがいえる。

第8分節――折った時に重なる点を見つけさせる。（５４分～６０分）

・ 考える手がかり，すなわち，思考の方法や観点――折り重ねるということが示されている。したがって，重なる点を考え出すことには格別の困難も感じられないし，P33のように誤った場合も，その方法，その観点を確認させることによって，容易にその誤に気づかせることができる。

第9分節――「点」の意味について考えさせる。（６０分～６１分）

・ ここで「点とは何のことですか」と問いかけている。しかし，点の厳密な定義を与えようとしたわけではなく，またその必要もないわけである。ここで点の意味などを取り上げたことは，児童の思考の流れを混乱させただけであり，授業の目的や流れの上からみて，全くの道草であるといえよう。

第10分節――折った時に重なる線，角，三角形などについて考えさせる。（６１分～６７分）

・ 第８分節と同様に，考える方法や観点が明瞭であり，且，具体的な動作やその表象で考えているので，格別な困難は感じられない。

第１１分節 ―― 対応の意味（定義）を知らせる。（６８分～７２分）

・ ここでは「対応」の定義を与え，第８，第１０分節で実質的に考えさせてきた対応関係を「対応」という用語を用いて表現させ，対応という用語になれさせようとしたものである。もっと早くこの用語を知らせた方が能率的であると思われるなど，授業という点から考えると，いろいろいえるであろうが，第８，第１０節と同様に，思考の点では格別問題になることはないと思う。

第１２分節 ―― 対称な図形の書き方を考えさせる。（７２分～８０分）

・ 児童は，いろいろな観点 ―― 方法，着眼，アイデア，立場など，いろいろの言い方があろう ― から考えており，したがって作図の方法もいろいろなものが考え出されている。

イ　ある児童は直接に「重なるように」という点からくふうし，

ロ　ある児童は，今まで学習してきた「対応」という観方から，辺や角が対応関係になるようにと考え，

ハ　ある児童は，対称な図形 ―― 重なる ―― 合同，という一連の関係を漠然とながらも考え，とにかく合同な図形を書こうと考えているようである。

・ これら児童の考えは，何れも対称図形の本質的な性質に根ざした考えであって，貴重なものである。例えば，

イ　図形を分析して，点，線，角等の基本的な要素をとらえ，その対応関係を考えたり，

ロ　「対応する図形は裏返しの合同である」ことをおさえて考えたり，

しているわけである。

これらの観点を整理し，自覚させ，定式化，一般化して定着させることは，この教材の指導の目標から考えても重要な意味をもっていると思われる。この点を見逃し，結果において，折角の児童の考えが軽視されたことは残念であった。

・ 教師自身が，この分節の学習から「対応する点と対称軸との関係」を引き出そうという初の計画にとらわれすぎていたように思われる。用具を制限して強引に誘導しようという努力も無効であった。児童の笑声には，教師の強引さに対する抗議の意味が含まれているとみるのは考え過ぎであろうか。

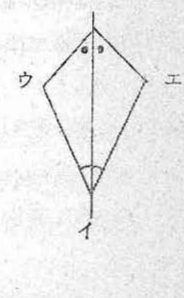
児童の思考を方向づけない限り，この状態は続くであろうと思われる。

第１３分節 ―― 対称な図形を書かせる。（８０分～８５分）

・ 第12分節についてのべたとおり，思考の観点が統一されず方向づけられていないので，思い思いの方法で作図している。前節でみられた多様な思考が，そのまま，頭の中から作業の場に移されたに過ぎない。

第１４分節 ―― 教師のまちがった作図を批判させる。（８５分～９４分）

・ ここでも第１２，第１３分節と同様なことがいえる。第１２分節～第１３分節では，児童の思考が同一の状態に停滞し，思考の発展がみられない。



・ P41は，P66の発表したのは右図の∠ウアエ＝∠Rの意味であると，きき違えている。この児童は，対応する角に注目して右図のように作図しているので，関心が∠ウアイや∠イアエからはなれられなかったからであろう。

第１５分節 ―― 対応の意味を復習する。（９４分～９５分）

・ ここで突然，対応の意味を復習させているが，これは格別，児童の思考を方向づけるために役立っていない。むしろ，思考の流を中断したに過ぎず，これも無用の道くさのように思われる。

第１６分節─再び，対称図形の書き方を考えさせる。（９６分〜１００分）

・ 依然として児童の考えは，それぞれの立場からの考え方をしており，思考の発展はみられない

・ この分野の終りで「これは何の対応を使ったのでしようか」という教師の発言がみられるが，これは，「対応する直線の長さは等しい」ことが定式化されていて初めて意味のある質問となる定式化がなされていなかったために，この質問がここでなされた意味は，多くの児童に了解されなかったようである。

第１７分節─「対応する点を結ぶ線分は対称の軸で垂直に二等分される」ことに気づかせ，それを利用した対称図形の書き方を考えさせる。（１００分〜１０７分）

・ たまたま教師の意図にそうP14 1人の発言にすがり，「対応する点を結ぶ線分が対称軸によって垂直に二等分される」ことを導き，それを利用した対称図形の作り方を説明しているが，**このような考え方の生まれてきた観点が明瞭にされていないので**，多くの児童にはなっとくされなかったようである。このことは次の分節で，再び混乱する原因となる。

・ 「対応点の性質」と，児童が対称図形を考える場合の重要な観点，よりどころとなっている「折ると重なる」こととの関係が意識されていない。ここに，教師の意図的，強調的な指導にもかかわらず，この性質が児童に了解，定着しない原因がある。

第１８分節─「対応する点を結ぶ線分が対称軸で垂直に二等分される」性質を中心とし，対称図形の書き方をまとめようとする。（１０７分〜１１５分）

・ 第１２分節以降，対称図形の書き方を考えさせる過程で対応する点を結ぶ直線と対称軸との関係に気づかせるよう努力してきたことを，ここでまとめようとしたものであるが，さきにも述べたとおり，**児童の対称図形の書き方を考える場合の視点が統一されておらず，対称図形の分析の視点がはつきりと定まつていない。**したがって，この分節に至って再び，いろいろの意見がとび出し，教師はそれをまとめるに苦労している。もちろん教師の意図している重要な学習内容が児童に理解されず，定着しない。

・ 「対応点と対称軸との関係」を，対称図形を書く作業を通じて気づかせようとするならば・児童の思考を方向づけ，その関係が浮かび上ってくるような視点に立たせなければならない。図形の基本的な要素である頂点に注意させ，対応する点と対称軸との関係に目を注ぐようにし向けなければならない。そして，それまでに対応図形を考える場合の基本的なより所となっている「重ね合わさる」という観点から，その関係を考え出させるように導かなければならないものであろう。

そのような，図形分析の視点を明瞭にとらえ，児童の思考をそのような方向に統一し得なかった所に，この授業が，したがって児童生徒の思考が，同一次元に低迷し，予想以上の時間を費した最も大きな原因があると考えられる。

２ 第二日の授業を，便宜上，つぎの１９分節に分けて考察する。

第１分節 ──「直線について対称の図形」の意味の復習，（１分〜４分）

・ 対称の意味 ── 全く重なり合う図形，について復習している。前次の指導と，本次のこの復習

で，児童の思考や操作の観点，方法が方向づけられ，以後一切の思考や作業がこの観点から進められている。児童は自分で自由に考える場合には，「対称な図形――重なり合う――二つの部分が合同である」という観点から考えており，さほどの混乱はみられない。

第2分節――「対称の軸」「対応」の意味と，「対応する点を結ぶ線分と対称軸との関係」の復習。（5分～12分）

・「対応する点を結ぶ直線と対称の軸との関係」についての復習が中心である。しばしば述べたように，前次の指導では，この関係が，児童が図形を見る場合の観点とし操作する場合の方法原理としている「折り重なる」ということと，どう結びつくのかが示されていない。したがって児童には，この関係が対応するということの定義であるのか，定義から導かれた性質であるのかがはっきり理解されておらず，「対応する点を作図したり」「対応する点かどうかを検証したり」する場合の方法原理とまでは理解されていない。

したがって，この性質に関連する発問には挙手するものも少なく，なっとくできないようすがうかがわれる。たとえば第2，第7分節など。教師もこの分野の最後で「ここはまだよくわからないんだな」と気づいている。

・教師はこの点の理解不十分に気づいて，第2，第7分節その他で，これを補うための努力をしている。しかし依然として，「折り重なる」という児童の観点からの発展として指導がなされず定義の斉唱など，やや形式的，機械的な記憶を強いる傾向が見られる。したがって児童の理解も第8分節P81の発言などからうかがわれるように，やや形式的，機械的のようであり，第4，第9分節の作業や第5分節P42，第11，第12分節の応答などに見られるように，児童が自由に考える場合には，教師の期待に反して，「折り重なる――半分にわける――合同」という視点で考え，作業している。

第3分節――三角形の種類について復習する。（12分～13分）

第4分節――三角形の対称軸を引く作業。（13分～20分）

・さきにも述べたとおり，児童は，「折り重なる――半分にわける――合同な図形」という観かたで作業している。たまたま，垂線を引き，あるいは中線を引いた児童も，対応点の性質を考えたというより，こうすれば二つの合同な図形にわけられる，半分に分けられる，二つの部分が折り重なる，と考えてのようである。垂線を引いた児童はその足が中点であることを，中線を引いた児童はそれが底辺に垂直であることを，確めた形跡がない。

第5分節――不等辺三角形の対称性（21分～23分）

・前述のとおり，「対応点を結ぶ直線と対称軸との関係」に関連する問に対する児童の反応はにぶく，「折り重ねる」という角度からのみかたは，ほとんどの児童になっとくされる。**児童の思考の具体性――折り重ねるという具体的な操作の表象で考えており「対応点の特質」が考える場合の方法的な原理にまで高まつていない**からである。

このことは，つぎの分節についても同様である。

第6分節――二等辺三角形の対称性。（23分～27分）

第7分節――「対応する点と対称軸との関係」を「点の対応関係を確める方法」として復習する。（26分～33分）

・対応する点と対称軸との関係が十分理解されていないと感じた教師は，この分節でこれを復習

させ，対応関係を確かめたり対称図形を作ったりする場合に，この性質から考えることができるようにしようとしている。

しかし，たびたびのべたとおり，この性質が，児童の思考のよりどころとなっている「折り重ねる」ということからの自然の発展として指導されず，いささか形式的，機械的に記憶を強いたきらいがある。

第8分節——正三角形の対称性，（３３分～３７分）

・ 前半，正三角形の対称軸は，ほとんどの生徒がみつけているが，後半，対応点の性質に関する問答は，少数の児童だけが応答しているようである。依然として，児童の考え方と，教師が意図している考え方との間に，くい違いがあるように思われる。

第9分節——四角形に対称軸を引く作業。（３７分～４９分）

・ P41の作業をみていると，対応する辺の長さや角を測って等しくしたりして，合同な図形に分けられるかどうかという考え方で作業をしており，時には，折り重ねる動作をして考えている。隣のP31が，一般の四辺形の対角線を引いたのをみて「折られるか，こんなの」ともいっている

・ P41の作業をみていると，頭の中だけでの考えで疑問のある場合は，定木を対称軸と思われる部分にあてたり，実際に直線を書いたりして考えているのもある。当然なことではあるが，抽象的に頭の中だけで考えるより，具体的な図を書くことが考えやすくなるからであろう。

第１０分節—一般の四角形の対称性。（４９分～５０分）

第１１分節—台形の対称性。（５０分～５３分）

第１２分節—平行四辺形の対称性。（５３分～５９分）

第１３分節—長方形の対称性。（５９分～６２分）

第１４分節—対角線が対称軸となる四角形。（６２分～６４分）

第１５分節—正方形の対称性。（６４分～６５分）

第１６分節—菱形の対称性。（６５分～６７分）

第１７分節—四角形の対称軸の数についてのまとめ。（６８分～６９分）

第１８分節—円の対称性。（６８分～６９分）

第１９分節—対称軸の数の多い図形は整った形であること。（７０分～７１分）

・ 第１２分節以降については，分節ごとに考察することを省略したが，さきにもいったとおり，児童は常に，「折り重ねると重なる——半分にわけると合同になる」という見地から図形をみ，対称軸を引くなどの作業を進めており，その作業の結果が正しいかどうかもまた，この見地から考えている事情が，いたるところでみられる。

3. 以上に，二日間にわたる４時間分の授業の観察記録からうかがい得る児童の思考の様態をみてきたのであるが，これを要約するとつぎのようにいえると思う。

・ 児童の思考の観点，対象に立ち向かう場合の視点が示されない限り，たとえ認識したり考えたりする図形などの対象が，具体的に目に見えるような姿で提示されても，児童には何も見えないということである。考えるには考える観点が必要であり，認識するには認識の枠組が必要である対象の本質を見ぬかせようと考えるならば，その本質を見抜けるような視点が必要である。重要

なことは，**児童の思考を方向づけて，そのような観点から対象を見，考えるよう統一することである**。それなしに，単に，「何が見えますか」「どう思いますか」「何か感じたことはありませんか」というような質問は無意味であり，時間の空費にすぎない。

・　逆に，対象の本質，問題の構造を見抜き得るような適当な視点からさえ対象に立ち向かえば，その構造や本質を見抜くことは容易である。対象自身が，自らその本来の姿を表わしてくるものと考えられる。

児童は，「折り重ねると重なる」という視点から，一切の思考，作業を，格別の困難なしにやっている。

・　児童の思考を深め，対称のより本質的な性質を認識させることは，より高い，新たな観点に立って対象を見ることだともいえよう。しかしその新たな観点は，それまで児童が考える場合のより所となっている今までの観点との関連なしには理解されないようである。「対応する点を結ぶ線分が対称軸で垂直に二等分される」ことの認識は，「折ると重なる」ということより高度に抽象的であり，したがって児童にとってむつかしいものであろうことは事実である。しかし，もし，この両者の関連が理解され，**「折ると重なる」という観点に立つ思考から「対応点の性質」の認識に立ち至った経緯**を児童に理解させたら，この性質の理解ももっと容易であったろうし，この法則を，児童が図形をみたり作業したりする場合の方法原理に高めることもできたのではないかと考えられる。

・　思考は，頭の中で行なわれるものであり，抽象的な概念の操作である。しかし，**その概念の操作は，具体的な行為の概念の世界への引き写しである**。したがって，抽象的で，あるいは複雑で考えにくい問題の場合は，身体的な行為の場にひき戻し，あるいは図を書いてみるなどの半具体的，中間的な段階にまで立ち戻って考えるものであることも，この授業の中にその例が多い。

・　この研究は，個人面接によって児童の思考の様態や過程を明らかにすることを主とし，授業の観察分析はそれを補うためのものであると共に，集団の場における思考に個人面接の場合のそれと異なったものがあるかどうかをみることを目的として行なったものである。いわゆる集団思考は，児童相互が，批判し合い討議し合うような場面で，最も典型的に表われるものであろう。しかるにこの授業は，教材の性格や児童の能力の実態などの関係からであるが，観察記録で見られるとおり，主として教師と児童との一問一答の姿で進められた。したがって，集団の場における思考の特質らしいものはその片鱗さえうかがうことはできなかった。

しかし，これは授業型態がこのような思考をみるために不適当であったからというだけのことではなく，そもそも，個人面接においても授業という集団の場においても，個々の児童生徒の思考の様態や過程には，本質的な相違がないからではあるまいか。

けだし，個々の児童生徒にとっては，個人面接の場合と授業の場合とでは，視点の変更をうながしたり思考を混乱させたりする刺激が，教師または調査者という特定の個人から与えられるか，教師及び級友という不特定の誰かから与えられるかの相違にすぎないと考えられるからである。

4.　論点を明瞭にするために，この考察ではいささか極端な言い方をして，授業をしてくださった先生に礼を失した点もあったかと思う。

初めにもいったとおり，この授業は，研究所および学校のいろいろの都合から，ずいぶん無理な条件の中で，無理な計画で実施してもらったものである。作業の多い授業であるとはいえ，小学校

の児童に2校時にわたる長時間の授業をしたこと，対応する点と軸との関係を対称図形を作るという作業をとおして考えるようにしたことなどがそれである。

授業としてみた場合，「対応」「無数」などの用語の説明や，さきの考察に述べたようなことなど，いろいろ批判の余地はあると思うが，しかし，記録からもうかがわれるように，

- 長い時間にわたって，児童の関心を引きつけ，あきさせない授業をしていること，
- 児童ひとりひとりの発言を尊重し，教師の意図にそわないものであっても一応は必ず取り上げ，まちがった発表をした児童には，どこかで必ず正しく理解できたかどうかを確かめようとしていること，
- 指名その他の方法で，ほとんど全部の児童に発言の機会を与えようとしていること，

など，勝れた教育観や教師と児童とのいわゆる人間関係などがうかがわれるものがある。

第七章　算数数学科の指導

――第二次研究の仮説――

この研究は，直接には児童生徒の思考の過程や様態を具体的に究明することをねらいとして行なわれたものであり，これについては既に述べたように，

・　児童生徒の思考は，既有経験を土台とし，それによって規制される。

・　しかし，前提となる知識技能があるだけで問題は解決できるのでなく，問題の構造を把握し数量関係を直観して解決の見とおしを立てるには，数学的な方法によって問題を処理し，数学的な観点から問題に立ち向かうことが必要であること，

・　その数学的な観点や方法として，どんなものがあるか。

・　さらに，児童生徒の思考が行きづまり，あるいは発展して行く具体的な様想，

などのことをみてきた。

もちろん，限られた教材について，限られた児童についての面接調査や授業の観察分析であるので，数学的な方法や観点というべきもののすべてを尽しているわけではないが，それらがどんな性格のものであるかについては，ほぼ明らかになったと思う。要するに，第三章にかかげた研究仮説は，ほぼ実証できたと考えられる。

ところで，この研究は，究極的には算数数学科の指導法の改善をねらいとしているものであり，指導法の改善を直接の目標として行なわれる第二次研究につながるものである。ところが授業は，他のいろいろの要因がからまり合ってくるものであり，この研究の結果のみから直ちに第二次研究の仮説が生まれてくるものではない。したがって，第二次研究の仮説や方法は・一応，新たな観点から考えられなければならないといえよう。

しかし，算数数学科の目的が，算数数学を学習することによって，児童生徒がこれを武器として現在または将来において直面する課題を解決し，あるいはより進んだ数学を学習できるような能力，いいかえれば，数学的思考の力を伸ばすことにあると考えるならば，児童生徒の思考の過程や様態に関する知見が，算数数学科の指導を考える場合の有力な基礎になるのは当然であろう。

この意味で，この研究の結果，またはこの研究の過程において考えられた指導法上の問題点を取り上げ，これについての見解をのべてみたい。第二次研究の仮説ともいえるものである。

I　算数数学科の指導は，数学的な観点や数学的な方法を身につけさせること――数学的な思考の力をのばすことをねらいとして行なわなければならない。

1.　問題解決にあたっては，単に前提となる知識技能があるだけでは成功しない。もちろんその問題を理解するに必要な生活経験や，解決の前提となる知識技能，たとえば用語の意味を理解していることや公式，定理などを知っていること，計算の技能などが必要である。しかし，このことは，逆に，これらの知識技能さえあれば自動的に，直面した問題の構造を把握し，解決の見とおしが立てられるというものではない。

したがって，既成の数学の知識技能をできるだけ多く授けておくということだけでは，新しい問題を考えたり理解したりする力とはならない。これらの知識技術とともに，問題の構造を把握し，

10

関係をとらえ，解決の見とおしを立て・既有の知識技能の中からこの問題解決に必要なものを選択適用するなど，いわゆる数学的な思考力が必要である。このことは，この研究の過程で明らかにされたことであると思う。

2. 基礎的な知識技能を授け，それをいわゆる理解させ，記憶させ，それを適用するなどの思考の力は，応用の場で養えばよいという見解もあるようである。われわれはこのような見解をとらない。

基礎的な概念，公式，定理といわれるものも，このような公式や定理は，ある観点に立って，ある方法で数学の対象を処理した結果，生まれてきたものである。その根底となる観点や方法をぬきにしたら，単なる丸暗記は別として，真に理解することは不可能であろう。若しまた，それが可能であるとしても，基礎的といわれるものは，数学の中で最も重要，基本的な教材であり，最も多くの時間と努力が注がれるものである。なおまた，見方によれば，小中高校の算数数学の教材は，すべてこれ基礎的なものともいえるであろう。このような重要な教材の指導においてこそ，数学的な思考の力は養なわるべきものであって，これをぬきにして・応用の場のみで養えば良いといえる程思考力を軽視する見解には，われわれは賛成し得ない。

3. 問題の構造をとらえ，関係を把握し，見とおしを立てる力――思考力の中核は，問題に対処し，これを処理する数学的な観点であり，方法であることは，この研究で見てきたとおりである。これらが思考力に equal であるということは言い過ぎであるとしても，少なくとも，それによって問題の構造は明らかとなり，それなくしては，たとえ具体的に目に見えるように提示された対象についても，その構造はつかめず，したがって解決の見とおしは立たない。なおまた，観点や方法が異なれば問題の構造も異なったものとして姿を顕示し，したがって解決の方法や手順も異なってくる

このようなことから考えると，思考力を高めるということは，このような数学的な観点や方法を児童生徒の身につけさせるということであり，これが算数数学の授業の重要なねらいとなるべきであろう。

4. 思考力――少くとも，数学的な観点や方法は，成熟または自然の成長発達によって，自から伸びてくるものとは考えられない。

たとえば，いくつかの数や量を1つのまとまり，すなわち単位とみる――記数法の原理や測定，割合などの根底となっているもの――など，児童生徒が成長するにつれて自から身につくものだとは考えられない。学校，家庭，社会などにおいて，何等かの学習，逆にいえば指導がなされた結果はじめて身につくものと考えられる。若しまた，成熟や自然の成長によって可能になるものだとしても，それには人類が経験したと同様，数千年の歳月を要するであろう。

数学的な観点や方法は，指導しなければならないものであり，教えなければ身につかないものと考える。

II 数学的な思考の力は，具体的に，数学の教材を学習する過程において，かつ，それによつてのみ育てられる。

1. 数学的な思考の中核的な働きは，数学的な観点から，数学的な方法で問題に対処することでありそのような観点や方法を身につけさせることが数学の指導の重要なねらいであるとすると，それでは，そのような数学的な思考の方法や観点を，数学以外の他の教材の指導によって伸ばすことも可能ではないか，という疑問が生ずる。

さきに第一章で数学の本質を考えた場合にものべたとおり，数学はその対象が自然であると社会であるとを問わず，数学で用いられる基礎的な概念が，具体的な事物現象と，どうかかわり合っているかは問題にしないものである。数学的思考の発展系列そのものが数学である。したがって，数学的思考はこの数学自身を学ぶことによって最もよく学習される。

もちろん，他の自然科学や社会科学も，数学的思考と無縁ではない。数学の対象が具体的な内容を持たず，ある意味では形式的であるからこそ，すべての他の諸科学や技術学の基礎となり得るのだといえるのであるが，とにかく，数学は他のすべての科学の重要な基礎となり，手段となっている。その限りにおいて，理科や社会科における思考も数学的思考と無縁ではなく，それらの教科の学習が数学的思考の伸長に寄与する面はあろう。しかし数学的思考は，それの結集であり発展系列である数学の学習においてのみ，最も効果的に育て得るものといえよう。

2. 数学的な思考は，抽象的，一般的に，「数学の問題を考える場合には，このような観点から，このような方法で考えるものです」というような，いわば数学的な観点や方法についての知識を授けるという方法で身につけさせることができるものであろうか。

一般の技術を身につけさせるなどの場合にもいえるように，技術的な知識をもっているということは，確かに技能習得においても重要な要因にはなろう。しかし，単なる知識は技能とは異なる。数学的な思考の観点や方法は，そのような一般的，形式的な方法ではなく，具体的に，数学の教材を学習する過程においてのみ養われると考えるのである。

この間の消息を実証する資料を，つぎにのべてみたい。

3. この研究は，数学的な観点や方法を，抽象的，一般的な形で示唆することが，実際の問題を考える場合に，児童生徒の思考を望ましい方向に規制し，したがって解決に成功するという結果が得られるかどうかをみるために行なったものである。

調査の対象となったのは，協力校としてお願いしてある小学校2校（5年生），中学校2校（2年生）計4校である。

各学校とも，約１００名ずつの児童生徒を同数ずつの2群に分け，知能，学力の両面から，各群の個々の児童生徒を対応させて考えても，各群の平均，分散の点から考えても，等質となるようにくふうした。（分散はF検定，平均はt検定，何れも危険率5％でも有意差なし）

これら等質のグループに，3～4題ずつの問題を与え，実験群にはその問題を考える場合に有効だと思われる観点や方法を，問題用紙の最初に示しておき，統制群にはその示唆なしに，その他は全く同一条件で，作業制限法によって解答させた。その後同一の示唆によって，同一類型の問題について，統制群，実験群を交換して調査してみた。

この調査で実験群に与えた示唆は，つぎのとおりである。（問題は，示唆Ⅰについてのみかかげ他は省略）

示唆Ⅰ　複雑な問題やむつかしい問題は，図を書いて考えると，わかりやすくなります。（小学校）

問題　第一回

(1)　３０mはなれて，電柱が2本立っています。この間に，5mずつはなしてやなぎの木をうえたいと思います。やなぎの木は何本いるでしょう。

(2) 直径が7cm，高さが12cmある茶づつを，ふたつならべてちようどはいる箱をつくりたいと思います。箱の，たて，よこ，高さは，それぞれどれだけにしたらよいでしよう。

(3) はる子さんは，おはじきを，ゆき子さんの2ばいの数だけもっています。あき子さんは，ゆき子さんの3ばいもっています。あき子さんは，はる子さんの何ばいもっているでしよう。

第二回

(1) しようゆのはいっているびんが2本あります。1本には18dℓ，もう1本には12dℓ はいっています。両方が同じになるようにするには，多い方から少ない方へ，どれだけ入れたらよいでしよう。

(2) ご石が8こずつ5れつならんでいます。外がわに，もうひとまわり，ならべたいと思思います。ご石はもういくついるでしよう。

(3) 一郎さんの組の人数は45人です。夏休みに海や山にいった生徒の数を，先生が手をあげさせて，しらべています。

海にいったものは25人で，山にいったものは33人でした。海と山の両方にいったものは20人いましたが，この20人は，海にいった人をしらべた時にも，山にいった人をしらべた時にも，手をあげました。

海にも山にもいかなかった人は何人でしよう。

示唆Ⅱ 問題を解くときには，

求めるものは何か，そのために何がわかればよいか，

わかっていることは何か，それから何がわかってくるか，

と考えていくと，問題がときやすくなります。（小学校）

示唆Ⅲ いろいろの場合を，順序よく，おちのないように考えていくと，ただしく解けます（小学校）

示唆Ⅳ 問題を考える場合には，実際にやる場合のようすを思い浮かべながら考えると，わかりやすくなります。（小学校）

示唆Ⅴ 何を単位として（どれだけを1とみて）考えたらよいかに注意して問題を考えると，わかってきます。（小学校）

示唆Ⅵ わからない数量を文字や○，□などで表わし，式を立ててから考えると，わかりやすくなります。（中学校）

示唆Ⅶ 数の大きさや点の位置などを変化させて考えてごらんなさい。その際，数の大きさや点の位置が変っても，変化しないもの（一定のもの）を見つけると，問題を解く手がかりになります。（中学校）

以上のような調査の結果を各問題ごとの正答率でみると，小学校では，のべ41題中7題に，中学校では，のべ24題中1題に，僅かに有意差が表われているが，しかし，示唆ごとにまとめてみると，何れの示唆もこれが有効だったといえるものはない。し細に検討すると，例えば示唆Ⅰについては，確かに図に書いて考えた児童に正解者が多いのであるけれども，図を書いて考えた児童の

数は，この示唆を与えられた実験群とこの示唆を与えられなかった統制群とで，差が見られない。

これは，このような数学的な思考の方法や観点は，具体的に，算数数学の教材を学習する過程においてのみ，身につけられるのであって，一般的，形式的に，知識として授けようとしても，実際の問題解決に役立つ身構えとはならないものであることを示していると思う。

Ⅲ 教師の説明は，数学的な思考の過程にしたがつて行なわれなければならない。

1. 授業の中では，教師が問題解法や証明を説明する，教える，という場合も多い。児童生徒が主体的に考え，発見するよう指導しなければならないともいわれるし，そのようにくふうすることは，もちろん重要なことではあるが，時によって教師が中心となって説明するという場面も，全面的に否定することはできない。なおまた，多くの児童生徒が自ら発見できるよう，指導のくふうがなされたとしても，一部の児童生徒は他の児童生徒や教師の説明によらなければならないものもあるであろうし，また，児童生徒が考え出した解法なり証明なりを，整理し，説明してやらねばならない場合もあろう。

何れにしても，説明ないし講義それ自身は必要であり，必ずしも否定すべきものではない。

ところで，説明または講義は，現象的には教師が主動権を持ち，児童生徒は消極的，受動的に，きいているだけのように見える。しかし，児童生徒が真にその説明なり講義なりを理解し，受け入れるためには，児童生徒がその内容を主体的に考え，なっとくしなければならない。表面的にはともかく，頭の中では，児童生徒自身が，その説明や講義の道すじに即しながらも，自ら考え，自ら了解していかなければ，真の理解には達し得ないであろう。

2. このように考えると，教師の説明は，当然，児童生徒の思考の過程にしたがって行なわれなければならないことになる。

数学は形式論理の発展系列であり，既成の数学は，演繹論理の一本道であって，そこにまわり道もなければあと戻りもない。しかし，数学を考え出し，創造した思考が，このような形式論理の，演繹論理の一本道を辿ったというのではなく，既にしばしば述べたとおり，思考は，問題の意味の確認にはじまり，一応のまたは部分的な見とおしの成立から，予想 — 処理 — 予想の修正 — 処理，の過程を辿るのが本来の姿である。この思考の道すじをあとで反省し，組み変え，整理したものが既成の数学であるといえよう。したがって，既成の数学においては，数学的思考そのものは内にひそみ，でき上った結果だけが強く表にあらわれる。

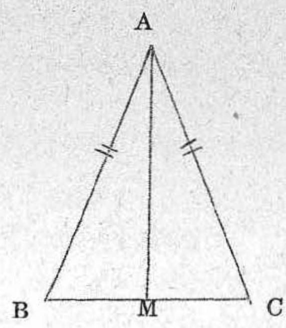
どのようにして，どんな予想を立て，どのように処理し，どのように修正されたか。どのような方法で，どのような観点から立ち向った結果，そのような構造，そのような関係が把握されたのか一言にしていえば，どうしてそのような解法や論理に気づいたかは，既成の数学では深層にかくれこれをうかがい知ることのできるものは，よほどの才能に恵まれた一部の優秀児に限られる。これを表面にとり出し，すべての児童生徒に見えるようにしてやる所にこそ，説明や講義の意味がある

したがって，数学的な思考を育てるためには，既成の数学をそのままの姿で提示し，いわば数学書を読んでやるというのではなく，その公式，定理，解法が考え出された過程，すなわち，思考の過程にしたがって説明し，講義することでなければならない。

数学の知識を多くもっているもの，必ずしも優れた教師でなく，自ら数学するものが優れた教師であることも，この間の事情を物語るものであろう。

3. 例をあげて説明したい。

今，手許にある教科書，学図「数学」中学２年をみると，「二等辺三角形の両底角は等しい」ことを，つぎのように扱っている。



例１. △ＡＢＣでＡＢ＝ＡＣならば ∠Ｂ＝∠Ｃ である。

条件　△ＡＢＣで，　ＡＢ＝ＡＣ

結論　　　　　　∠Ｂ＝∠Ｃ

説明　ＢＣの中点をＭとし，ＡＭを結ぶと

△ＡＢＭ と △ＡＣＭ において

ＡＢ＝ＡＣ，　ＢＭ＝ＣＭ　で

ＡＭは共通であるから，３辺がそれぞれ等しい。

∴△ＡＢＭ＝△ＡＣＭ　　∴ ∠Ｂ＝∠Ｃ

なる程，教科書はこれでよいであろう。しかし，もし教師がこれと同様なことのみ話したのだとしたら，それで十分とはいえまい。この証明には論理的に間然するところはなく，生徒もこの事実を承認せざるを得まいが，その結果は，この事実または証明の手順を記憶するにとどまることになり，この問題を学習したことが，新しい問題を解決する場合の思考力に，どれだけプラスしたか疑問である。

この問題を考える山は，「中線ＡＭを引いてみよう」という，一応の見とおしを立てることにある。

もっとも素朴な方法としては，∠Ｂと∠Ｃが等しいかどうかをみるのは，重ねあわせてみることであろう。こうした具体的な行為の段階における方法を思い浮かべてみる時，自からその折り目として，中線ＡＭ，または　Ａの二等分線ＡＭが浮かびあがり，二つの三角形が合同になるという見とおしが成立するものであろう。

あるいは，「線分や角の等しいことをいうには，それらの線分や角を対応辺とする三角形の合同がいえればよい」という方法原理を，既に身につけているとすれば，「∠Ｂ＝∠Ｃを証明するためには何がわかればよいか」と考え，積極的に ∠Ｂ，∠Ｃを含む三角形を作ろうとしてＡＭを考え出すかも知れない。何れにしても，いきなり，「中線ＡＭを引けば」ではなく，ＡＭを引くという見とおしが，どのようにして成立したかが説明されなければならない。

同じ教科書に，連立方程式の解き方として，最初につぎのような例がでている。

例　２数の和が２５でその差が５である。その２数を求めよ。

解，２数のうち，大きい数をｘ，小さい数をｙとすれば，次の連立方程式ができる。

$$\begin{cases} x+y=25 & \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x-y=5 & \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1)と(2)の辺々を加える

$$\begin{array}{rl} & x+y=25 \\ +) & x-y=5 \\ \hline & 2x\ \ =30 \\ & x\ \ =15 \end{array}$$

(1)と(2)の辺々を引く

$$\begin{array}{rl} & x+y=25 \\ -) & x-y=5 \\ \hline & 2y=20 \\ & y=10 \end{array}$$

（以下略）

教科書として，これで良い悪いをいうのではない。ただ，もし教師が，いきなり，「(1)と(2)の辺々を加える」と説明したら，肝心の，どうして辺々相加えまたは引けば，という予想なり方針なりが生まれてきたかが，生徒に不思議に思われはしないであろうか。

もちろん，このような方針が生まれる考え方は，いろいろあるであろう。つぎのように考えるのもその一つである。

今まで学習した中で，似たようなものはないか，

それと，どこが同じく，どこが違っているか，

この問題を変えて，その問題に帰着させられないか，

もし，このように考え，一元一次方程式を想起し，未知数が２つである点に違いがあり，したがって，何とかして未知数を１つなくする方法はないかと考えたとしたら，思考は一歩前進し，加減法や代入法に気づくきっかけとなりはしまいか。

しかも，このように，既有経験とその異同を比較し，類推し，既有経験に帰着させるという考え方は，思考の方法としては基本的なものであろう。

Ⅳ　教師は，児童生徒が数学的な観点から問題に対処し，数学的な方法で問題を処理するよう，その思考を方向づけなければならない。

1.　問題を考える場合，問題場面を理解し，与えられた条件や目標の確認が，まず，行なわれなければならない。これは現実の授業でも，かなり注意されているようである。

つぎに見とおしを立てることになる。これは思考の過程で，最も重要な段階であると思うが，この点の指導が，実際の授業で，どの程度留意されているであろうか。ただ「よく考えなさい」「見とおしを立てなさい」というだけで見とおしが成立するものではない。児童生徒は，やむなく試行錯誤を行なう。そして「でたらめをやってはいけない」と叱られ「すじ道を立てて考えなさい」とさとされ，やがて，「数学は嫌な教科」ということになる。こんな状態が見られなければ幸である徒らに洞察のできないことを嘆くべきでなく，どのような観点から，どのような方法で処理すれば見とおしが可能になるのかを指導しなければならないと思う。

2.　問題の構造を把握し，解決の予想を立て得るのは，然るべき数学的な観点から問題をみつめた時であり，観点が異なれば同一の対象でも異なった構造のものとして姿を表わすことは，この研究を通じてみてきたとおりである。たとえ具体的な事物現象が，目に見えるように示されたとしても，それを見，それを考える観点がなかったら，何も見とることはできないであろう。関係把握や洞察をさせようとするならば，児童生徒の思考を方向づけ，そのような数学的な観点，そのような数学的な方法で問題に対処するようにしむけることであろう。

児童生徒の思考の観点を統一し，方向づけることなしに発せられた「よくみてください」「何か気づいたことはありませんか」というような教師のことばは，児童生徒の思考を前進させたり発展させるのに，何の効果もないことは，授業の観察分析でもみてきたところである。

Ｖ　児童生徒が問題解決に成功し，または失敗した決定的な原因が，このような数学的な観点に立ち，このような数学的方法で思考を進めたか否かにあることを，児童生徒に自覚させなければならない。

1.　数学的な観点や思考の方法は，単に知識として知っているだけでは，新しい問題を解決する場合

に能動的に働らく生きた力にはなり得ない。それが心的傾向となり，積極的な行為的態度となったとき，はじめて身についた力となる。そのためには実際の問題解決の場で，それに成功しまたは失敗した決定的な原因がどこにあったかを痛切に体験させ，自覚させせなければならないであろう。

2. 例をあげよう。複雑な，または抽象的な問題で，児童生徒が解決の見とおしを立てられないで苦しんでいたり，あるいは誤ったりした場合，図を書いてみせたら「あ！そうか」と，すぐ理解したなどのことは，面接調査にもその例があり，教師もしばしば経験していることであろう。このような場合，問題が解けたのだからそれでよしといってすましていたのでは，これと同一の問題に出あった時にこれと同一の方法で解決できるようにはなるであろうが，要するに再生的思考であり，新しい問題に出あった場合にどのように考えるかという生産的思考にプラスするものは少ないであろう。「ひとりで考えていた時にはあれ程いろいろ考えてもわからなかったのが，教師の書いた図をみたらすぐわかった。なる程，図を書いて考えるとわかりやすくなるものだなあ」ということを自覚させ，身にしみて感じさせることができたら，今後，この児童生徒は，複雑な，抽象的な問題で頭の中で考えただけでは考えられない問題にぶつかった場合，「図を書いてみよう」とするのではないだろうか。

VI 児童生徒の知識，技能が，体制化されたものとなるよう指導しなければならない。

1. 児童生徒の理解し記憶している知識などが，個々ばらばらな断片的なものの集まりとしてでなく互に関連し合い，体系づけられたものとして，いいかえれば構造化され，体制化されたものとなるよう指導されなければならないということである。基礎的な知識技能がお互いに強固に結びつけられた小体制，小構造をもっており，それらの部分構造がさらに大きく構造づけられていること，すなわち，児童生徒の経験が体系的に整理されるようにということである。新しく学習した知識技能等が，他のそれらとどんな関係にあり，経験体系のどこに位置づけられるのかを考えた指導でなければならないということである。

このような児童生徒は，問題を構成する一つの要素，一つの概念を考えるとただちに，それと本質的な関係をもっている他の要素，他の概念が思い出されるであろうし，その概念，いわゆる媒介要素を意識することが思考を発展させ，問題の構造や要素間の関係を把握させる契機となることが多い。

2. 面接調査記録の中から例をあげよう。

面接調査（小，３）の問題は，全体の距離２４００mと歩いた速さ６０$^{m}/_{分}$，歩いた時間２５分，走った速さ１５０$^{m}/_{分}$を与えて走った時間を求める問題であるが，速さ，時間，距離，三者の間には本質的な結びつきがある。

距離÷時間＝速さ

速さ×時間＝距離

距離÷速さ＝時間

これら三者の関係を理解している児童は，歩いた速さと時間から，歩いた距離が出せる，先づ歩いた距離を求めてみようという部分的な見とおしは容易に立てられるであろう。この歩いた距離が媒介要素となって，つぎの見とおしが成立し，走った距離を求められると考え，ついで走った時間をと考え進めることができるようになる。

速さ――時間――距離

回転速度――時間――全体の回転数

1日に耕す田の面積――日数――全体の面積

1分間に入る水の量――時間――全体の水の量

など，それぞれの関係を理解していると同時に，さらにこれらを統一し，一般化して，

単位時間あたりの仕事量――時間――全体の仕事量

として把握し，さらに，それらを表わす数が，整数，小数，分数の別または数字で表わされていると文字または式で表わされているとにかかわらないことなどを理解していることが，見とおしの成立を容易にし，思考の働きを可能にする重要な条件となるであろう。

以上，この研究を通じて考えさせられた，思考力を高めることを目標とする指導の原則であり，第二次研究の仮説ともいうべきものを述べてきたが，いうところの数学的な観点，数学的な方法としては，第三章研究仮説（13P～16P）にかかげたものが妥当であり，また，これに尽されていえるかどうかという点については，この研究作業の結果だけからは完全な解答が得られていない。この点に，われわれ自身も不満を感ずる。

しかし，児童生徒の身につけるべき数学的観点，数学的方法として，具体的にどんなものがあるかは数学の各教材の本質についての検討と，今後児童生徒にどのような数学の学習を期待するかという将来の見とおしと，さらに児童生徒の心理的発達段階とをふまえ，地道に研究を進めていかなければならないものであろう。

この点については，第二次研究における授業の実践とその観察分析を通じて，そのような観点や方法を児童生徒の身につけさせる指導法と共に，具体的な研究を積み重ねていきたいと考えている。

第八章　算数数学科指導上の二三の問題について

遠山　啓氏らを指導者とする数学教育協議会の人たちは，数や式の計算指導における水道方式をはじめ，算数数学科の指導の内容や方法について，いろいろの新しい主張ないしは提案をしており，この教科の指導に関係している人たちの大きな関心を呼んでいる。

この会は，民間教育研究団体として，指導要領には多分に批判的な立場をとっている。反体制の立場に立つ者は，その主張の相違点を強調するあまり，その論調がいささか感情的になる傾向に陥りやすいものであるが，この会に集まる人たちの中にも，時にそのような傾向の見られるものがあり，この点，残念に思う。

しかし，この人たちの主張または提案には，うなづけるものが多いようである。それらの主張にもとづいて実践されたものにも，成果をあげているものが多い。

もちろん，公教育にたずさわるものは，批判は別としても実践の面では，指導要領の基準を逸脱するすることは許されないであろうし，何よりも，すなおに指導要領そのものを研究することが先決であろう。しかし，指導要領は指導の目標と内容を示したものであって必ずしも方法を規定したものではなくまた，指導上の留意事項には「この順序で指導することを示しているものではない。」といっているように，その指導の順序や方法については教師の創意とくふうに期待している。

この意味で，数学教育協議会の人たちの提案されている二三の問題について，この研究の結果から考えさせられる点をのべてみたい。

I　水道方式について

水道方式は，数や式の計算の指導体系，指導の順序についての主張である。これには，その根底に暗算先行か筆算先行かなどの問題があるのであるが，それらの問題はしばらくおき，いわゆる水道方式なる主張を要約するとつぎのようにいえると思う。

例を二位数の加法にとろう。

指導要領によると，二位数の加法については，数と計算の領域で，つぎのようにのべられている。

一年　(6)　ア　和が１０以下の一位数と一位数の加法，およびその逆の減法。

イ　１０，２０，３０，などについての計算，二位数と一位数とについての計算などで，上のアの程度で計算できるもの。

ウ　和が１０よりも大きくなる一位数と一位数の加法およびその逆の減法。

二年　(4)　一位数どうしの加法およびその逆の減法が，確実にできるようにする。

(5)　三位数までの数について，加法・減法の計算をする能力を伸ばす。

(6)　筆算形式による加法・減法のしかたを知らせ，その計算の原理や手順について理解させる。

三年　(3)　整数について，四位数までの加法・減法の計算が確実にできるようにする。

さきにものべたように，指導要領では「内容は，各領域について，(1)，(2)などによって示しているがこれは，この順序で指導することを示しているのではない。また，(1)，(2)などだけでは，その中に含ま

れるおもなことがらがわかりにくい場合や，その中に特に含めることがらを明示する必要がある場合などに，ア，イなどで示すことがらを掲げてある。……」といっているが，多くの教科書では，ほぼこの順序で教材を配列してある。

試みにT社，G社の教科書をみると，つぎのように教材が配列されている。（2は繰上りのない計算9は繰り上りのあるものを示す。）

T社

一年　一位数＋一位数（≦10）⟶20＋20（≦100）⟶20＋2⟶2＋20⟶
22＋2⟶22＋10⟶一位数＋一位数（＞10）⟶

二年　22＋22⟶90＋90⟶2＋22⟶29＋9⟶9＋29⟶22＋20⟶20＋22⟶
（ここから筆算形式）29＋29⟶$\left\{\begin{array}{l}\text{一位数}+0\\0+\text{一位数}\\0+0\end{array}\right.$⟶99＋99

G社

一年　一位数＋一位数（≦10）⟶20＋20⟶20＋2⟶22＋2⟶
一位数＋一位数（＞10）⟶

二年　90＋90⟶20＋22⟶29＋9⟶9＋29⟶22＋0⟶0＋22⟶
（ここから筆算形式）⟶29＋29⟶22＋22⟶99＋99⟶90＋92⟶
99＋9⟶9＋99⟶92＋92

細部の点においては両社の教材配列に多少の相違があり，また，どのような原則によって配列しているのか疑がわれる点もあるが，大まかに言えば，一位数どおしのたしざんのつぎにはまず，〔何十〕という数をとり上げ，ついで〔二位数と一位数の加法〕におよび，最後に，もっとも一般的な場合の〔二位数＋二位数〕を提示している。

これに対し，水道方式では，素過程と称して先づ，一位数同志（0を含む）の加法を指導する。つづいて，およそつぎの順序で指導するよう主張するのである。

$$\begin{array}{r}22\\+22\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{r}22\\+20\\\hline\end{array}\ \begin{array}{r}20\\+22\\\hline\end{array}\ \begin{array}{r}20\\+20\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{r}22\\+\ 2\\\hline\end{array}\ \begin{array}{r}2\\+22\\\hline\end{array}\ \begin{array}{r}20\\+\ 2\\\hline\end{array}\ \begin{array}{r}2\\+20\\\hline\end{array}$$

$$\downarrow\ \begin{array}{r}22\\+\ 0\\\hline\end{array}\ \begin{array}{r}0\\+22\\\hline\end{array}\ \begin{array}{r}20\\+\ 0\\\hline\end{array}\ \begin{array}{r}0\\+20\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{r}29\\+29\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{r}29\\+21\\\hline\end{array}\longrightarrow\begin{array}{r}29\\+\ 9\\\hline\end{array}\ \begin{array}{r}9\\+29\\\hline\end{array}\ \begin{array}{r}29\\+\ 1\\\hline\end{array}\ \begin{array}{r}1\\+29\\\hline\end{array}$$

すなわち，最も一般的な場合である $\begin{array}{r}22\\+22\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{r}29\\+29\\\hline\end{array}$ をまず指導し，それを水源池として，その一位または十位が退化した特殊の場合である「何十」という数や「一位の数」の場合におよぶのである。特殊の場合からはじめて一般の場合に進む従来の順序を逆にして，一般から特殊へという順序をとるのだともいえよう。ひきざん，かけざん，割りざんや，小数，分数，文字式の計算などの場合も同様な順序で指導しようというのである。

このたびの研究によれば，児童生徒が問題の構造を把握し，その解決に成功するかどうかは，問題の本質を洞察し得るような数学的な観点から問題に対処し，数学的な方法で処理するかどうかにかか

っていることを知った。そのような観点なしに問題に立ち向かったとすれば，「見て見えず，きいてきこえざる」状態となって，思考は停滞し，行きづまる。

ところで，水道方式によれば，最も典型的な「二位数十二位数」の問題について，此の種の問題に立ち向かう場合の観点や方法 ――原理といってもよい―― をつかませ，その観点，方法によって他の問題に立ちむかわせようとするのである。

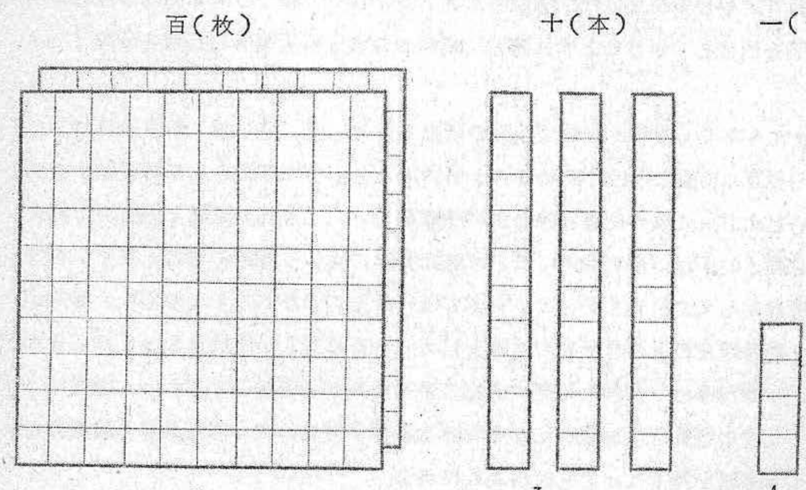
いうまでもなく，整数の計算の方法は，いくつかの数を１つのまとまり―― 単位としてとらえ（10ずつのまとまりを単位としてとらえた場合，十進法が生まれる。）その単位の相違を数字の位置によって表わすという記数法の原理に根拠がある。この原則が最も典型的にみられる一般の場合についてこのような見方，考え方を児童の身につけることができるとすれば，その他の特殊の型については，児童自身が容易に考え，処理し得るのは当然であろう。

したがって，問題はその一般の場合を，どのようにして児童に理解させ，そのような見方，考え方を身につけさせるかということになる。

水道方式を主張される人たちは，この点を，優れた教具である「タイル」の使用によって切り抜けようとしているのであるが，それはとにかくとして，それが児童生徒に理解される限り，先づ一般の場合について児童生徒に数学的な観点や方法を身につけさせ，その立場から特殊の問題を考えさせるという，一般 → 特殊の方法は，能率的，合理的であるといえると思う。

Ⅱ　教具「タイル」について

数学教育協議会の人たちは，数を分解，結合して数の概念を養成したり，記数法や計算の原理を児童に理解させたりする場合の教具として，遠山啓氏の提案によるタイルを使用している。これは，小さな正方形，それを１０個つないだもの，それをさらに横に１０本つないだものを，それぞれ，１個１本，１枚と呼んで，１，１０，１００のシェーマとし，それによって整数の分解結合や記数法，計算等を指導しようとするものである。



ところで，この研究でもしばしば述べたように，思考は具体的な行為の概念の世界への引き写しであるとも考えられる。しかし，具体的な行為によってのみ考え得る段階から，全く抽象的な概念の操

作による思考の段階へは，一挙に飛躍し得るのではなく，その間に，半具体物の操作によって考える段階，それらの表象をえがきながら考える段階がある。これらのそれぞれの段階は決して退けられるべきものではなく，これらの段階を通ることによってのみ，完全に抽象的な思考の段階に到達し得るものであろう。「具体から抽象へ」といわれていることも，この研究でみてきたように「図を書いて考える」ことが思考を進める有力な助けとなることなども，この間の事情を物語っているものであろう。

ところで，実在の事物現象と抽象的な概念との橋渡しとなる半具体物は，具体的である点においては概念より一歩前の段階にあり，抽象的である点においては実在の事物現象より一歩前進しているものでなければならないことは当然であるが，それと同時に，その半具体物によって表わされる本質的な数学的特質を最も良く具有しているものでなければならない。

従来も，実在の事物と抽象的な数の概念とを結ぶ半具体物として，貨幣，色のついた玉，色板，計算棒など，いろいろのものが利用されてきた。しかし，色板や色玉は，たとえば赤いのは一を，黄色は十を，青は百を表わすと約束したわけであるが，その黄色や青色は，まったくの約束であって，それが十，あるいは百という数とは何のかかわりもなく，この約束自身が完全な抽象である。これらが十または百を表わすと考えることは，抽象性においては数それ自身を考えると同様である。目に見えるものは色であって，数とは何のかかわりもないからである。この点，貨幣は，目に見えるものそれ自身はともかくとして，それで買い得るものを考えた場合に，数量との関係が一応考えられるが，しかし要するに間接的であり，計算棒も束の大小によってある程度数量感はあるものの，なお，直接的に十および百の数のイメージを得られるタイルに及ばない。

この意味において，数の概念や記数法の原理，計算の方法等を指導する際の教具としてタイルの使用は極めて有効なものと考えられる。

Ⅲ　関数のグラフについて

数学教育協議会の人たちは，関数のグラフの指導で，多くの中学高校の教科書が，関数の指導と幾何の指導を混合していることを批判し，関数の指導と解析幾何の指導を分離すべきことを提案している。

いうまでもなく，幾何は図形の性質の研究であり，点，線，面，角等の要素をとらえて，その大きさやそれら相互の位置の関係を究めるのが目的であり，その方法として解析的な方法をとるのが解析幾何である。したがって点の位置を表わすに座標を用い，二点間の距離，直線の方程式，直線の勾配，切片直線と直線との平行，垂直関係，などは解析幾何に属し，関数の増加，減少，増分，変化率，極大，極小等は関数としての研究であって，やがて微分積分につながるものである。幾何が点，直線，円，楕円双曲線，放物線そのものを研究の対象としているのに対し，関数においては，それを図表示した結果の直線，円，楕円等は，関数を研究する為の手段であり，方便にすぎない。極端にいえば，グラフなしでも関数としての研究は，理論的にはあり得る。数学において，解析幾何と微積分ないしは関数論が，一応，異なる系統を持っている所以がここにある。

したがって，同一の，例えば直線または放物線でも，これを関数の図表示とみるか幾何の対象とみるかで，これに立ち向かう場合の観点に，したがって方法に相違がある。その観点や方法の相違に対応して，その直線や放物線の構造は異なったものとなる。

このような事情を考えると，指導の初期において，例えば直線を同時に関数と見，図形とみるという取り扱いは，生徒の観点を混乱させ，理解を困難にしているといえよう。関数の指導にあたって，指導する教師にも指導される生徒にも，何となくすっきりしない，指導しにくい，理解しにくい，と感ぜられることが多いようであるが，その原因の一つがここにあるかと考えられる。

関数に対処する場合の基本的な観点は「対応と変化」であり，その量的な側面は「増分と率化率」であって，図形として見る場合の観点とは必ずしも一致しない。生徒の問題に対処する観点を統一し方向づけることが，思考を進め，問題の解決や理解を容易にするものであることは，この研究で指摘してきたことであるが，このような点から考えると，「関数と解析幾何との分離」という提案は，傾聴に値するものといえよう。

もちろん，時に応じて同一の直線を図形と見，関数のグラフとも見られるようになることは，きわめて重要なことである。したがって，それぞれの指導を一応終えたあとで，そのような指導を行ない必要に応じて視点の変更ができるようにすることは，その分離を主張される人たちも否定していないただ，それぞれの基本的な観点や方法を指導すべき重要な初期の段階において，観点や方法の混乱をきたすようなことや，それぞれの教材の系統を乱すことを問題にしたいのである。

あとがき

当研究所は，昭和34年度に，過去5か年間にわたる本県高校進学学力検査や全国学力調査の結果等を資料として，本県児童生徒の学力の実態と学習指導上の問題点を追究し，その結果を，研究紀要第24集「学力と学習指導」として報告した。その際，本県児童生徒が，機械的，形式的な問題は解けるが，いわゆる生産的思考の力に弱いように思われた。なおまた，多くの教師たちが，「児童生徒の洞察する力，関係を把握する力が弱い」「熱心に指導しても，計算等の力は伸びるが応用する力はなかなか伸びない。」と嘆かれるのをきいている。そこで，「思考力を伸ばすための指導はどうあるべきか。」を研究する必要を痛感した。

たまたま，全国教育研究所連盟が，昭和36年度から，同一の目標をもつ「算数数学科における思考力の形成とその指導」に関する研究を共同研究として実施することとなったので，当研究所のこの研究をそのまま，全国教育研究所の共同研究に切り変え，研究調査を続けてきた。

この紀要で報告したものはその第一次研究の結果である。

それぞれの教材の本質と，児童生徒が将来学習すべき数学の内容を考え，児童生徒の身につけさせるべき数学の観点や方法を具体的にとらえ，さらにそれを，どのような指導によって彼等の身につけさせるべきかという研究，すなわち第二次研究が引き続いて予想されており，ここにむしろ，共同研究の主眼がある。

この研究を実施するにあたり，協力校として御協力をいただいたつぎの学校の職員ならびに児童生徒に深く感謝の意を表するとともに，算数数学教育に関心をもたれる方々の御批判と，今後の研究に対する御協力を切にお願いする次第である。

研究協力校　西蒲原郡西川町立曽根小学校
西蒲原郡西川町立曽郷中学校
新潟市立上所小学校
新潟市立鳥屋野中学校

（研究担当者　研究員　山野井　嘉瑞）

参　考　文　献

この研究には多くの文献を参考にさせていただいた。おもなものをかかげて感謝の意を表する。

数理哲学概論	Bertrand Russell ，宮本鉄之助訳	改造社
数理哲学研究	田辺　元	岩波書店
科学概論	〃	〃
数学の基礎　上・中・下	米山国蔵	積善館
物理学序説	寺田寅彦	岩波書店
自然科学概論	石原　純	評論社
〃	武谷三男	勁草書房
カジョリ　数学史講義	一戸直蔵訳	中文館
カジョリ　初等数学史	三上義夫校閲，小倉金之助・井出弥門補訳	山海堂
数学史新講	原　種行 清水英一	賢文館
数学思想史序説	近藤洋逸	三一書房
自然科学史　1～5	岡　邦夫	白揚社
現代教育学9　数学と教育		岩波書店
数学教育事典	弥永昌吉　ほか編	明治図書
日本数学教育会誌　各号		
数学教室　各号	数学教育協議会編	国土社
教育科学　数学教育各号		明治図書
〃　算数教育各号		〃
帰納と類比	G・Polya，柴垣和三郎訳	丸善
いかにして問題をとくか	〃　〃	〃
数の発達心理学	J・ピアジェ，遠山啓・銀林浩・滝沢武久訳	国土社
数学科の学習心理	四方実一	明治図書
問題解決の心理	K・Dunckes，小見山栄一訳	金子書房
生産的思考	ウイルトハイマー，矢田部達郎訳	明治図書
ゲシタルト心理学	佐久間鼎	アテネ書房
創造的思考の心理	小口忠彦	牧書店
思考の方法	J・Dewey，植田清次訳	春秋社
思考心理学Ⅰ，Ⅱ	矢田部達郎	培風館
知能の心理	J・ピアジェ，波多野完治，滝沢武久訳	みすず書房
学習心理学	渡辺秀敏　ほか	朝倉書店
児童心性論	波多野完治	周文館
児童心理学	〃	賢文館

学習心理学序説	小口 忠彦	文京書院
学習心理学	中野 佐三 ほか	世界社
心理学 I	スミルノフ主監，柴田，島，牧山訳	明治図書
算数の教授 上・下	ポリヤーク 駒林邦男訳	〃
教授学	エム・ア・ダニロフ ベ・ペ・イエシポフ 矢川徳光訳	〃
基礎学力	広岡 亮蔵	金子書房
新教育への批判	矢川 徳光	刀江書院
子どもの思考過程	砂沢喜代次編	明治図書
北海道大学教育学部紀要 第７号 １９６０	砂沢喜代次・鈴木秀一	
授業分析	重松 鷹泰	明治図書
授業分析の手びき	愛知県教育文化研究所	
教育と心理のための統計学	岩原信九郎	日本文化科学社
算数，数学科学習指導要領（小中高各編）		文部省
小学校算数指導書		〃
中学校数学指導書		〃
新潟県立教育研究所 研究集録１９６１		
〃 研究紀要第２４集 学力と学習指導（算数数学科）		