── 目　次 ──

はじめに …… 1

Ⅰ　学力の内容 …… 1

Ⅱ　学力の構造 …… 5

Ⅲ　学習と経験との関係 …… 8

Ⅳ　数学の系統性 …… 12

高校進学学力検査結果の概観 …… 17

Ⅰ　年度別，分野別問題数と各問題の正答率 …… 17

Ⅱ　検査結果の概観 …… 18

問題とその解説 …… 21

Ⅰ　数 …… 21

Ⅱ　文字による表現，式の値，式の計算 …… 30

Ⅲ　方程式 …… 37

Ⅳ　比，歩合 …… 44

Ⅴ　比例 …… 51

Ⅵ　グラフ …… 56

Ⅶ　時間 …… 60

Ⅷ　図形の計量 …… 63

Ⅸ　三角比 …… 71

Ⅹ　作図，投影図 …… 76

Ⅺ　図形の論証 …… 80

まとめ …… 90

はじめに

学力をどのように解釈するかは時代によって変遷があり，その構造や形成過程についての見解は人によって多少の相違がある。したがって，これらについて論ずることは容易でないし，それがこの紀要の目的でもない。しかし，学力の内容，構造，形成過程等について，はっきりした意見を持っていることは，毎日の学習指導を一貫した方針で，確信を持って進めるために重要なことであり，この紀要に述べることの真意を理解するにも役立つと思うので，特に必要と思われるいくつかの点について，算数，数学科を中心として，わたくしの現在考えていることをのべておきたい。

I　学力の内容

1. 学力という言葉もいろいろの意味につかわれているが，ここでは「**生徒が教科学習を通じて身につけた能力を総称するもの**」と解釈し，最初に学習指導要領が，数学科の目標としてどんな能力を要求しているかを考えてみよう。

中学校数学科の一般目標として，現行指導要領（昭和26年）にあげられているのは，つぎの10項目である。

(1) 数学の有用性と美しさを知って，真理を愛し，これを求めていく態度を養う。

(2) 明るく正しい生活をするために，数学の果している役割の大きいことを知り，正義に基いて自分の行為を律していく態度を養う。

(3) 労力や時間などを節約したり活用したりする上に，数学が果している役割の大きいことを知り，これを勤労に生かしていく態度を養う。

(4) 自主的に考えたり行ったりする上に，数学が果している役割の大きいことを知り，数学を用いて自主的に考えたり行なったりする態度を養う。

(5) 数学がどのようにして生れてきたかを理解し，その意義を知る。

(6) 数学についての基礎となる概念や原則を理解する。

(7) 数量的な処理によって，自分の行為や思考をいっそう正確に，的確に，しかも能率をあげるようにする能力を養う。

(8) 自分の行為や思考をいっそう正確に，的確に，しかも能率をあげるようにすることが，どんなに重要なものであるかを知り，これを日常生活に生かしていく習慣を養う。

(9) 社会で有為な人間となるための資質として，数学についてのいろいろな能力が重要なものであることを知り，数学を生かして社会に貢献していく習慣と能力とを養う。

(10) 職業生活をしていくための資質として，数学についてのいろいろな能力が重要なものであることを知り，いろいろな職業の分野で，数学を生かして用いていく習慣と能力を養う。

これら10項目に述べられていることは，要約すると，つぎのように整理することができると思う。

(1) **知 識，理 解**

- 数学についての基礎となる概念や原理を理解する。
- 数学の有用性と数学についての能力が重要であることを知る。
- 数学の歴史とその意義を知る。

(2) **技　　　能**

- 日常生活，社会生活，職業生活で，数学を活用する能力を養う。

(3) **情　　　操**

- 数学の美しさを知り，真理と正義を愛する。

(4) **態　　　度**

- 数学を活用し，数学的に処理する態度，習慣を養う。

2. 昭和33年10月に発表された新しい指導要領では，中学校数学科の目標として，つぎの5項目が示されている。小学校算数科の目標も，内容は，ほぼ同じである。

(1) 数量や図形に関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力を伸ばす。

(2) 数量や図形に関して，基礎的な知識の習得と，基礎的な技能の習熟を図り，それらを的確かつ能率的に活用できるようにする。

(3) 数学的な用語や記号を用いることの意義について理解を深め，それらに

よって，数量や図形についての性質や関係を簡潔，明確に表現したり，思考を進めたりする能力を伸ばす。

(4) ものごとを数学的にとらえ，その解決の見通しをつける能力を伸ばすとともに，確かな根拠から筋道を立てて考えていく能力や態度を養う。

(5) 数学が生活に役立つことや，数学と科学・技術との関係などを知らせ，数学を積極的に活用する態度を養う。

新しい指導要領では，「真理を愛し」，「正義に基づいて自分の行為を律し」，「自主的に考えたり行ったり」等の表現が姿を消し，直接数学に関係する能力だけが示されている。ここに数学科に対する考え方，ひいては教育観そのものに大きな転換のあったことがうかがわれるのであるが，それはともかくとして，新しい指導要領の期待している学力は，

(1) 数学の用語，記号，基礎的な概念，原理，法則の理解，数量，図形の性質や関係，および数学と科学・技術の関係についての理解という知的な面と，

(2) 数学的な考え方や処理のしかた，簡潔明確な表現，数量，図形についての基礎的な技能等の技能的な面と，

(3) ものごとを数学的にとらえ，数学を積極的に活用する等の態度的な面，とからなっていると言える。

3. 昭和32年に，県教育委員会が発行した「指導要録記入の手引」では，「学習の記録」の数学科の評価所見を記入する際の観点として，

・数学への関心

・数学的な洞察

・論理的な思考

・技能

・数学の応用・創意

の5つの項目をあげている。（注1）もっともこれは，「個人内差異を明確にするためのものであって，総合的に5・4・3・2・1と評定していくための前提をなすものではなく」，「各教科・科目の指導目標ないし評価目標の全部を

・注1　新潟県教育委員会「指導要録記入の手引」1957年改訂版

分析的にとらえたものではない」とことわっているが，しかしこれらが，「各教科・科目ごとに，これだけはぜひ忘れないようにという重要な項目」であることを考えると，この観点項目は「各教科・科目の指導目標ないし評価目標とは関係がないとは言い切れない」だけでなく，指導目標ないし評価目標の，したがってまた学力の重要な側面を指摘しているものといえるであろう。そしてこの観点項目も，知的な面と，技能的な面と，態度的な面とにわけられる。

4. 広岡亮蔵氏はその著書「基礎学力」のなかで

「こんにち欲求される学力とは，新しい世のなかを建設するために，物事の生きた諸連関をその奥底において，正しく感じ，正しく考え，正しく意欲し，正しく行う主体のはたらきとしての力を指しているというのが普通である。正しく感じとはおもに芸術的な領域をさし，正しく考えとはおもに科学的領域を，正しく意欲するとはおもに道徳的領域を，正しく行うとはおもに技術的領域をさしてのべたものである。しかし，これらがバラバラであったり，ばらばらにはたらいたりするのではなく，主体のなかに体制化されて，新しい社会を建設していくための生きた機能的な力の総体をなすべきであり」，その学力の構造は左図のような層構造をなしている，と説いている。（注2）

上　層	行為的態度 ↑
中　層	概括的認識 ↑
下　層	個別的能力 （個別的知識 個別的技能）

広岡氏の主張は，学力が「新しい社会を建設していくための」，「主体のなかに体制化された，生きた機能的な力の総体」であり，個別的能力──→概括的認識──→行為的態度という層構造をなしているという点に主眼があるのであるが，それはともかくとして，学力の要素としては，一応，**知識**，**技能**，**感情**，**態度**を考えておられると思う。

5. 一般の常識で学力を云々する場合は，主として知的な側面を強く意識し技能を若干考える程度のようである。埼玉県立教育研究所でも，「学力に関する研究」において，学力を「主として人間形成の知的側面──知識，理解，思

・注2　広岡亮蔵著　基礎学力　金子書房　昭和28年

想，技能——をさし」，「感情なども含めるのはあまりに拡大された解釈である」という見解をとつている。（注３）

学力を，数学，理科等，いわゆる科学的な教科に限って考える場合には，主として知識，技能，態度を考えるのは，教科の性質上当然であろう。しかし，埼玉県立教育研究所でも認めているとおり，知的側面と情操，心情などの感情的側面は，「不可分に統一されてのみ，常に具体的に存在していること」や，芸術的な教科などについての学力を考えると，はじめにのべたとおり学力を「教科学習を通じて身につけた能力を総称するもの」と解釈する限り，学力の構造や形成過程に知識，理解，思考等知的な側面が重要な地位を占めることを認めながらも，やはり，一般に学力には感情的な側面もあることを認めたいと思う。

以上，指導要領をはじめ，いろいろな方々の見解について，学力の内容としてどのようなことが考えられているかをみてきたのであるが，これを要するに一般に学力の要素ないし側面としては，つぎのことが考えられる。

⑴ **知的な要素**——知識，理解，思考，洞察，など。

⑵ **技能的な要素**——計算，測定，統計，表現等の技能，用具のつかいかた処理のしかた，など。

⑶ **感情的な要素**——美しさを味う，表現創作を喜ぶ，鑑賞，など。

⑷ **態度的な要素**——興味，関心，習慣，態度，など。

Ⅱ　学力の構造

ところで，これらの知的，技能的，感情的，態度的な能力は相互にどんな関係にあるのであろうか。

現代の学力観が，学力を，知識，技能，感情，態度の単なる総和としてでなく，一つの構造をもった，統一的にはたらく能力とみていることは，さきに引用した広岡氏や埼玉県立教育研究所，または，新しい指導要領の「以上の目標は相互に密接な関連をもって，全体として数学科の目標をなすものであるか

・注３　埼玉県立教育研究所紀要第25集　学力に関する研究

ら」という言葉からもうかがわれるのであるが，このことについて私の考えを述べてみたい。

1. われわれが生徒に知識，技能等を習得させるのは，単なる物識りや，手先の器用な人間をつくるというためではない。われわれが生徒に科学的な知識を授けるのは，「**科学的な知識のなかには，いく千年にわたって積みあげられた人類の経験が反映している。その経験は実践によって検証され，一般化されて，科学的な概念や法則などになっている。知識を習得することによって**，生徒たちは一定範囲の情報を手に入れるだけでなくて，**人間が自然を認識する方法のことを，また，人間の必要と要求を満足させるために自然にはたらきかける手段を知るようになる**」からである。（注4）

われわれが，生徒に政治，経済，社会についての知識を学習させるのは，**政治，経済，社会の本質やその発展の法則を理解することによって，政治，経済社会に関する課題を解決できるようにするため**であり，われわれが，生徒に職業的な知識や技能を指導するのは，それによって**生徒が将来の職業生活における問題を解決できることを期待する**からである。

現代の学力観の特徴は，学力を，「**社会的実践的関心によって滲透**」され，「**環境を切りひらいてゆく能動的な力**」であり，「**体制化された統一的知性**」である，と見ている点にある。（注5）

したがって，**われわれが生徒の学力として考える**知識，技能，感情，態度は**生徒の現在および将来の，現実のまたは理論上の問題解決に生きてはたらく力となるような知識，技能，感情，態度でなければならない。**

どのような知識，技能等を学習させるべきかという指導内容の問題と，どのような過程をたどり，どのような方法で学習した知識，技能等が生きてはたらく力になるかという 指導方法の 問題とは， この観点から 考えなければならない。

この紀要は，高校進学学力検査の問題を素材として，生徒の数学の知識，技

・注4　エム・ア・ダニロフ　ベ・ペ・イエシポフ　教授学（上）　矢川徳光訳　明治図書

・注5　広岡亮蔵書　基礎学力　金子書房　昭和28年

能，態度が生きた知識，具体的な，または理論上の問題解決に役立つ力になるための指導法上の問題点を解明しようという試みである。

2. 同じく学力の一要素ないしは一側面ではあるが，態度は他の知識，技能，感情とは次元を異にしていると思う。

第一に，態度は，たとえば，数学的に対処しようとする態度，多面的にとらえようとする態度，精密に計画しようとする態度，自然や社会を数量的にとらえようとする態度などのように，いわば「身がまえ」であり，持続的な心的傾向であり，認識や行為がそれによって方向づけられることを期待される能力であって，**「個々の知識，技能，感情が発動する際に，たえずその核心となってはたらく能力である。」**

したがって，「態度は，知的，技能的，感情的能力と同一平面上に並列しているものではなく，個々の知識，技能，感情を課題解決に向って方向づけ，統一し，それらを生きてはたらく力たらしめる根元である。」（注6）

第二に，態度は前述のように知識，技能，感情を，生きてはたらく学力たらしめる根元であるが，しかし，それだけを単独に学習させることは不可能であるということである。

数学的な態度は数学の知識，技能に支えられて，科学的な態度は科学的な知識，技能の上になりたつものであるだけでなく，**態度を身につけることはこれらの知識，技能の学習を通じ，知識，技能の獲得の過程においてのみ可能なものである。**

3. **知識，技能，感情も，個々独立なものではなく，互に関連してはたらくものである。**

・注6　空知教育研究所紀要第14号　小中学校教科の本質に関する研究

知識は単に頭のなかの知識としてでなく，心情的に感得され，操作技能にまで技能化されてはじめて生きてはたらく知力となり，技能はそのわけがらや具体的な条件の理解と結びつけられ，個人的な心情の深まりにおいて習得されてはじめてはたらきのある技能となり，感情は知性に裏づけられて内部のバランスを得，実践技能と結びついてはじめて現実生活との通路をもつことができるものである。

要するに，知的能力，技能，感情は個々ばらばらなものではなく，また，別々に指導できるものでもない。

計算の技能は数の概念や名数法，記数法，演算の意味，計算法則の理解等に裏付けられてはじめて，具体的な問題に適用される技能となり，量の概念や知識は測定等の技能と，図形の性質の理解は作図や表現等の技能と結びついてはじめて生きてはたらく力となるのである。

学習指導の目標ないし評価項目として，理解，問題解決力などが，よくあげられる。これらも重要な概念であり，私なりの見解もあるが，他日，これらについて論ずる機会もあろうと思うので，ここではふれないことにする。

Ⅲ　学習と経験との関係

1．経験学習，生活学習が批判されて以来，学習指導における経験や生活の役割まで不当に軽視される傾向はないであろうか。

経験学習や生活学習が批判されたのは，

- **社会発展の法則に対する認識を欠くため，児童生徒の経験を組織し発展させる方向を見とおすことができず，その場限りの，あれやこれやの経験をさせていることや，**

- **人類数千年の経験の集積である諸科学の成果を無視して，試行錯誤的な，**

非能率的な学習をさせている，

という点であって，（注７）**児童生徒の経験が学習の基盤であり，現在および将来の課題の実践的解決を期して学習が行われるものである**ことを否定したのではない。

2. 認識の発展は感性的なものから理性的なものへ，理性的なものからより高次の感性的なものへという過程をたどるものであり，理性的認識——概念的思考により，記号や言葉を媒介として行われる認識は，感性的認識——感覚や行動を通しての認識の上に育つものであると言われている。（注８）

「過去の経験をより所としなかったならば，対象がなんであろうとも，それを現実の特定の事物ないし現象として知覚することは不可能であろう」し，

「概念をあらわすところのコトバは，人間が概念によって一般化された現実の事物や現象そのものをそのなかにおいて認識するところの感性的体験と結びつけることが必要である。感性的認識は，概念にとって欠くことのできない源泉である」のであり，

「理解は，過去の経験において獲得された知識にもとづくことによってのみ達成される」のであり，

「子どもの記憶の特徴点は，直観的，形象的な性格のなかにあり」

「感覚と思考——それは現実的反映の統一的過程における，切っても切れない二つの環である。最初の出発点となるものは，現実の事物や現象の感性的，直観的な認識である」し，

注意は新しいものにひきつけられるものであるけれども，その新しい対象は「過去の経験のなかによりどころを見出し，意味づけが可能なもの」でなければならないものであり，

「問題解決において重要な役割を演ずるものに，感性の支持，すなわち，事物やそれを描いたものを知覚したりそれらを表象したりすることがある」のである。（注９）

・注７　矢川徳光著　新教育への批判　刀江書院　1950年
・注８　波多野完治著　心理学と教育　牧書店　昭和31年
・注９　スミルノフ主監　心理学Ｉ　柴田，島，牧山訳　明治図書

もちろん，新しい知識や概念を学習させるすべての場合に，直接的な感覚や具体的な知覚にまで立ちかえり，あるいは行動に訴えることは，非能率的であり，不可能な場合もある。

「子どもは，人類が概念を作り出すさいに歩んだような複雑な，長い道を再び歩む必要はない。子どもが獲得する概念のなかには，何世紀にもわたる人類の経験が結晶化された形でふくまれている。まわりの人々は，言語を通じて行うコンミュニケーションの過程において，子どもに概念を獲得させる」ことができる。すなわち，教師の説明をきいたり本を読んだりして新しい表象を作り新しい概念や知識を得ることができるし，また，必要なことでもある。実際に簡単な説明で容易に理解させられるようなことを，くどく，低い段階から指導をはじめて，時間と労力を空費しているような遺憾な授業も時々見受ける。

しかし，**抽象的で理解困難な内容の指導では，どうしても感性的な，より具体的な立場に立ちかえらなければならない**ものである。

「直接性の上に立つ何らかの経験を前もってしていなければ，象徴的な基盤の上に立つ間接経験だけでは，現実に直面して満足に事に処していくことは望めない」のであり，「間接経験がある最少限度の直接経験によって裏付けされている時，初めてそれらは広くかつ有効に用いられるもの」なのである。
(注10)

「具体より抽象へ」ということも，「実験，実測，作業の重視」ということもこの意味から考えられることであり，視聴覚教育が問題になる根拠の一つもここにある。

3. 数学は論理的，抽象的な思考の学問であるといわれているために，他教科とちがって，基礎経験を問題にする必要はなく，小学校低学年以外は直観的な教具の助けをかりる必要もないように思われがちである。

「数学だけは，へき地の子どもも都市や平場の子どもと同じ成績をとれるはずだ」というようなことをしばしばきくが，これも，数学は経験や教具とあまり関係がないと考える誤りからきていると思う。

・注10　エドガー，デール　学習指導における視聴覚的方法　上　有光成徳訳　政経タイムス社

・人類が０の発見に千年の歳月を要したこと。

・無理数の存在に気づいたのが幾何学の研究をしたギリシャ人であり，その後に二次方程式を研究したジオファンタスが負数や無理数を根として認め得なかったこと。

・論理的な思考の産物である複素数が，ガウス平面上に図表示されるまではニュートン，デカルト，オイレル等からさえ代数的虚構とされていたこと。

などは，**数学の概念や思考も，経験的，感覚的な基盤がなければ理解されず発展しない**ことを物語っていると思う。（注11）

同じ混合の割合に関する問題でも，物の値を素材にすると理解し易いが，液体の濃度等を素材にするとむずかしく感ずるのも，このような経験の不足から説明される。

文章題解決の困難が，問題場面を具体的に理解するための経験の不足に原因していることも多いのである。

なお，子どもの思考の発達は，「すべての思考活動が，さまざまの条件におけるさまざまの材料を対象とした操作が，一様に，均等に前進するような運動ではない」ことも，注意を要する点である。

たとえば，整数については抽象的に考えたり操作したりできるようになった子どもも，分数は具体的，直観的な用具の助けをかりなければ考えることができず，数で表わされた長さ，面積，体積が抽象的に考え得るからといって，文字で表わされた長さ，面積，体積を，同じ程度に抽象的に考え，操作することはできない場合があるのである。

したがって，生徒は，「**より複雑な操作，あるいはより複雑で抽象的な材料へと移行するさいには，自分がすでに捨て去つた，それより低い水準において必要とされる操作方法に頼らざるを得ないことが，しばしばある**」のである。（注12）

・注11　カジョリ初等数学史　小倉金之助，井出弥門補訳　山海堂
　　　　原種行，清水英一共著　数学史新講　賢文館

・注12　スミルノフ著　心理学Ｉ　柴田，島，牧山訳　明治図書

4. 数，量，図形は自然や社会のいろいろの事物，現象を認識する場合の形式である。

自然や社会の事物や現象は，いろいろの面からみることができるであろうが**それらを数，量，図形的にとらえ，その間になりたつ性質や法則を究明することによって自然や社会の本質を理解し，その認識を生徒の現在および将来における生活上の具体的な，あるいは理論上の問題**——従来，消費的な面のみが重視されていたが，生産的な面にもっと注意をむけなければならない。——**を解決し，生徒の生活を向上させ，社会を発展させる有力な武器にしよう**というのが，小・中学校の生徒に数学を指導する目的である。

数学の指導が実践と結びつかなければならないと言われるのも，実践によって得られる経験が数学を指導する基盤であり，「教授における実践は，教えられる知識を生徒たちがよく習得するのを保証する」という指導方法上の観点からであると同時に，それが数学指導の究極の目的にかかわるからでもある。

この意味で，数学の論理や技能それ自身を理解させ，習熟させることはもとより重要なことであるが，それとともに，現実の自然や社会の事物や現象を数量的にとらえること，——たとえば，具体的な生活の場に数学的な三角形，円直方体，等の図形を見出だしたり関数関係を発見したりすること，数学で学習した知識，原理，法則を具体的な場において検討し，適用すること等も数学指導の重要な一面である。

Ⅳ　数学の系統性

数学は系統的な学問であるとか，数学では系統的な指導が必要であるとか言われており，新しい指導要領も，「いっそう系統性をもたせ，内容の充実をはかる。」ことを改訂の基本方針の一つとしている。

「思考は，つねに，すでにもっている知識を媒介として行われるところの問題解決」であり，「教授は生徒たちの意識のなかに，知識の体系を形成する間断なき過程」であるので，いずれの教科の指導にも系統は重要な問題なのであるが，（注13）特に論理的な構造をもっている数学で，系統が問題になるのは

・注13　エム・ア・ダニロフ　ベ・ベ・イエシポフ　教授学（上）　矢川徳光訳　明治図書

当然である。

ところで，数学で系統の問題を考える場合の観点を，つぎの二つにわけて考えてみたい。

1.　一つは，たし算ができなければかけ算はやれないとか，正比例のつぎに反比例がくるとか，正方形と長方形のどちらを先に指導するか，というような意味の系統である。

これにはさらに，数学の発生史的な系統，論理的な系統，および，児童生徒の心理をあわせ考えた教育的な系統等が考えられるが，いずれにしても，この意味の系統のたいせつなことはよく知られており，カリキュラム研究，指導系統案の作成等の形で，いろいろ研究され，実践されている。

2.　もう一つのみかたは，個々の概念，原理，法則が，より広い，より高い次元から統一的にとらえられて，もっと一般的な概念，原理，法則に発展するという意味の系統である。これは，一般化とよんでもよいであろう。

たとえば，整数の概念が小数，分数を含めた有理数の概念に，それがさらに実数，複素数の概念に発展するのが，その一例である。

また，

- 32＋5　を計算する場合に $\begin{array}{l}\ \ \ 32\\ +\ 5\\ \hline\end{array}$ とするのは誤りで，$\begin{array}{r}32\\ +\ \ 5\\ \hline\end{array}$ のように同じ位を重ねること。
- 3.56＋2.3　を計算するのに $\begin{array}{r}3.5\,6\\ +\ 2.3\\ \hline\end{array}$ とするのは誤りで，$\begin{array}{l}\ \ 3.56\\ +\ 2.3\\ \hline\end{array}$ のように小数点をそろえること。
- 3m＋50cm　を53mや53cmとするのは誤りで，3.5mまたは350cmのように同じ単位になおしてから計算すること。
- 同分母分数の加減はそのままできるが，異分母分数の加減は通分しなければならないこと。
- 小数と分数の加減は，どちらも小数か分数になおさなければ計算できないこと。

などが，

加減の計算は，必ず，単位をそろえて行う，

という原則として理解されるというのもその例である。

この意味の系統ないし一般化は，比較的，見逃されているように思うが，どうであろうか。

われわれがある事実や現象を理解したというのは，いろいろの事実や現象，要素などの間の，条件と結論，全体と部分，原因と結果，空間的なまたは時間的な位置の前後関係等がわかったり，より一般的な原理，法則の具体的な表われとして解釈できた場合である。

より広い視野から，より高い次元から眺め得た時にはじめて，わかったという境地に達し得るのである。

一つのことを学習している時にはよくわからなかったが，その後，他のいろいろのことを学習し，経験してからふりかえってみると，なるほどそうだったのかとよくわかった，というようなことがしばしばあるのも，この間の事情を物語るものと思う。

生徒の学習を指導する場合には，個々の数学の知識をばらばらの知識として並べてつめ込み，学年が進むにつれてだんだんその量を多くしていくと言うことではなく，**数学的な知識，概念，原理，法則が，だんだん統一され，組織づけられていくよう**にしなければならない。

そういう系統的，体系的な理解があってこそ，はじめて，数学が具体的な問題に適用される力となるのであり，また，個々のことがらの理解や記憶も容易になり，数学そのものに対する興味も持ち得るのである。

以上のような学力の内容および構造に対する見解から，つぎのような指導方法上の原則が生まれてくる。すなわち，

(1) 第一に，どのような知識，技能，態度等を学習させるかという知識，技能等の内容，質を吟味しなければならない。態度が問題なのだからといって，知識，技能等の内容は問題にならないというような形式陶冶を過信した考えや，これも知っていた方が知らないよりはよいといった程度の知識技能の習得に，生徒の時間と労力を空費していることは許されない。生徒に学習させる内容は，生徒が現在および将来の課題を解決するための，同

時に数学の発展にかかわる本質的な知識，技能，態度でなければならない。

(2) 計算は技能である，量の概念や単位関係は知識である，として，知識，技能，態度等が個々ばらばらに指導されてはならない。計算の技能は数の概念や名数法，記数法，演算の意味，計算法則の理解等に裏付けられてはじめて，計算技能そのものも高まり，具体的な問題に適用される技能となる。したがって，技能の向上をめざす練習の過程においても，たえず，生徒にこれらの理解がともなっているかどうかを確かめ，知識，技能がともに，お互に高まり，深め合うような指導を心がけなければならない。同様に，量の概念や知識は測定等の技能と，図形の性質の理解は作図や表現等の技能と結びついてはじめて，より深まり，生きてはたらく力となるのであって，測定や作図等が，単に量の概念や図形の性質を理解させる一つの手段であるという以上に，深い本質的なつながりのあるものである。

(3) 態度は，知識，技能の学習の過程においてのみ養われる。しかし逆に知識，技能を学習させさえすれば自から養われるというものではない。具体的な知識，技能の学習，個々の問題の解決を通じて，数学的にとらえ，数学的に処理しようとする態度を養ない，その態度が逆に，自然や社会の現象や課題に立ち向かう姿勢となり，知識，技能等をそれに向って結集する中核となり，さらに将来学習する知識，技能を方向づけるものとなるところまでねらわなければならない。

(4) 生徒が困難を感じ，つまづいた場合には，学習の基盤であり，前提となる経験，既習の知識や技能をふりかえってみなければならない。ことばによる新しい概念の獲得は人間にのみ与えられた特権であり，有力な武器ではあるが，過去の経験の中によりどころを見出し，意味づけが可能なものでなければ理解することはできないし，抽象的な概念の獲得にはたどるべき過程がある。けだし，学習はひっきよう，経験の改造であり，再構成であるからである。

(5) 生徒の知識，技能が系統化され，体系づけられるよう指導しなければならない。個々の原理，法則，方法，規約，それらのすべてが，より一般的な原理，法則，方法，規約へと発展し，一般化され，逆に，それによって

個々の原理，法則等が理解されなければならない。現在指導していることが，どこから発展し，どこにつながり，生徒の頭の中の数学の体系のどこに位置づくのかを考えた指導でなければならない。

以上，学力の構造や数学の指導について，若干の見解を述べてきたのであるが，つぎに，このような考え方を背景として，過去5か年間における本県高校進学力検査の結果を検討し，本県中学校生徒の学力の傾向，生徒が困難を感ずる点等を推定し，これに対する学習指導上の留意点を述べてみよう。

それぞれの教材，それぞれの問題には，一見すると，その教材，その問題に特有の方法，固有の考え方があるように見える。しかし，それらは，数学や数学の学習指導の本質に基づく一般的な思想，方法，原則の特殊な教材，具体的な問題への適用であり，具体化であるに過ぎないと考える。

わたくしは，この問題はこうやればとける，あの問題はああやれば解ける，と，個々の問題を巧妙に解いて答を求める技巧を教えるという，いわば古い徒弟教育的な指導は，単に非能率的であるだけでなく，そのような指導では生産的な思考や，「こんにち欲求されている学力」は養われないと考えている。したがって以下に述べる説明，特に指導上の留意点は，さきにのべた数学，数学の学力またはその指導に対する私の見解の具体的な表われであり，適用であると考えていただきたい。

高校進学学力検査結果の概観

まず，過去５か年間の高校進学学力検査問題とその結果を概観してみよう。

I　年度別，分野別問題数および正答率

第１表　　　年度別，分野別問題数および正答率

分野		30	31	32	33	34	問題数	
数		(1) 47.6 (2) 36.9	(1) 42.9 (2) 84.4	(1) 62.6	(1) 55.3 (3) 67.0	(1) 55.7	8	
式	文字による表現，式の値，式の計算	(3) 38.5	(3) 49.1	(2) 50.7	(7) イ 27.4 ロ 18.1	(2) 52.4 (3) 54.1	6	11
	方程式	(4) 25.5	(4) 51.8	(3) 51.6	(5) イ 23.5 ロ 20.2	(7) 8.5	5	
数量関係	比・歩合	(7) 12.9	(6) 63.0	(5) イ 26.1 ロ 26.1	(8) イ 32.9 ロ 7.3 (9) イ 65.5 ロ 47.6	(4) 27.6	6	13
	比　例	(8) イ 10.4 ロ 53.0	(9) イ 19.8 ロ 65.0 ハ 7.0	(4) イ 43.4 ロ 39.0			3	
	グラフ		(7) 19.4	(7) イ 77.2 ロ 53.6	(6) イ 45.8 ロ 11.0	(6) イ 45.7 ロ 63.0	4	
計量	時　間		(11) 33.6		(2) 40.5		2	14
	図形の計量	(5) イ 44.6 ロ 37.5 (6) 47.1	(5) 25.5 (8) 63.0	(6) 36.1 (8) イ 38.0 ロ 35.0	(4) 59.1	(5) イ 13.5 ロ 32.5	8	
	三角比	(9) イ 40.4 ロ 44.2	(10) 51.8	(9) 37.7		(9) イ 49.5 ロ 30.5	4	
図形	作図 投影図	(10) 16.8	(12) 24.3			(8) イ 45.2 ロ 8.6	3	6
	論　証			(10) イ 32.4 ロ } 31.1 ハ }	(10) 21.5	(10) 14.4	3	
問題数		10	12	10	10	10	52	

・括弧内の数字は問題番号，その横の数字はその問題の正答率である。

分野の大分類は新しい指導要領の区分により，小分類は現行指導要領の区分を参考にしたのであるが，高校進学学力検査の性質上，一つの問題にいろいろのねらいを持たせたのが多いので，はっきり分類できない問題がある。したがって，この分類は便宜的な，一応の分類にすぎない。

31年度のほかは，各年度とも10題ずつで構成されており，その中の3～5題はいわゆる分割問題である。配点は1題2点ずつであり，したがって分割問題は，イ，ロがそれぞれ1点ずつとなっている。時間は各年度とも45分である。

同じ分野の問題でも，難易の程度はことなるので，この表からただちに年度ごとの成績の良い悪いを言うことはできない。ただ，各年度とも，なるべく数学科の全分野から出題しようとした苦心のあとは，うかがわれると思う。

Ⅱ 検査結果の概観

検査の結果は，第2～3表および第1～2図の通りである。

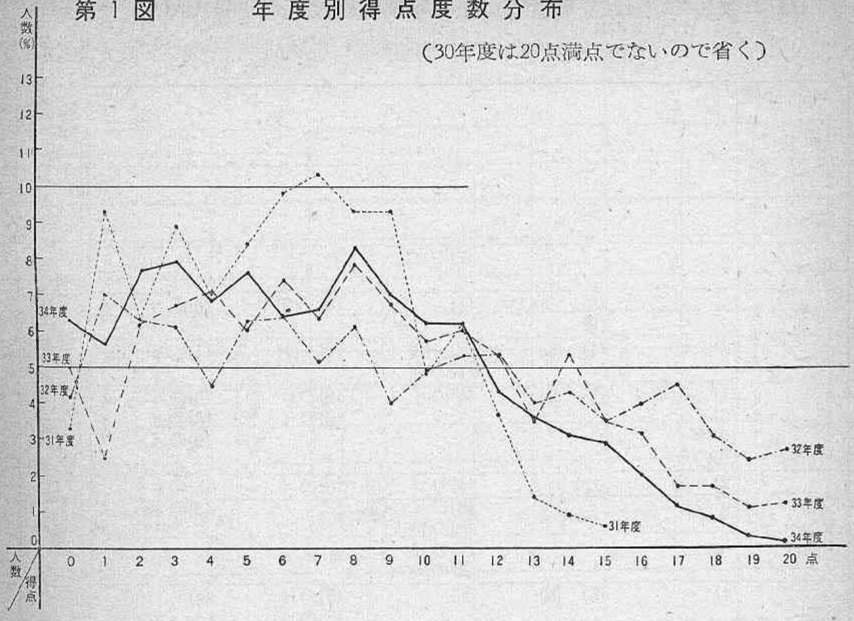
第2表　　各年度の平均得点および標準偏差（100点満点換算）

年度	28	29	30	31	32	33	34
平均	34.53	41.28	32.77	39.9	43.9	40.7	35.7
標準偏差	18.74	26.36	26.45	23.6	28.8	24.8	23.3

各年度とも平均得点は32点～44点で，他の教科にくらべても良くない方である。しかし，全県同一の問題で検査するので，これ以上程度をさげることは，受検者のほとんどが満点に近い成績をとるために合否の弁別に役立たなくなる高等学校のでてくるおそれがある。また，指導要領の要求している内容の程度から考えても，この程度の問題の平均正答率が，少なくとも50%を超えるように，努力したいものである。標準偏差の大きいことも，地域差や個人差の大きいことを示しており，望ましい姿とは言えないと思う。

第1図　　年度別得点度数分布

（30年度は20点満点でないので省く）



得点度数分布図は第1図の通りで，正常曲線にくらべると点数の低い方にかたよっている。

一般の学力検査問題は，むつかしい問題とやさしい問題の数を少なくし，正答率が中位の問題を多く含むような構成になっている場合が多く，第3表からもうかがわれるように，本県高校進学学力検査にも，このような傾向が見られる。

もし，各問題に完全な弁別力がある場合には，中位のむつかしさの問題が多ければ得点度数分布曲線は正常曲線にはならず，正常曲線になるためには逆にむつかしい問題とやさしい問題を多くし，中位の問題数を少なくしなければならないということが，理論上いえる。（注14）

このように，得点分布曲線は問題の構成を考えあわせて解釈しなければならないので，この形からただちに学力の分布のよい悪いを言うことはできないのであるが，それにしても，分布曲線が左右対称とならず，得点の多い生徒の数が大変少なく，得点の少ない生徒が割合に多いのは，望ましい傾向とは言えない。

・注14　小林茂太郎　得点分布と問題構成との関係　日本数学教育会誌　1959年第41巻第1号

第 3 表　　　　　年度別，正答率別問題数

（注　括弧内の数字は問題番号，小問を一つの問題として数える）

正答率＼年度	30	31	32	33	34	問題数合計
90～ %						
80～		(2)				1
70～			(7)のイ			1
60～		(6)　(9)のロ (8)	(1)	(3)　(9)のイ	(6)のロ	7
50～	(8)のロ	(4)　(10)	(2)　(3) (7)のロ	(1)　(4)	(1)　(2)　(3)	11
40～	(1)　(5)のイ (6) (9)のイ (9)のロ	(1)　(3)	(4)のイ	(9)のロ (6)のイ　(2)	(6)のイ (8)のイ (9)のイ	14
30～	(2)　(3) (5)のロ	(11)	(4)のロ　(6) (8)のイ　(9) (8)のロ (10)のイ (10)のロハ	(8)のイ	(5)のロ (9)のロ	14
20～	(4)	(5)　(12)	(5)	(5)のイ (5)のロ (7)のイ　(10)	(4)	9
10～	(7)　(8)のイ (10)	(7)　(9)のイ		(6)のロ (7)のロ	(5)のイ　(10)	8
0～		(9)のハ		(8)のロ	(7)　(8)のロ	4
問題数合計	13	14	14	15	14	70

第2図　分野別正答率別問題分布

（同一縦線上に同年度の問題が2個以上あるのは分割問題である）

以下，各分野ごとに，最初に問題とそのねらいおよび正答率を一括してのべ，つぎに生徒が困難を感じたと推定される点と全体の傾向や問題ごとの具体的な指導の重点等を説明し，最後にその分野全体に通ずる指導上の留意点をのべてみたい。

問題とその解説

I　数

1．問題とそのねらいおよび正答率

年度	問題番号	問題	問題のねらいと正答率
30	〔1〕	つぎの答を□の中に書きなさい。 $\frac{2}{3}-\frac{7}{12}\div\left(2-\frac{5}{6}\right)=\square$	・計算の規約（かっこの用法や乗除を加減より先にすること）を理解しているか。 ・分数の計算ができるか。 47.6％

	〔2〕	$\sqrt{3}=1.732$ として$\sqrt{12}$の値を求めなさい。	・無理数や$\sqrt{\ }$の意味を理解しているか。 ・$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$の関係を理解しているか。 36.9%
31	〔1〕	つぎの答を□の中に書きなさい。 $(-4+3)\times(-2)-\left\{(-7)+(-8)\right\}+15\div(-5)=\square$	・計算の規約を理解しているか。 ・負数の計算ができるか。 42.9%
	〔2〕	つぎの計算の□の中に，あてはまる数字を入れなさい。 $\begin{array}{r} \square\square \\ 14\overline{)\,1\square 3} \\ 1\ 4 \\ \hline \square 3 \\ \square 2 \\ \hline 1 \end{array}$	・割り算の計算方法を理解しているか。 ・逆算の考え方ができるか。 84.4%
32	〔1〕	つぎの答を，できるだけかんたんな分数で□の中に書きなさい。 $(1.4-1.2+\frac{4}{15})\div 1\frac{3}{4}=\square$	・小数と分数の混合している式の計算は，全部を小数または分数になおして計算することを理解しているか。 ・小数と分数の関係を理解しているか。 ・分数の計算ができるか。 62.6%
33	〔1〕	つぎの答を，□の中に書きなさい。 $235+57\times 8-5235\div 15+37=\square$	・計算の規約を理解しているか。 ・やや大きな整数の計算を正確にできるか。 55.3%
	〔3〕	つぎの□の中に，あてはまる数を書きなさい。 $4\frac{2}{7}$は$\frac{2}{7}$の□倍である。	・比や割算の意味を理解しているか。 ・分数の除法ができるか。 67.0%
34	〔1〕	つぎの答を，□の中に書きなさい。答はできるだけ約分すること。 $1.8\times 1\frac{2}{3}-(\frac{5}{6}-\frac{3}{4})\div\frac{1}{2}=\square$	・小数と分数の混合している式の計算は，全部を小数または分数になおして計算することを理解しているか。 ・小数と分数の関係を理解しているか。 ・分数の計算ができるか。 55.7%

2. 生徒の困難点

⑴ 生徒が年度ごとにちがっているので，断定できないが，30年度〔1〕の正答率が47.6%であるのに対して，これと同じ種類でやや複雑な32年度〔1〕の正答率が62.6%であることなどから考えると，この分野における生徒の学力は年々向上していると言えるようである。

⑵ 小数，分数を含み，かっこのついている式の計算である32年度〔1〕，34年度〔1〕の正答率がそれぞれ62.6%，55.7%で，整数だけの計算問題である33年度〔1〕の55.3%よりよいことなどから考えると，高校への進学を希望して勉強してきた生徒にとっては，分数，小数の計算が整数の計算よりむつかしいとは言えないようである。それよりも，数の大きいことや，計算の口数の多いことに困難を感ずるものと思われる。

⑶ いくつかのねらいを持ち，操作の複合されたものは，個々の操作が簡単な場合でも，はなはだしく困難を感ずるようである。30年度〔1〕の

$$\frac{2}{3}-\frac{7}{12}\div\left(2-\frac{5}{6}\right)=\square$$

を例にとって説明すると，これに含まれている個々の計算，すなわち

$2-\frac{5}{6}=\frac{7}{6}$，　$\frac{7}{12}\div\frac{7}{6}=\frac{1}{2}$，　$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，は，かんたんなものであるのに，正答率は47.6%にとどまっている。

この問題でもっとも重要な点は，

- かっこの用法や乗除を加減より先きにする等の計算の規約を理解していること。
- 式の全体の構造を考え，どういう順序で，どういう方針で解決すべきかという見通しをたててから着手する態度ができていること。

にあると思う。

たとえ式の計算の規約を知っていても，**全体の構造を見きわめ，方針を立ててから処理にかかるという態度**に欠けていると，思わぬ失敗をしがちである。

このことは他の問題についても言えることであり，数の分野の問題だけでなく，数学のすべての分野の問題について言えることである。

(4)　32年度の〔1〕

$(1.4-1.2+\frac{4}{15})\div 1\frac{3}{4}=\square$ と，

34年度の〔1〕

$1.8\times 1\frac{2}{3}-(\frac{5}{6}-\frac{3}{4})\div\frac{1}{2}=\square$

の二つは，いずれも小数，分数の混合している式の計算問題である。

この問題をとくには，

・計算の規約。

・見通しを立て順序よく計算していくこと。

のほかに

・小数，分数の混合している式の計算は全部を小数または分数になおしてすること。

を理解していることが必要である。

この二つの問題の場合は，いずれも小数を分数になおさなければならないのであるが，いきなり計算にとりかからず，最初に問題の構造を見通して方針を立てるという態度ができていれば，その際に，

・式のなかに含まれる小数が1つまたは2つしかないこと。

・小数になおそうとすると割り切れない分数が含まれていること。

などから，これは小数になおすべきではなく，全部を分数になおさなければならないことに気づくであろうし，設問の言葉，「かんたんな分数で」，「答はできるだけ約分すること」からも暗示を得られたであろう。

(5)　33年度〔1〕

$235+57\times 8-5235\div 15+37=\square$

は，5235÷15を計算した結果に，すぐ37を加えたものがあったのではないかと想像される。

もっとも困難な乗除をやってしまったという安心感から，うっかりした誤をおかすことがある。やはり全体の見通しを立て，作業の計画や手順をはっきり見定めてから着手しなかったところから起きる誤りといえよう。

(6) 30年度〔2〕

$\sqrt{3}=1.732$として$\sqrt{12}$の値を求めなさい。

という問題は，$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}$の変形に気づかなかったものがあったと思われる。

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$は指導しても，この逆の$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$が軽く扱われる傾向がある。

なお，この問題には，$\sqrt{3}=1.732$ が与えられている。

問題を解決する場合には，**与えられた条件，既知のことがらを，問題解決にどう役立てるか，**と考えることが，考え方の道すじである。このような考え方に立てば，与えられた$\sqrt{3}$に注目することから$\sqrt{12}$を$\sqrt{3}$と$\sqrt{4}$に分解することに気づいたはずだと思う。

(7) 33年度〔3〕

$4\frac{2}{7}$は$\frac{2}{7}$の$\square$倍である。

という問題ができなかった生徒には，比，何倍の意味を理解していないものもあったと思われる。

3. 指導上の留意点

(1) この分野の正答率は，他の分野に比べれば最もよいのであるが，まだ満足すべき状態ではない。対象が高校進学を希望している生徒であることを考えると，この程度の問題は少なくとも75%～80%の正答率が得られるよう努力したいと思う。

数学科の目標から考えると，計算さえできればよいとか，せめて計算力だけでもつけようとかいう考えが誤っていることは言うまでもない。

しかし，

・数学の問題を解決するには，必ず計算が必要になるのであって，どんなに正しい考え方，正しい立式ができても，正確に計算する力がなければ正しい結果が得られないこと。

・「計算はまちがったが考え方は正しかった。」と言いわけをしてみても，実際の生活では通らないし，まちがった結果を容認することは，合理的精神の養成にも悪い影響を与えること。

・生徒の計算技能が未熟であると，学習指導の際に，計算に多くの時間がとられ，もっと重要な点にじゅうぶん時間をかけて考えさせたり指導したりできなくなる。教師は進度を気にして，つめこみ式の授業をやり，生徒は成功感を味わう機会がなく，数学に興味を失うことになること。

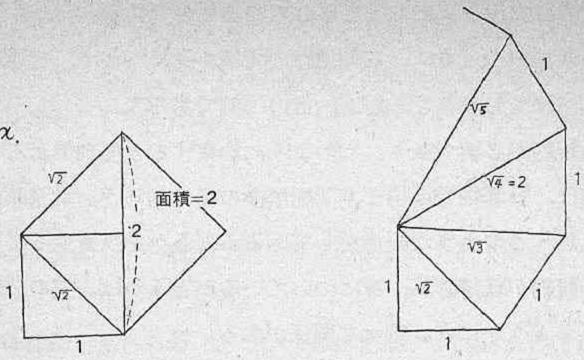
などを考えると，正確に速く計算する技能を身につけさせることは，きわめて重要なことである。

(2) 計算技能を身につけさせるためには，**理解させることと習熟させること**とが必要である。習熟は練習の結果であり，練習は習熟の過程である。習熟のための練習が必要なことは，だれもが気づいており，いろいろ工夫されているが，理解させるための数概念の養成や原理，法則の指導は，導入の段階で軽く取扱うだけのことが多いようである。たとえば，

(a) 無理数の概念は，単に言葉の上で「平方すると２，３，４，‥‥になる数を　$\pm\sqrt{2}$，$\pm\sqrt{3}$，$\pm\sqrt{4}$という。」と暗記させるほかに，

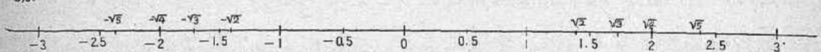
・正方形の対角線や三角形の辺の長さとして，無理数で表わされる線分やその線分を一辺とする正方形を作図させ，その面積との関係を考えさせる。

ex.



・整数，小数，分数と無理数の大小の関係を数直線の上に表わす。

ex.



・無理数の性質を理解するに役立つ簡単な計算を多くさせる。

など，いろいろの具体的な指導を通じて，無理数の存在とその性質を，実感として理解させなければならない。

(b) また，小数と分数の加減は全部を小数または分数になおして計算する，ということも，これを単に小数と分数の加減はこうするのだという技術として教え，暗記させるのでなく，

「すべて数量の加減は同種類の同じ単位で表わされたものでなければ加減はできない。」

という，より一般的な原則の適用として理解させたら，理解も記憶も確実となり，実際の問題にも適用できる技能になると思われる。

(3) かっこの用法や乗除は加減に先だつ等の計算の規約も，単にこういうきまりになっているのだ，と，暗記を強いたのでは，実際の場で適用できる知識技能にならないだけでなく，記憶していることだけでも困難だと思う。

われわれがいろいろの規約や規則を理解し，記憶していて，実際の場でそれに従って行動できるのは，なぜそのような規約が必要なのか，なぜ他の規則でなくてそのような内容の規則がつくられたのかという，**その規約や規則**

の必要性や必然性を身にしみて感じている場合である。

山間へき地の子どもに，右側通行の習慣が身につかず，交通規則を教えてもすぐに忘れてしまうことなど，その一例であろう。

計算の規約が必要であり，このように約束すると便利であることを理解させる機会は，計算練習の場より問題解決の場であろう。文章題の立式の指導の際などに，このような配慮をしているかどうかを反省する必要がある。

計算の規約が理解され，身についているかどうかは，式の分野の学習が順調にいくかどうかにも，重大な関係がある。

⑷ 計算技能の習熟をはかるために練習をさせるにあたって考えねばならないことは，合理的，能率的な練習ということである。

練習を必要とする点は，学級により，生徒によって異なる。一般に分数の計算が困難だと言われており，これは事実でもあるが，すべての分数計算がすべての生徒にとって，同じ程度に困難なのではない。

一例として，小学校の指導内容であるかけざん九々を考えてみよう。

当研究所が昭和30年３月上旬，全県から選んだ標本学校38か校の小学校３年生を対象としたテストの結果によると，かけざん九々のうち

3×5	の正答率は	98.8%
7×4	は	84.1%
4×0	は	69.5%

で，その正答率に大きな差がある。（注15）

また，一元一次方程式の基本型では$A - x = B$の型に最も誤答が多いことも知られている。

このような事実を無視して，一律に多くの練習を課し，時間と労力を空費し，児童生徒に過重な負担をかけることは避けなければならない。

もう一つ例をあげよう。これも小学校に多いのであるが，よく，教科書や問題集にある計算問題をやらせることがある。児童は計算そのものよりも，

・注15　新潟県立教育研究所紀要第12集
　算数・数学診断テスト作成についての実験的研究

問題をノートに写し取ることに多くの時間と労力を費していることがある。数字の書写や位をそろえて書くことに練習の目的がある場合はこれでもよいと思うが，計算そのものに目的がある場合には他に能率的な方法があろうと思う。

(5) 式の計算の場合にも，一般的な数学学習の態度ができているか否かは成功するかどうかに大きな影響がある。

・**問題の全体構造を見きわめ，どういう順序で解決すべきかの方針をたててから作業にかかる態度**が必要なことは，既に述べた通りである。

・**思考や操作の過程を軽視せず，慎重に操作を進めるという態度**もその一つである。

たとえば，生徒は途中の計算をはっきり書かなかったり，消したり，用紙のすみにうすく書いたりする傾向がある。たとえ答だけを要求されている場合でも，途中の計算をはっきり書いていくことは，誤算を防ぐ点からも，後で思考の過程を反省したり計算のたしかめをする上にも役立つであろうし，何よりも，このような慎重な態度が，正しい思考と正しい計算を保証するであろう。

暗算に確信のある場合のほかは，途中の計算を残す習慣をつけておかなければならない。

・**誤を発見する技術を教え，験算をする習慣を養う**ことも必要なことの一つである。思考や操作の順序をもう一度辿ってみることや結果から逆に操作して初めの条件にかえる道順をたどってみることのほかに，概算で結果を予想すること，具体的な場に即して結果を検討してみる態度も重要なものである。

Ⅱ　文字による表現，式の値，式の計算

1.　問題とそのねらいおよび正答率

年度	問題番号	問　　題	問題のねらいと正答率
30	〔3〕	つぎの式のかっこをはずして簡単にし，——の上に書きなさい。 $(5x+3)(2x-1)=$＿＿＿＿	・二項式のかけざんができるか。 ・同類項の簡約ができるか。　38.5％
31	〔3〕	$x=-4$，$y=\sqrt{3}$，$z=5$として，つぎの式の値をもとめ，□の中に書きなさい。 $3y^2-xy=\boxed{}$	・式および式の値の意味を理解しているか。 ・無理数の意味を理解しているか。 ・負数の計算ができるか。　49.1％
32	〔2〕	つぎの式を，かんたんにしなさい。 $(a-3)^2+7a-4$ 答＿＿＿＿	・$(a-b)^2$ の展開ができるか。 ・同類項の簡約ができるか。　50.7％
33	〔7〕	周の長さが，どちらも$4a$cmの，円と正方形とがある。これについて，つぎの問に答えなさい。ただし，円周率はπで書き表わすものとする。 イ．円の半径はいくらか。簡単な形で書き表わしなさい。 答＿＿＿＿cm ロ．円と正方形の面積の比を，簡単な形で書き表わしなさい。 答（円の面積）：（正方形の面積） ＝＿＿＿＿：＿＿＿＿	・文字で表わされた数量についての理解がじゅうぶんであるか。 ・正方形の周，辺，面積の関係を理解しているか。 ・円の直径，半径，周，面積の関係を理解しているか。 ・比の簡約ができるか。 イ　27.4％ ロ　18.1％
34	〔2〕	$a=2$，$b=1$，$c=-3$として，つぎの式の値（あたい）を求め，□の中に書きなさい。 $a(a-2bc)-c=\boxed{}$	・式，式の値の意味を理解しているか。 ・かっこの意味を理解しているか。 ・負数の計算ができるか。　52.4％
	〔3〕	つぎの式を，かっこをはずして簡（かん）単にし，□の中に書きなさい。 $(\frac{1}{2}x+3)(\frac{1}{3}x-4)=\boxed{}$	・二項式のかけざんができるか。 ・分数の計算になれているか。　54.1％

2. 生徒の困難点

(1) 式の分野でも，生徒の学力は年々向上しているようである。このことは，30年度〔3〕の問題の正答率が38.5%にすぎないのに対し，同じ種類で係数に分数を含んでいる34年度〔3〕が54.1%ではるかによいことなどからうかがわれる。しかし，まだ，満足すべき成績とは言えない。

(2) 31年度〔3〕の　$3y^2-xy$の値を求める問題では，$y=\sqrt{3}$と与えて，さりげない形で無理数の理解の有無をみることをねらっている。

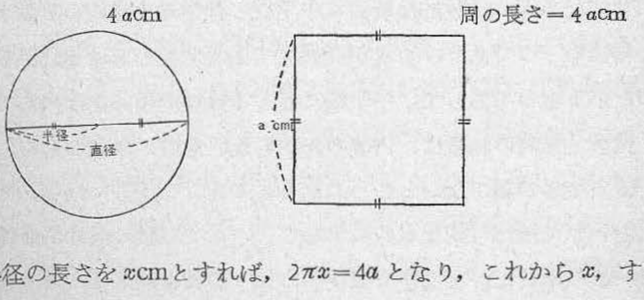
この問題や34年度の〔2〕では，負数の計算技能をみることもねらいとしている。

(3) 周の長さが$4a$ cmの円と正方形に関する33年度〔7〕の問題の正答率は，イが27.4%，ロが18.1%で，どちらもたいへん低い。

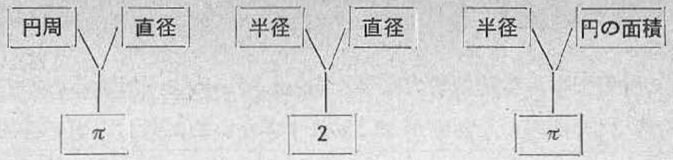
(a) 生徒がこの問題に困難を感じたのは，半径や一辺の長さを知って周の長さや面積を求めるのでなく，逆に周の長さから円の直径や正方形の辺の長さを求め，さらに半径や面積を求めなければならないという逆思考の，しかも2段階，3段階の問題であることに，一つの原因があると思う。

この点については，

・図を書いて具体的に考える習慣をつけておくこと。



・半径の長さを$x$cmとすれば，$2\pi x=4a$となり，これからx，すなわち半径が求められるという代数的思考になれさせておくこと。

・

の関係をしっかりは握させておくこと。

・順序よく考えていく態度を身につけさせておくこと。

などによってある程度，救われると思う。

(b) しかし，この問題で生徒が最も困難を感じた根本的な原因は，周の長さが文字で，しかも a とか b とかという一つの文字でなく，$4a$という形で与えられたこと，および円周率を πという文字で扱わねばならなかった点にあると思う。おそらく，周の長さとして具体的な数字を示し，円周率として3.14を用いさせたら，正答率ははるかによくなったと思われる。

したがって，生徒が$4a$のかわりに適当な数を考え，円周率として3.14を用いる場合にどうするかを考え，その過程をそのまま $4a$，πの操作におきかえるようにすれば，いくらか正答率はよくなったと思うが，いずれにしても，文字の意味，機能，文字使用上の諸規約を理解すること，特に式が演算の手順を示すと同時にその結果得られる一つの数量を示すものであることの理解は，生徒にとってなかなか困難であると思われる。

3. 指導上の留意点

(1) 代数的な思考，代数的な解法は中学校の数学を小学校の算数と区別する主要な特徴の一つであり，これが発展して高等学校における代数教材や微積分につながるものであって，中学校における数学の中心的な内容である。

(a) 代数的思考の特徴は，内容のわからないもの，未知のもの，したがって不安定な手の届かないところにあるものを，○,□，x, y等，その symbol で表わして操作可能なものにすること，および数の具体的な特性を捨てて数一般の本質だけを文字で表現し，個々の数を越えて，数一般に通ずる性質や法則を，機械的な操作によって見出だそうとするところにあり，（注16）

・注16　岐阜県立教育研究所紀要第22集　中学校における学力の問題点とその指導

(b) 代数的解法の特徴は，問題の最終目標は何か，という不安な緊張から一応解放され，これを事実の代数的な飜訳と記述という目標に置き換え，得られた関係式を機械的に操作することによって問題を解決しようというところにある。(注16)

さきに生徒が困難を感ずる点として述べた

・数量を文字で表わして演算の操作をし，得られた式を一つの数量とみること

は，代数的思考の特徴に対応し，つぎの方程式の分野で生徒が困難を感ずる点である。

・数量関係をとらえてこれを式で表わすこと

は，代数的解法の特徴に対応するものである。

したがって，この二つの困難を克服させることは，代数的解法，代数的思考，すなわち式の分野の学習の成否の根本にかかわる問題である。

(2) 文字に対して生徒が抵抗を感ずる理由の一つは，**文字の表わす意味にいろいろの種類がある**ということである。

具体的な数字とちがい，文字は，場合により，視点によって，いろいろの意味と性格を持ってくる。

$$\begin{cases} \text{定数} — \begin{cases} \text{既知数} \\ \text{未知数} \end{cases} \\ \text{変数} \end{cases}$$

たとえば，「円の半径をr，周の長さをℓとすると，ℓとrの関係は$\ell = 2\pi r$である。」という場合は，πは定数であり，ℓとrは単に任意の数を表わしている。しかし生徒は，ℓもrも自分には値がわかっていないがある定数だと感じているのではないだろうか。ところで，rを与えられたときℓを求めるとかℓを知ってrを求めるとかいう場合は，一つは既知の定数となり，一つは未知の定数となる。また，「ℓはrに比例する。」という場合は，ℓもrも変数となる。

このように，同じ文字が，ある場合には既知数となり，ある場合には未知数となり，みかたによっては定数となり，変数となること，さらに，定数は

変数を特定の時点においてみたものであり，変数の一断面であるというように統一的にとらえ得ることは，代数的思考，数量を文字で表わすことの利点なのであり，教師にとっては当然のこととして格別困難には感じられない。しかし生徒にとっては当然のことでもなく，容易に理解されることでもない。

教師は，自分にとってわかりきっていることは，生徒にも容易に理解されるものと考えがちであるが，同一の文字が時によって定数となり，変数となり，時によって既知数となり，未知数となるということは，生徒にとっては紛らわしいことであり，文字の性格をつかみ難いものにしている。

文字の指導にあたっては，このような生徒の心理を考え，文字が既知の定数，未知の定数，変数といろいろに考え得ること，それぞれの場合の文字がそのいずれであるか，どこで，どのような理由で視点の変更がなされ，既知数が未知数に，定数が変数に考えなおされたのかをはっきりさせ，混乱を起させないようにしなければならない。

(3) 生徒が文字に抵抗を感ずるもう一つの理由は**文字の抽象性**にある。

文字は個々の具体的な数の特性を越えた数一般の本質を象徴するものであり，ここに文字の有用性がある。さきに述べた同一の文字が変数，定数，既知数，未知数のいずれとも考えられる根拠もここにある。しかし，この高度の抽象性のために，生徒はなかなか文字を理解できない。

このような抽象的な概念は，単に定義を暗記させたり言葉で説明しただけでは養われるものではない。教え込むことはできず，生徒自身が獲得するのをまたねばならないのではなかろうか。ただ，生徒がその意味を自得し，その概念を獲得するには，おのずからたどるべき過程があり，必要な経験がある。教師のなすべきことは，**その概念形成に必要な経験を組織的に与え，たどるべき過程を意図的計画的にたどらせること**である。

小さい子どもは，りんご，お菓子，玩具等を，形，色，味，臭等一切の属性をそなえた実物それ自身を数詞と一々対応させて数え，やがて抽象的な数の概念を獲得するに至る。しかしその過程に，りんご，お菓子，玩具等を略画，おはじき，手の指，○，□等の半具体的なもので表わし，それと数詞を

一々対応させて考える段階がある。略画，おはじき，指，○，□等は実物ではなくてそれらのsymbolであり，抽象されたものであって，もう一段抽象化がすすめば数の概念に到達するのであるが，子どもは，これら半具体物においてりんごの色を見，お菓子の甘さを考え，臭をかぐことができるわけである。やがてこれらの半具体物を離れて数えることができるようになるのであるが，なおしばらくの間，これらの具体物，半具体物を表象にえがいて数える時期が続く。

いわゆる数形で数えるものも，この段階の一つであると思う。

これと同様に，数字で表わされた数の段階から文字で表わされた数の概念に飛躍する場合にも，その間をつなぐ段階が必要であり，その間隙を埋める経験が必要であるように思う。

・特定の数や事物の表象を頭にえがきながら文字を考える。

・数量を表わす言葉で考える。

というような段階である。

$ab=c$，という式をみた場合，教師は a，b，cの文字の意味を限定せず，数一般と考える。だからこそ，必要に応じてこれらの文字を長方形の一辺の長さや面積を表わす数と考えたり，物の単価や個数と考えたり，時に応じ自由に解釈し，いろいろの場に適用できるのである。

しかし，生徒はこの式をみた場合，aは長方形の一辺を，bは他の辺を，cは面積を，表象にえがいて考える。もちろん，その生徒の経験によって必ず長方形を表象にえがくとは限らず，ある生徒はりんごの単価と数量であり，ある生徒は働いた日数と賃金であるかも知れない。とにかく，なんらかの具体的な感覚，具体的な物や行為の表象で考える段階を経過するものと思う。

こうした段階は，しりぞけるべきものではなく，むしろこのような経験を多種多様に与えるべきである。そうすることによってのみ，生徒自身が文字で表わされた抽象的，一般的な数の概念を獲得するに至るのである。

小学校の時代から

・長方形の面積＝たての長さ×よこの長さ

・単価×数量＝全体の金額

・歩いた距離＝速さ×時間

などのように，具体的な関係から法則としてとらえ，一般的な言葉で表現するような指導をしておくことは，このような意味からも重要なことである。

とにかく，文字については，もっとじゅうぶんの時間をかけ，計画的に指導する必要があろう。

感覚的，具体的な実物を数える段階 ── 形，色，味，臭等一切の属性をそなえた実物そのものを数える。

↓

略画，おはじき，指，○等の半具体物で数える段階

↓

抽象的な数で数える段 ── 抽象的な数であるが特定の数であるので，なお感覚的な物の表象を頭にえがくことができる。

↓

・具体的な物の表象で文字の意味するものを数える段階
・数量を表わす言葉で考える段階

↓

数一般を文字で考える段階 ── 数一般を考え，具体的な物や数と関係なく，抽象的に考える。

(4) 文字による表現のしかたには特有の規約がある。これも教師にとっては自明と言える程わかり切ったことであるために軽く扱われ，文字導入の最初の段階から生徒をつまづかせていることはないであろうか。一例をあげよう。

文字と文字，数字と文字との間の乗法記号×は省略すること，数字と文字との積を表わす場合は数字をさきに書くという規約は，たれもが教えることであろう。しかし，

・この規約の結果として，たとえば

$4x$には $\begin{cases} 4x=4\times x \\ 4x=x\times 4=x+x+x+x \end{cases}$

という２通りの意味が生ずることを，生徒にはっきり理解させるところまで指導がなされているであろうか。

・小学校時代に，仮分数は帯分数になおすよう習慣づけられている生徒がある。このような生徒が，たとえば $\frac{3}{2}a$, $1\frac{1}{2}a$ を考える場合

に，$1\frac{1}{2}a$ は $(1+\frac{1}{2})a$ であって，$1+\frac{1}{2}a$ すなわち $1\frac{a}{2}$ でないと，混乱を起させないような配慮がなされているであろうか。

・$a\div b\times c=\frac{a}{bc}$ または $a\div bc=\frac{ac}{b}$ と誤る生徒もあるものなのであるが，$a\div b\times c$ と $a\div bc$ の区別を注意して指導されているであろうか。単に「乗法の記号は省略する」だけでは $a\div b\times c=a\div bc=\frac{a}{bc}$ とする生徒を責めることはできないであろう。

これらは，ほんの一例にすぎないが，要するに，教師は，教師の理解と生徒の理解との間のギャップについて，もっと研究する必要があると思う。

Ⅲ 方　程　式

1. 問題とそのねらいおよび正答率

年度	問題番号	問　題	問題のねらいと正答率
30	〔4〕	つぎのことがらにおけるaとbの関係をあらわす等式をつくりなさい。 定価a円の品物を定価の3割引に売っても，原価のb円とくらべて，なお50円の利益がある。 答＿＿＿＿＿＿	・定価，原価，3割引の意味とそれら相互の関係を理解しているか。 ・文字を用いて数量関係を式で表わせるか。 25.5％
31	〔4〕	つぎの連立方程式を解き，答を書きなさい。 $\begin{cases}\frac{x}{3}+y=3\\2x=3y\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=\\y=\end{cases}$	・二元一次方程式が解けるか。 ・分数係数になれているか。　51.8％
32	〔3〕	つぎの方程式を解きなさい。 $3(x-1)=\frac{5x-1}{7}+2x$ 答 $x=$＿＿＿＿＿＿	・分数係数の一元一次方程式が解けるか。 51.6％
33	〔5〕	みかん1箱120個入りのものを仕入れたが，そのうち2割がくさっていたので，残りを仕入れねだんよりも1個につき2円高く売り，1箱について24円の利益を得た。みかん1個の仕入れねだんはいくらか。みかん1個の仕入れねだんをx円として方程式をつくり，その方程式と答を書きなさい。 イ．方程式＿＿＿＿＿＿ ロ．答＿＿＿＿＿＿円	・仕入れねだん，利益，2割の意味とそれら相互の関係を理解しているか。 ・数量関係を方程式で表わせるか。 ・一元一次方程式が解けるか。 イ　23.5％ イができて，ロができた者 20.2％

34	〔7〕	ある家の先月の生活費は24.000円で，今月はその2.5％増であった。これは，光熱費を280円節約したが，食物費が8％増加したためである。 食物費，光熱費以外の費用に毎月11500円要するものとすれば，先月の食物費および光熱費はいくらか。先月の食物費をx円，光熱費をy円として連立方程式をつくり，その方程式と答を書きなさい。 イ．連立方程式 { ロ．答 { 食物費＿＿＿＿＿＿円 光熱費＿＿＿＿＿＿円	・百分率の意味を理解しているか。 ・この問題の数量関係を連立方程式に表わせるか。 ・二元一次連立方程式が解けるか。 ・やや大きな数の計算になれているか。　8.5％

2. 生徒の困難点

(1) 31年度〔4〕の連立方程式を解く問題と32年度〔3〕の一元一次方程式を解く問題の正答率はそれぞれ51.8％，51.6％である。この成績はもちろん満足すべき成績ではないが，他の問題の8.5％～25.5％にくらべればはるかに良い。33年度〔5〕も，答まで正しくできたものが20.2％で，方程式のできた23.5％とほぼ等しいことから考えると，方程式さえできればそれを解くことには困難を感じなかったと思える。

これらのことから，方程式を解くという形式的な問題はやや良いが，問題を数学的に読みとり，数量関係をみぬいて式で表わすということができないようである。

(2) 30年度〔4〕の「定価a円の品物を定価の3割引で売っても，原価b円とくらべて，なお50円の利益がある。」という関係を式で表わす問題は，正答率が25.5％にとどまっている。

生徒がこの問題に困難を感じた理由はつぎの点にあったと思われる。

・3割引の数学的な意味，すなわち，3割引で売ったということは定価の0.7倍で売ったことであることを，はっきり理解していないこと。

・定価，割引歩合，売価の関係，原価，利益，売価の関係，これらの基本的な関係をはっきり理解していないこと。

・定価や原価が文字で表わされていること。

(3) 33年度〔5〕と34年度〔7〕はいずれもよくない。ことに34年度の〔7〕の正答率は，わずかに8.5％である。どちらもいわゆる文章題であるが，このような問題の立式に苦しむのは，

・問題を適当に区切ったり，要所に underline を引いたり，要点を抜き出して書く等の方法で，問題の意味をはっきりつかむ態度ができていないこと。

・図を書いて考えたり，言葉や記号を用いて基本的な関係を表現したりして，問題の構造や数量関係をとらえる態度ができていないこと。

によると思う。

このような問題を解くには，求めるものは何か，という目標をはっきりつかんだ上で，必要な要素や与えられた条件をとり出して問題を整理し，図で表わす等の方法で，一つ一つ関係を明らかにし，順次全体構造をとらえるという態度，技能ができていなければならないのである。

3. 指導上の留意点

(1) 言葉が一般の思考の媒介となると同様に，式は数学的思考の媒介となる。ところで，式の機能にはつぎの二つの面がある。

・**演算操作の手順を示す**――いくつかの要素にどんな演算を，どんな順序で行ったか。

・**操作の結果である新たな意味の一つの数量を表わす。**

式が演算の手順を示していることは，式のなかに＋や－の記号が含まれていたり，分数の形になっていたりするので容易に理解される。ところが，このような演算の記号や分数の形に気をとられて，式が演算操作の結果得られた一つの数量を表わしているという機能を見逃す。

たとえば33年度〔5〕の問題は，みかん1個の価を x 円とし，それよりも2円高く売ったというので $(x+2)$ 円とするわけであるが，この $(x+2)$ 円は，もはや仕入れねだんではなく，また仕入れねだんに2円を加えたもの

でもない。これはx円に2円を加えたという操作を示すものであると同時に「売価」という新たな一つの数量を示すとみなければならないのである。このことがはっきり理解されていないと，これに個数を乗じて売価の総額を出せるという考えが順調にでてこない。

34年度〔7〕でも，食物費をx円，光熱費をy円とした場合，それらを加えた（$x+y+11500$）円は生活費という新たな性格の一つの数量に転化しているのである。

また，さきに式の値の分野で説明した33年度〔7〕の問題の，周の長さが$4a$cmの円について言えば，$\frac{4a}{\pi}$は直径を，$\frac{2a}{\pi}$は半径を表わし，$\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2\times\pi$は面積を表わしており，単に演算の手順だけを示しているのではない。

このことをよく理解していないと，数量関係を式で表わし，その式を媒介として思考を進めていくということができなくなる。

したがって，具体例について，基本的な数量関係を式で表わすことを指導するとともに，式そのものがどういう数量を表わしているかを数多く練習させる必要がある。33年度〔5〕，34年度〔7〕のような文章題指導にあたっても，解決の過程で得られた式が，どういう意味をもっているかを確認させるという指導が重要であろう。

このようなことは，中学校だけでなく，小学校の文章題等の指導においても留意しなければならない点である。

(2) 式も文字と同様に抽象的一般的であるという点で生徒に困難を感じさせており，その理解も文字と同様の段階をたどるものと思われる。これを図式的に示せば左のようになろう。

事実や行動の具体的な文章表現

↓

劇化，情景図，略画等による理解や表現

↓

数学的な文章表現

↓

このような過程を考えると，文字式の取扱い以前に——小学校の時代から，数量間の関係を一般化して，言葉で，あるいは式で表現させることや，文章題指導にあたって，文字式の表わす意味を言葉で表わしたり特定の数で考えたり

行動で考える 言葉による式表現 特定の数による表現

↓

文字式による表現

具体的な関係を表象にえがいたりして考えることなどの指導をじゅうぶんしなければならないと思う。

(3)　30年度〔4〕，33年度〔5〕，34年度〔7〕のような文章題では，数量間の関係を理解することに困難点がある。

数量関係をとらえるには

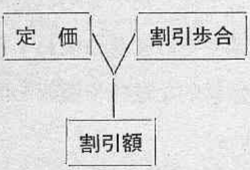
- 文章が読めること。
- 問題場面を具体的に理解するだけの経験をもっていること。
- 数学の用語や記号の意味を理解していること。

などが必要であるが，これらについては，ここではふれないことにする。ただ考えておきたいことは，**言葉の数学的な意味**についてである。

たとえば，30年度〔4〕の「定価a円の品物を定価の3割引で売っても，原価b円とくらべて，なお50円の利益がある。」という問題における定価，原価，利益，割引歩合等の数学的な意味が計画的に指導されているであろうか。

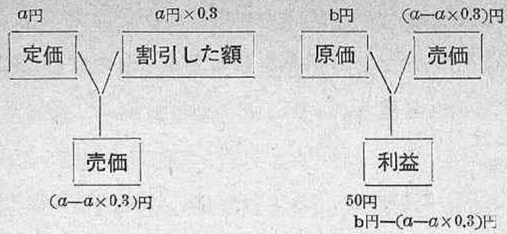
これらの言葉の意味が，国語的に解釈され，社会科的に指導されただけでは数学の問題を解決できる力になり得ないし，数量関係をとらえるのにも役立たない。

定価，割引歩合，割引額を個々別々に考えたのでは数学的な意味はわからない。この三者は一体となって一つの関係，一つの構造をもっている。



$$\begin{cases} \text{定価} \times \text{割引歩合} = \text{割引額} \\ \text{割引額} \div \text{割引歩合} = \text{定価} \\ \text{割引額} \div \text{定価} = \text{割引歩合} \end{cases}$$

定価と割引歩合からすぐに割引額が，割引した額と定価からすぐに割引歩合が頭に浮かぶようになっていなければならない。同様のことは，



等についても言える。

このような基本的な関係に結ばれた一体的な構造を理解し，原価と利益からただちに売価が，定価と割引した額が与えられたらすぐに売価が頭に浮かぶ時，はじめてこれらの言葉の数学的な意味や機能がわかったと言えるのである。

問題の全体構造をつかむには，**かくれた要素，媒介要素**——30年度〔4〕の例で言えば割引した額や売価がこれにあたる——を発見することがその鍵であると言われているが，媒介要素の発見も，以上のような基本構造，数学的な意味や機能を理解していてはじめて可能なのである。

また，目標分析，条件分析，すなわち

- **求めるものは何か——→それには何がわかればよいか。**
- **わかっていることは何か——→それからどんなことがわかるか。**

と考えることが必要だと言われている。この考え方はきわめて重要なことであり，生徒に必ず身につけさせなければならない態度であるが，この考え方を効果あらせるためには，さきに述べたような基本構造の理解が前提になる。

もちろん，これも，式の指導をする時になってはじめて気づいたのでは既に遅い。小学校算数の時代から，基本的な言葉やその言葉の表わす事実について，国語的な意味の指導に終ることなく，数学的な意味や機能を理解させるような指導を積み重ねてこなければならない。

(4) 多くの場合，文章題は，いろいろの現象や行動が具体的に，時間的系列に従って——時には逆順に——書かれている。このように時間的な系列との関係において具体的に記述されていることは，生徒が自分の経験を背景にして問題場面を理解するには好都合である。

しかし，問題を数学の問題として立式するには

・本質的な数量関係だけをとり出して余分なものを捨て，

・行動や現象の時間的系列を同時的，空間的系列におきかえる。

という過程を経なければならない。このことを容易にするために行われる作業の一つに，問題のなかの要素をぬき出し，その関係を図式的に示す，ということがある。

図式化することはこのほかにも，

・文章の表わす内容を視覚化して全体構造を概観しやすくする。

・思考の過程を自覚し，反省しやすくする。

という有利な点がある。

図式化の方法にもいろいろある。

(a) 見取図，情景図をかく。

(b) 簡単な言葉を用いて図式化する。

(c) 記号によって関係を図表示する。

(d) 線分図をかく。

(e) 構造図をかく。（注17）

そのおのおのの長短や，どの方法を重視すべきか，あるいは時により場合によっていろいろの方法を併用すべきか等については，ここで述べている余裕はないが，とにかく，**問題を図式化して数理の構造を同時的空間的に，全体的につかむことは，文章題の立式を可能にするためにきわめて有効な方法である**。図を書いてやったら生徒がわかってくれたという経験は，すべての教師が持っているであろうと思う。

ところで，実際の指導では，教師が黒板に図をかいて――あらかじめ用意した掛図などを持ち出すこともある――説明し，「さあ，わかったでしょ

・注17　算数教材研究講座　第5巻　問題解決　金子書房
中学校数学教材研究講座　第6巻　問題解決　〃
越智政雄　文章題の読解と構造図　算数教育　通巻第5号　明治図書
三浦泰三　構造図の紹介と批判　〃
長妻克己　構造図無用論　〃
日本数学教育会誌　第41回総会特集号　昭昭34年度

う。式を立ててごらんなさい。」というようなことがよく見受けられる。

問題の全体構造が図式的に説明されれば立式が容易になるのは当然であるが，これでは教師が問題を解いたのであり，生徒が考えたことにならない。このような指導では生徒が独力で問題を解き得る学力は養われない。必要なことは，生徒自身が問題を図式化して数量関係をは握できるようにすることである。

考えることは教師がやり，生徒は機械的な計算だけをやったり，せいぜい教師の考えた道すじをなっとくするだけというのではなく，生徒自身が考えるように指導しなければならない。

そうすることによってのみ，生徒の考える力も伸び，生徒ができたという成功感を味わい，自信を持ち，数学に対する興味を持つようになるのである。

考える有力な手段である図式化の方法を，小学校の段階から，組織的に指導する必要がある。

Ⅳ 比，歩合

1. 問題とそのねらいおよび正答率

年度	問題番号	問題	問題のねらいと正答率
30	〔7〕	ある中学校で修学旅行をすることになり，希望をとったところ，A方面行き，B方面行き，および不参加者の人数の割合は8：7：4であった。 ところが，その後希望の変更があったので，その割合は9：7：2となった。 全体の人数に変りないものとして，つぎのイ．のうちの正しいものの番号を○でかこみ，ロ．にその理由を書きなさい。 イ．B方面行の生徒数は 1．はじめの希望者数よりも増した。 2．はじめの希望者数と変らない。 3．はじめの希望者数よりも減じた。 ロ．理由	・連比の意味を理解しているか。 ・全体と部分の関係に注目して割合での比較ができるか。 12.9%

31	〔6〕	山下君の学級の生徒は全部で48人で，このうち30人は進学を希望し，12人は就職，6人は家業に従事することになっている。山下君はこのことを円グラフで表わすことにしたが，進学希望者数を表わす部分の中心角は何度にしたらよいか。答を書きなさい。 答　　　　　度	・円グラフの意味とかき方を理解しているか。 ・比例配分のやり方を理解しているか。　63.0%
32	〔5〕	つぎの問題を解いて，式と答を書きなさい。 定価110円の商品を1割引で売っても，まだ原価の1割の利益があるという。この商品の原価はいくらか。 イ．式 ロ．答　　　　　円	・原価，定価，割引，利益の意味とそれら相互の関係を理解しているか。 ・この問題の全体構造を理解し，数量関係を式で表わせるか。 イ　26.1% イロとも正解　26.1%
33	〔8〕	ある村の戸数は750戸である。このうち，漁業に従事している家が42%，農業に従事している家が34%ある。ただし，これらのパーセントのうちには，漁業と農業の両方をやっている家がふくまれており，それは村の総戸数の6%にあたる。これについて，つぎの問に答えなさい。 イ．漁業に従事している家のうち，農業を兼ねていない戸数はいくらか。 答　　　　　戸 ロ．農業，漁業のどちらにも従事していない戸数は総戸数の何%か。 答　　　　　%	・百分率の意味を理解しているか。 ・この問題について，全体と部分，部分相互の関係をは握できるか。 イ　32.9% ロ　7.3%
33	〔9〕	同じ品物を作るA，B，C三種類の機械がある。これらの機械の，1台1時間あたりの生産高は，Aは24個，Bは15個，Cは30個である。これについて，つぎの問に答えなさい。 イ．A，B両種の機械をつかって，その毎時間の生産高を等しくするには，それぞれ最小限何台ずつそなえたらよいか。 答 { A　　　　台 　　 B　　　　台 ロ．Aを10台，Bを14台つかっている工場がある。この工場で，生産を2割高めるため，さらに，Cの機械を入れることにした。何台いれたらよいか。 答　　　　　台	・機械の生産能力，時間，生産高の関係を理解しているか。 ・この問題の数量関係をとらえることができるか。 イ　65.5% ロ　47.6%

34	〔4〕	A，B，Cの3人が共同で仕事をして得た利益をわけるのに，AはBの9割，BはCの8割の分け前をとるようにしたい。 A，B，Cの分け前の割合を求め，できるだけ簡単にしなさい。 答 □：□：□	・比，割合，の意味を理解しているか。 ・二つの比から連比を求めることができるか。 27.6%

2. 生徒の困難点

(1) この分野の問題はいずれも比，歩合に関係した問題であるが，30年度〔7〕31年度〔6〕，33年度〔8〕，34年度〔4〕は，特に比，歩合についての理解をみることをおもなねらいとして出題されたものである。

これらの問題の正答率は，31年度〔6〕の円グラフの中心角を求める問題が63％でやや良いほかは，いずれも30％に満たず，特に30年度7番や33年度8番のロは，それぞれ12.9％，7.3％にすぎない。

(2) 30年度〔7〕，修学旅行の目的地別希望者数の比についての問題を例として説明しよう。

比の問題では，変化しないもの，一定のもの，基準になる量は何か，と考えることが問題を解決する鍵である。このことをしっかり理解しておれば，問題のなかの「全体の人数に変りないものとして」という言葉の重要性も悟られたであろうし，この言葉がなかったとしても全体の人数に注目できたと思う。したがってB方面行きの人数は，初めは全体の$\frac{7}{19}$であり，変更後は全体の$\frac{7}{18}$である。どちらも同じ全体の人数を基準にした割合であるから$\frac{7}{19}$と$\frac{7}{18}$を比べればよい，と考えてこられるはずである。

このように考えられなかったもの，あるいは8:7:4と9:7:2でどちらも7であるから変化がないなどと速断したものは，比や割合を表わす数は，基準量を併せ考えてはじめて意味のある数になるのだ，ということの理解があやふやであったためと思う。

この問題は，

(a) 具体的な人数を想定して考える。たとえば，全体の人数を100人とか(この場合はB方面行きの人数が分数になるが）347人とかと考えて，二つの

場合のB方面行きの人数を計算してみる。

(b) 全体の生徒数を a 人とし，B方面行きをそれぞれ$\frac{7a}{19}$人，$\frac{7a}{18}$人として比べる。

(c) 図をかいて考える。

等の方法でも解けるが，いずれにしても，全体の人数に着目できるかどうかが，成功と失敗のわかれ目となる。

(3) 31年度〔6〕は，学級全体の人数48人と進学，就職，家業従事のそれぞれの人数30人，12人，6人を知って，円グラフの進学者に相当する部分の中心角を求める問題である。

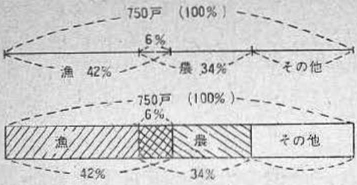
進学希望者30人の全体に対する割合を考え，それに対応して全体の角360度中の進学者に相当する部分の中心角を求める数理は，やはり比の考えである。

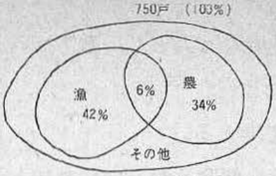
この問題は，$360° \div 48$として1人にあたる中心角を求め，これを30倍するという解法もあるが，いずれにしても，この問題が63%という，他に比べてたいへん良い正答率を示しているのは，たまたまこの年度の生徒が比についてじゅうぶん理解をもっていたと考えるより，円グラフのかき方は相当練習させられていて，その手順を機械的，形式的に覚えている者が多かったと見るべきであろう。

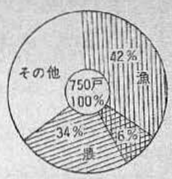
(4) 32年〔5〕は，方程式の分野でとりあげた30年度〔4〕と，ほぼ同様の問題である。この問題を誤った生徒は，定価，原価，売価，利益，割引歩合，利益の歩合等の関係をはっきり理解していなかったのではないかと思う。

(5) 33年度〔8〕は，漁業，農業の従事者がそれぞれ42%，34%というなかに，兼業者が6%だけ重複して含まれている点に，生徒が苦しんだものであろう。

この間の関係を洞察する力の不足もさることながら，もしこの関係を下図のように図に書いてみる態度ができていたら，もっと多くの生徒が解けたであろうと思われる。







(6) 33年度〔9〕のイは最小公倍数の問題と考えることができる。すなわちA，B二種の機械の生産高を等しくした場合の生産高は，1台あたりの生産高24個と15個の最小公倍数である。これを媒介としてA，Bそれぞれの台数を求め得るのであるが，この考え方では媒介要素である生産高に気づくことが要点である。

この問題は，製品の数を台数の函数と考え，つぎのような表をつくってみても解けるし，このような考え方も重要な思考態度である。

台　　数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aの生産高	24	48	72	96	**120**	144	168	192	216	240
Bの生産高	15	30	45	60	75	90	105	**120**	—	—

また，1台の機械の生産能力と，台数および生産高の関係を考え，生産高が一定の場合は1台の生産能力と機械の台数は反比例すると考えてもよいのである。

この問題の正答率が65.5%で比較的良かったのは，このように幾通りもの解法があるので，その何れかに気づく確率が大きかったことによると思われる。

(7) 33年度〔9〕のロは，時間が示されていないので，生産高を考えていくのに迷ったものもあったと思われる。

元来，A，B，Cの生産能力を示す24個，15個，30個という数は単位時間あたりの製品の個数で，速さや人口密度と同様に，異種の量である個数と時間との比である。したがってkm/時，人/km^{2}などと同様にこの単位を個/時

と書くこともできるであろう。

このような問題では，時間を特定の時間，たとえば1時間と仮定して考えれば，A10台の生産高，B14台の生産高，その合計，その2割にあたる製品の数，と，順次に考えやすくなる。これは30年度〔7〕の問題で，示されていない全体の人数を100人とか342人とかと仮定した考え方と同じ考え方である。

また，時間をa時間として代数的に考えることも可能である。

これらの考え方はいずれも，数学の重要な考え方なのであるが，これらの思考態度の身についていないことが，多くの生徒の誤った原因であると思う。

(8) 34年度〔4〕は，AがBを基準とし，BがCを基準として与えられた場合にA：B：Cを求める問題であるが，これは基準量が一定していないこととAとBの関係を「AはBの9割」と与えて，A：Bの形で与えてなかった点に，生徒が困難を感じたものと思う。

連比の問題は，A：B，B：Cを与えて，A：B：Cを求めされるという形のものが多いようであるが，比の意味を理解せずに，ただ形式的に解法の形を記憶していたにすぎない程度の生徒であれば，この問題のような形で出題されたら，わからなくなるのが当然であろう。

3. 指導上の留意点

前節で説明した生徒が困難を感ずる点は，同時に指導上の留意点であるが，比の問題全体に通ずる指導上の留意点のうち，特に重要な点を重ねて述べてみたい。

(1) いくつかの数量を比較する場合には，差による比較と割合による比較の二つの方法がある。最初に，そのいずれの場合であるかをまず考えるという態度を養っておく必要がある。

(2) 比，歩合，割合は関係概念で，高度に抽象的な概念であるので，生徒は理解しにくい。

関係概念であるので，単独の数量としては意味がなく，基準の数量と考えあわせてはじめて具体的な意味がでてくるのである。したがって**比，割合とあったらただちに基準の数量は何か，と反応するような態度**を養っておく必要がある。

比の問題では全体を考えることがたいせつだということがよく言われるがこれは全体が基準になっている場合が多いからである。

(3) 比，割合，歩合等は，基準の量，割合，割合で表わされた量の三者の間になりたつ概念で，割合のみでは意味をなさないことは，さきに述べたとおりである。したがって，この三者は一体として，その関係をしっかりは握させておかなければならない。

観点の相違によって第一用法，第二用法，第三用法となるが，いずれも同一の関係の異なる表現にすぎない。この三者の関係を一体としては握しておき

- 基準量と割合で表わされる量を見たら割合を——第一用法
- 基準量と割合を見たら割合で表わされる量を——第二用法
- 割合と割合で表わされる量をみたら基準量を——第三用法

ただちに頭に浮べるように指導しなければならない。

(4) **基準となる数量が具体的に与えられていない場合に，これを文字で表わして代数的に考える方法は，比の問題を考える場合の有力な方法である。**たとえば30年度〔7〕の問題で，全体の人数をa人としてB方面行きの人数を$\frac{7a}{19}$人，$\frac{7a}{18}$人とみるとか，33年度〔9〕の問題でa時間の生産額をそれぞれ$10\times24\times a$，$14\times15\times a$，と考える方法である。これによって，比で表わされた量の操作を，絶対量の操作に還元できるからである。

この代数的な考え方に対応する算術的な考え方が，基準量を特定の具体的な数と仮定する方法である。

(5) 比，歩合，割合に関する問題も，問題としては売買，仕事等に関する事実や現象を素材とし，文章題の形で提出される場合が多い。したがって，

- 数量間の基本的な構造を数学的には握していること
- 図解等の方法で数量間の関係をとらえる態度，技能

を指導しておくことが重要となるのであるが，このことについては，方程式の分野の 3，指導上の留意点を参照されたい。

V 比　　例

1. 問題とそのねらいおよび正答率

<table>
<tr><th>年度</th><th>問題番号</th><th>問　　題</th><th>問題のねらいと正答率</th></tr>
<tr><td>30</td><td>〔8〕</td><td>長さ 12cm のかとり線香をとぼして，3分おきに長さをはかったら，つぎの表のようになった。このようなとぼり方をしていくものとして，下の表からつぎの問に答えなさい。
<table><tr><td>時間（x分）</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td></tr><tr><td>線香の長さ（$y$cm）</td><td>12</td><td>10.6</td><td>9.2</td><td>7.8</td></tr></table>イ．つぎのxとyとの関係式の____の上に適当な数を書きなさい。
$y=$ ________ $x+12$
ロ．この線香の長さが 5 cm になるのは，はじめから何分後か。
答________分後</td><td>・時間と線香の長さの関係を洞察し，
・その関係を式で表わせるか。
イ　10.4%
ロ　53.0%</td></tr>
<tr><td>31</td><td>〔9〕</td><td>正男君の家から学校までの道のりは 3 km で，これを自転車で行くのに15分かかる。自転車の速さは一定であるものとして，つぎの問に答えなさい。
イ．この速さで，x分間にym進むものとして，つぎのxとyの関係式の□の中に適当な数を入れなさい。
$y=\square x$</td><td>・速さ，時間，距離の関係を理解しているか。
・文字を用いて，関係式をつくられるか。
・比例定数の意味を理解しているか。</td></tr>
</table>

		ロ．三郎君の家は，正男君が学校へ行く途中にある。正男君の家からそこまで行くのに自転車で7分かかる。この道のりは何 km か。答を書きなさい。 答　　　　　km ハ．正男君が自転車で $a$km の道のりを行くのに b時間かかるものとして，つぎの a と b の関係式の□の中に適当な数を入れなさい。 $b=\square\ a$	イ　19.8% ロ　65.0% ハ　7.0%
32	〔4〕	容積50 ℓ の水槽がある。この水槽に，毎分 $x\ \ell$ の割合で水を注入したら y 分間で満たすことができた。この場合について，つぎの問に答えなさい。 イ．xとyの関係について，つぎのうちから正しいものを一つ選んで，その番号を○でかこみなさい。 1．yはxに正比例する。 2．yはxに反比例する。 3．yはxに正比例も反比例もしない。 ロ．xとyとの関係式を書きなさい。 答　$y=$	•単位時間にやる仕事，時間，仕事の量の関係を理解しているか。 •正比例，反比例の意味を理解しているか。 •反比例する数量の関係を式で表わせるか。 イ　43.4% ロ　39.0%

2. 生徒の困難点

(1)　相対応して変化する二つの数量の関係——関数関係を洞察し，これを式で表わすことができるかどうかをみることをおもなねらいとする三つの問題を，この分野にまとめてみたのであるが，正答率はいずれも良くない。30年度〔8〕では減少関数であるので，x の係数が負号であることをうっかりして書き落した，31年度〔9〕では単位変換について不注意の誤りがあった，等のこともあったと思うが，30年度〔8〕のイとロ，31年度〔9〕のイやハとロとの間の正答率に，大きな差があることなどから考えると，生徒が困難を感ずる根本的な点は

- 具体的な特定の数について考える場合は数量関係もとらえ得るが，それを文字で表わし一般的，抽象的に考えることができない。
- 特定の固定した数については考えられるが，それを変化する姿で変数として——いわゆる関数的に考えることができない。

という点にあったと思われる。

(2) 線香の長さ（$y$cm）ととぼる時間（x分）との関係についての30年度〔8〕の問題は，つぎのような三通りの方法が考えられる。

(a) 表を見て，時間および線香の長さを示す数列の法則を洞察する。時間3分おきに線香の長さが1.4cmずつ減少することを洞察できれば，1分あたりの減少が，$1.4\,\mathrm{cm} \div 3 = \frac{7}{15}$cmであることが考え出され，それから$y=\square x+12$の$x$の係数や，線香の長さが5cmになる，すなわち7cmとぼる時間も求められる。

このような，**自然や社会の現象，与えられた数列等の間の法則性をみぬく力は重要なのであるが**，この種の指導がなされているかどうか，反省の要があろう。

(b) xとyとの関係式の形は示されている。このことから，xとyの対応する一組の値，たとえば（3，10.6）がこの関係式を満足させなければならない。このことに気づけば，

$10.6=\square\times 3+12$としてxの係数である$\square$の値が求められるのである。関数関係を表わす式の意味についてじゅうぶんの理解があればこのような考え方もできると思う。

(c) この問題は，実験結果から実験式を求める問題である。

一般に，実験または実測の結果から関係式を求める方法としては，その結果をグラフに表わし，それによって式を発見するのが普通の手法である。

このような原則的な手法を指導されていなかった生徒も多いのではないかと思う。

なお，この問題はxの係数が負数になるのであるが，不注意から負号を書き落したものもあったようである。負号の取り扱いは慎重にする習慣をつけておかなければならない。

(3) 自転車で行くに要する時間と距離に関する31年度〔9〕は，ロの正答率が65.0％でやや良いほかは，イが19.8％，ハが7.0％でいずれも低い。

この問題は与えられた数量がkm，分，という単位で表わされているのに

要求される式ではm，時，という異なる単位で考えるので，単位変換に誤った生徒もあると思うが，根本的な点は

・速さ，時間，距離の関係についての理解不じゅうぶんであること。

・文字の取扱，関数的な考え方のできないこと。

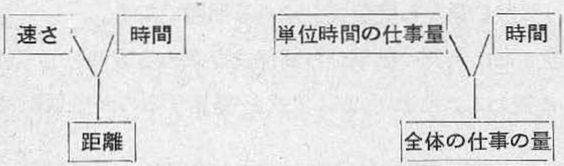
にあると思う。

32年度〔4〕についても同様のことが言える。

3. 指導上の留意点

(1) この分野の問題も，数量を文字で表わし，それを自由に駆使すること，文字を定数としてだけでなく変数として考えることもできること，が必要なのであるが，このことについては既に「文字による表現．式の値．式の計算」の分野でふれたので，ここでは省略する。

(2) この分野の問題も，数量関係をとらえてそれを式で表わす能力が必要である。このことについては「方程式」の分野の指導上の留意点を想起していただきたい。たとえば，31年度〔9〕，32年度〔4〕では，



の関係を理解させておくこと，生徒自身が図式化して数量関係をとらえ得るようにすることなどを指導しておかなければならない。

(3) 生徒には，定数間の関係はつかみ得ても，変数として考えて関係をとらえることは，困難であると思われる。

しかし，**数量的に考えられる対象は，**元来変数なのであつて，**それを特定の条件のもとでとらえた時にのみ，定数となる**のである。

小学校低学年や指導の初めの段階で，わかり易いという意味から定数的な取り扱いをするのは当然であるが，やがては，それらを変数とみ，より広

い視野から関数関係を考えるように指導することが必要である。

たとえば，長方形の面積を取り扱う場合は具体例から入って

縦の長さ×横の長さ＝面積，または　$S=ab$

と面積の求めかたをまとめる。この際，縦または横，あるいは縦横ともに，だんだんと，または一定の割合で変化したら，面積はどうなるか，面積を一定としたら縦横の長さはどんな状態で変化するか，ということも考えさせておきたい。

公式や基本的な数量間の関係を取り扱う場合に，このような指導をすることは公式や基本的な数量関係それ自身を理解させるためにも，関数的な考察，処理の態度，技能を養う上でも，重要なことである

(4) 数学を，自然や社会の現象を解釈し，生活上の生産的，消費的諸問題を解決する有力な武器として駆使できるようにするには，自然や社会，または生活上の問題を，数学的に処理する基本的な方法を身につけさせることが必要である。このような意味から30年度〔8〕のような

実験，実測によって得られた数表⟶グラフ⟶実験式

という処理の方法は，もっと重視しなければならない。「グラフに書いて式を求めなさいと言われればやれるが，指示されなければそのような処理の方法に気がつかないようでは，何のための知識技能であり，何のための数学の学習かと言いたい。

(5) 比例関係を表わす式では**比例定数が重要な意味を持っている**のであるが，生徒は式の形だけを記憶していて，比例定数の意味の理解が不徹底であるのではなかろうか。

この分野の三つの問題は，いずれも比例定数を見出す問題である。

比例定数を考える場合は，**変化しない数量，一定であると条件づけられている数量に注目する**ことが必要である。

たとえば

・30年度〔8〕では1分間にとぼる線香の長さ—線香のとぼる速さ

・31年度〔9〕では自転車の速さ

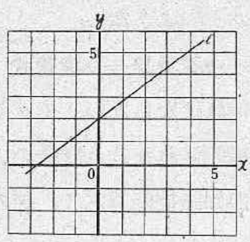
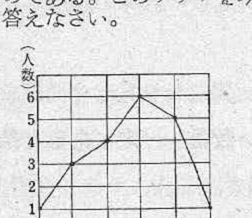
・32年度〔4〕では全体の水の体積――水槽の容積

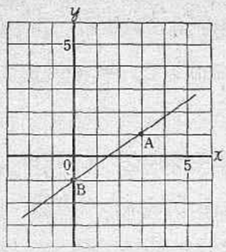
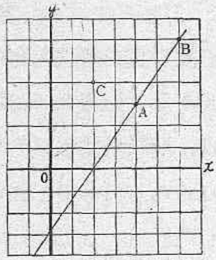
これがそのまゝ比例定数を表わすか，少なくとも比例定数と重大な関係がある。

なお，比例定数と，その関係をグラフで表わした場合の曲線の傾きとの関係も指導しておかなければならない。

Ⅵ グ　ラ　フ

1. 問題とそのねらいおよび正答率

年度	問題番号	問　題	問題のねらいと正答率
31	〔7〕	つぎのグラフで，x軸について直線lと対称な直線の方程式を求めなさい。  答 $y=$	・直線について対称の意味を理解しているか。 ・直線の式がかけるか。 19.4%
32	〔7〕	下の折れ線グラフは，田中君の班(はん)の生徒の数学テスト（5点満点）の成績を示したものである。このグラフをみて，つぎの問に答えなさい。  イ．4点以上の生徒は何人か。 答　人 ロ．班の平均点は何点か。 答　点	・折れ線グラフを読まれるか。 ・以上，平均の意味を知っているか。 イ　77.2% ロ　53.6%

33	〔6〕	下のグラフを見て，つぎの問に答えなさい。  イ．直線ABの式を書きなさい。 答 ロ．直線ABは，つぎのP，Q，R，Sの各点のうち，どの点を通るか。 通る点の記号を○でかこみなさい。 P（−6，−4）　Q（30，21） R（−15，−11）　S（120，90）	・直線の式がかけるか。 ・関数のグラフの意味を理解しているか。 イ　45.8% ロ　11.0%
34	〔6〕	下のグラフについて，つぎの問に答えなさい。  イ．つぎの{　}の中から，正しいものを一つ選んで，その番号を○でかこみなさい。 {1．yはxに正比例する。 2．yはxに反比例する。 3．yはxに正比例も反比例もしない。 4．xとyとの和は一定である。 5．xとyとの差は一定である。} ロ．つぎの□の中に，あてはまる式を書きなさい。 点Cを通り，直線ABに平行な直線の式は $\boxed{\qquad\qquad}$ である。	・正比例，反比例，平行，和，差の意味を理解しているか。 ・直線の式が書けるか。 イ　45.7% ロ　63.0%

2. 生徒の困難点

(1)　この分野におさめた問題は，32年度〔7〕のほかは，いずれも一次関数のグラフすなわち直線を示して，その式が書けるかどうかをみることを主たるねらいとし，あわせて，対称，比例等の意味の理解をみようとしたものであり，32年度〔7〕は，折れ線グラフの読み方，平均の求め方を知っているか

どうかをみようとした問題である。

⑵ 直線の式を求める31年度〔7〕，33年度〔6〕のイ，34年度〔6〕のロ，の正答率は，それぞれ19.4%，45.8%，63.0%で，年々向上している。

⑶ 31年度〔7〕は，与えられた直線 l の式を求め，その式の上で，x 軸に対称な直線の式を求めることもできるのであるが，この方法は中学校の程度を越える。先づ x 軸について l と対称な直線を実際に書いて，その直線からその式を求めるのが自然であろう。

この問題の正答率が低かったのは，直線の式がかけなかったもののほかに対称の意味を理解していなかったものが多かったことによると思われる。

⑷ 33年度〔6〕の問題で，イ，すなわち直線の式を書く問題の正答率が45.8%であるのに，ロの，座標で与えられた点がその直線上にあるかどうかを問う問題がわずかに11.0%にとどまったのは，関数の式やグラフについてのもっとも基本的な理解を欠いていることをばくろしたものと言えよう。

⑸ 34年度6番のイがロに比べて良くなかったのも，正比例，反比例，一次関数やそのグラフの意味の理解がじゅうぶんでないためと思われる。

⑹ 32年度〔7〕の折れ線グラフの問題はやさしい問題であり，棒グラフや折れ線グラフは小学校以来，相当練習しているものと思われる。しかし，0点の生徒数を読み落したり，度数分布図から平均を求めることになれていなかったものも，いくらかあったようである。

3. 指導上の留意点

⑴ 関数のグラフと式は同一の関係を表わすものであり，**グラフ上の点の座標はすべて式を満足し，逆にこの式を満足する x，y の値を座標とする点は必ずこのグラフ上にある。**したがって，与えられた点がグラフ上にあるかどうかはこの点の座標が式を満足するか否かで判定される。これは一次関数だけ

でなく，すべての関数のグラフの基本的な意味である。

このような基本的な意味についての理解がなければ，たとえ形式的に式からグラフが書け，グラフから式が書けたとしても，具体的な問題を解決するに役立つ技能とは言えない。

座標軸に平行な直線の式が書けなかったり，$x=a$，または $y=a$ のグラフを考えられない生徒もしばしば見受けるのであるが，これもグラフ本来の意味を理解せず，傾きと切片から式を作る方法を機械的に暗記しているにとどまることから起きるものと言えよう。

(2) 対称，比例，以下，以上等の用語の意味を理解しているというのは，単にその用語の定義が言えたり，他の言葉で置きかえたりできるということではない。**その言葉の意味する事実，現象それ自身についての基本的な性質を理解しており，その言葉が適切に使用できること**である。

たとえば，対称の意味がわかるということは

- 対称に点対称と線対称があることおよび両者のどこが同じく，どこがちがっているかを知っている。
- 対称の図形を見つけ出したり，対称の図形と対象でない図形を見わけることができる。
- 対称の中心や軸を指摘でき，対応の意味が具体的にわかっている。
- 対称の図形を書くことができる。
- 対応する点と対称の中心または軸との関係や，線対称の場合は折り返すと，点対称の場合は180°だけ回転すると重なる等の基本的な性質を知っており，実際に折ったり回転したりして重ねることができる。
- 対称という言葉をつかって事実や現象を説明できる。

ということである。このような理解があってはじめて，対称についての知識，技能が生きて働らく学力となるのであり，単に定義が言えるだけで満足していてはならない。

(3) グラフは関数関係を視覚化したものである。したがって，グラフ教材指導の基盤には関数観念があり，また，この指導がそれを深めることをねらわな

ければならないものであるが，このことはだれもが気づいていることと思うので，ここではふれないことにする。むしろ，関数観念の養成は数学の全分野を通じて心がけなければならないもので，単に比例やグラフの分野の指導にのみまかせるべきものでないことを注意しておきたい。

Ⅶ 時　　　間

1. 問題とそのねらいおよび正答率

年度	問題番号	問　　　題	問題のねらいと正答率
31	〔11〕	田中君の家の柱時計は1昼夜に5分遅れ，目ざまし時計は10分進む。田中君は両方の時計を土曜日の朝，同時に，正しい時刻に合わせておいたところ，つぎの週のある朝みたら，柱時計は6時を，目ざまし時計は6時45分を指していた。この時の正しい時刻をもとめ，答を書きなさい。 答＿＿＿＿＿＿	•時刻，時間についての理解がじゅうぶんあるか。 •この問題における数量関係をとらえられるか。 33.6%
33	〔2〕	つぎの□の中に，あてはまる数を書きなさい。 5時間25分÷3＝□時間□分□秒	•時間の単位関係，等分除の意味を理解しているか。 •不十進諸等数の等分除の計算ができるか。 40.5%

2. 生徒の困難点，および指導上の留意点

(1) 二つの問題を，計量の分野のうちの時間についての問題としてあげてみたのであるが，31年度〔11〕は，計量というより，むしろ，時計の問題を素材として数量関係のは握ができるかどうかをねらった問題とも考えられよう。

正答率は33.6%で，他の問題にくらべてはなはだしく悪いとは言えないが良い成績とも言えない。

この問題は，柱時計は1日に5分遅れ，目ざまし時計は1日に10分進むということから

•二つの時計の示す時刻は1日に15分ずつ差ができること。

•柱時計の示す時刻から正しい時刻までの時間と，正しい時刻から目ざまし時計の示す時刻までの時間の比が，5分：10分，すなわち1：2であ

ること。

に気づかなければならない。このいずれかに気づけば，45分の数学的な意味と考えあわせて，解決の方法を発見することができたと思われる。これらの関係は速さ，時間，距離の関係または単位時間にする仕事の量，時間，全体の仕事の量の関係等と数理においては同一である。

素材に迷わされず，数理の構造を見抜けるよう指導することは，問題解決指導の中心であり，そのための方法の一つとして図式化して考えることが有効であることは，すでに述べた通りである。

この問題は，求めるものが正しい時刻であって一つの数量ではなく，その上，これを求めるために必要な，幾日間経過した朝かという日数が問題の表面にあらわれていないところにも，生徒が困難を感じた原因がある。かくれた要素，いわゆる媒介要素の発見は問題解決の鍵となることが多いのであるが，それを発見する方法は，一言にして言えば洞察であり，その洞察を可能にするものは

- **条件分析——与えられた条件が何であり，それからどういうことがわかるか。**
- **目標分析——求めるものは何か，そのために何がわかればよいか。**

と考えることである。

生徒は，とかく結果をあせり，直観的に答を得ようとしたり，かけるか，割るか，たすのか，引くのか，と算法を知ろうとする。しかし，すこし複雑な問題になると，このような単純な態度では解決の見通しは立てられない。どのような手順で考えたり操作したりしたら解決の方法が得られるかという正しい手順を指導することが必要である。問題が複雑であればある程

- 問題をくり返し読み，問題を自分の言葉で言い換えてみる。
- 与えられた条件，求めるもの，手がかりになりそうな重要な言葉等を抜き出したり，underlineを引いてみる。
- 図をかいてみる。
- 与えられた条件から何がわかるかを考える。
- 求めるものを知るためには，何がわかればよいかを考える。

という手順を踏んで考えることが有効になる。基礎的な知識，理解がありさ

えすれば，このような手順を踏むことによって，多くの場合は，解決の方針が発見できるものである。

(2) 33年度〔2〕は簡単な不十進諸等数の等分除の計算であり，除数も簡単な3である。この正答率がわずかに40.5％にすぎないのは意外の感じさえする。

不十進諸等数の計算は十進数の計算にくらべ，多少誤算の多いのは当然であるが，計算の原理は同一である。生徒が，十進数は容易であり，不十進数には抵抗を感ずるのは，十進数の場合は長い間の練習の結果，まったく形式的に操作して結果を出し得るようになっているのに対し，不十進数の場合には記数法，命数法，演算の意味，単位関係等を意識しながら操作しなければならない点にある。

少なくとも，高校入学を希望している生徒で，時間の単位関係を知らなかったり，3で割ることの意味を知らないものがあったとは思われない。
そこで，不十進諸等数の計算を指導する場合には，機械的，形式的になっている十進数の計算の原理をあらためて考えさせ，それと対比しながら，不十進数も計算の原理は同一であること，ただ計算の過程ごとにその原理を意識して適用しなければならないことを自覚させ，同時に，不十進諸等数——時間と角度——についての計算を，もう少し多く練習させる必要があると思われる。