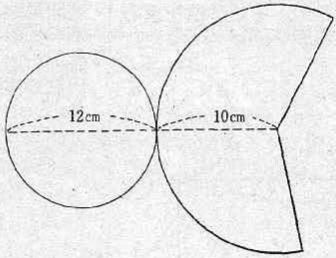
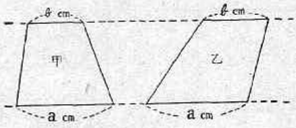
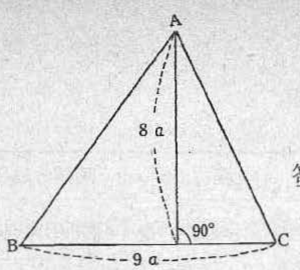
Ⅷ 図形の計量

1. 問題とそのねらいおよび正答率

<table>
<tr><th>年度</th><th>問題番号</th><th>問　　題</th><th>問題のねらいと正答率</th></tr>
<tr><td>30</td><td>〔5〕</td><td>つぎの展開図をみて，この円すいの高さをもとめなさい。


イ．式　　　　ロ．答＿＿＿＿cm</td><td>・展開図をみて円すいを想像することができるか。
・底面の半径と斜高を知って，円すいの高さを求められるか。
イ　44.6％
イロとも正解　37.5％</td></tr>
<tr><td>30</td><td>〔6〕</td><td>下図の二つの台形について，イ．のうちの正しいものの番号を○でかこみ，つぎにロ．にその理由を書きなさい。


イ．甲の面積は
1．乙の面積よりも大きい。
2．乙の面積に等しい。
3．乙の面積よりも小さい。
ロ．理由</td><td>・台形の面積について理解しているか。
47.1％</td></tr>
<tr><td>31</td><td>〔5〕</td><td>半径が$a$cmの円がある。この円の半径を5cm長くすると，周の長さはもとの円よりどれだけ長くなるか。円周率を3.14として答を書きなさい。
答＿＿＿＿cm</td><td>・文字を含む式の扱いになれているか。
・円の半径の長さと円周の長さとの関係についての理解がじゅうぶんか。
25.5％</td></tr>
<tr><td>31</td><td>〔8〕</td><td>つぎの三角形の面積を計算して，この三角形と等しい面積をもつ正方形の一辺の長さを求めなさい。</td><td>・文字で表わされた数量の扱いになれているか。</td></tr>
</table>

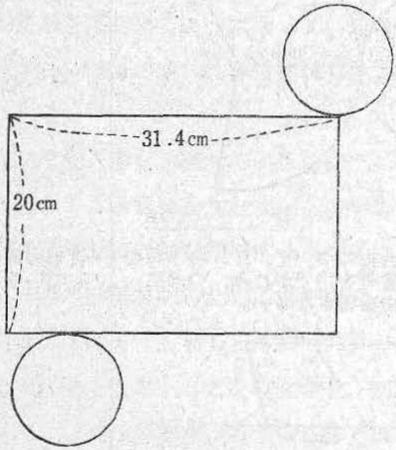


答＿＿＿＿＿

・三角形の面積の求め方，正方形の面積と辺の長さの関係を理解しているか。

63.0％

32　〔6〕　下の円柱の展開図をみて，その体積を求めなさい。ただし，円周率は3.14とする。



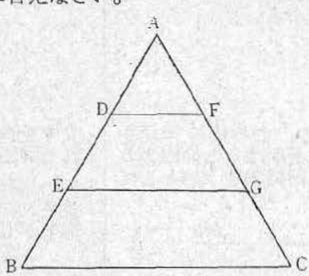
答＿＿＿＿＿cm^3

・展開図をみて円柱を具体的に想像できるか。

・底面の周と高さを知って円柱の体積を求められるか。

36.1％

32　〔8〕　下図の△ABCは正三角形で，点D，EおよびF，Gは，それぞれ辺AB，ACの三等分点である。この図について，つぎの問に答えなさい。



イ．△ABCの一辺の長さを$a$cmとして，台形DEGFの周の長さを求めなさい。

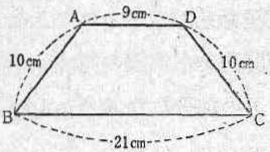
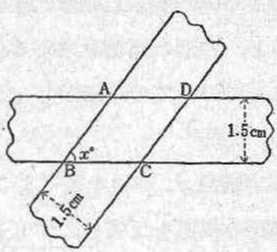
答＿＿＿＿＿cm

・三角形の相似についての理解がじゅうぶんか。

・三角形や台形の辺の長さや面積についての理解がじゅうぶんあるか。

イ　38.0％

ロ　35.0％

		ロ．台形DEGFと△ABCの面積の比を求めなさい。 答（台形の面積）：（三角形の面積） ＝ ：	
33	〔4〕	下図の台形ABCDの面積はいくらか。答を書きなさい。  答 cm²	・台形の面積の求め方を知っているか。 ・三平方の定理（3，4，5の定理）を応用できるか。 59.1%
34	〔5〕	はば1.5cmのテープを図のように重ねると，四辺形ABCDは，ひし形になる。これについて，つぎの問に答えなさい。  イ．$x°=30°$ のとき，四辺形ABCDの面積はいくらか。 答 cm² ロ．四辺形ABCDの面積が最小となるのは$x°$がいくらのときか。 答 度	・30°の直角三角形の辺の長さの比をこの図形に適用して，ひし形の高さを求められるか。 ・ひし形の面積の求め方を知っているか。 ・この問題における四辺形ABCDの面積を，角xの関数として考えることができるか。 イ 13.5% ロ 32.5%

2. 生徒の困難点

(1) この分野の問題は各年度とも1～2題ずつ出題され，もっとも問題数の多い分野である。

正答率は13.5%～63.0%にわたっているが，単純に三角形や台形の面積を求めたり，円柱や角錐の体積を求める問題の正答率はやや良い。このことは31年度〔8〕が63.0%，33年度〔4〕が59.1%であることなどから言える。

⑵　30年度〔５〕と32年度〔６〕は，展開図で示された円すいの高さや円柱の体積を求める問題であるが，正答率はそれぞれ37.5%，36.1%で，平均正答率よりやや低い。

30年度〔５〕では底面の直径と斜高から高さを，32年度〔６〕では底面の周の長さから底面の半径を，体積を求める準備としてあらかじめ求めておかなければならないことや，半径と直径を見あやまったことなども生徒が誤った原因と思うが，いずれにしても展開図から実際の円すいや円柱を具体的に想像し，展開図のどの部分が立体のどの部分になるのかをはっきり理解できなかったことが根本の原因であろう。

⑶　30年度〔６〕は，台形の面積を決定する要素が何であるか，台形の高さの意味，平行線間の距離等を理解していれば容易な問題であるが，正答率が47.1%にとどまったところからみると，台形の面積を求める公式は機械的に暗記していても，これら基礎的なことについての理解がじゅうぶんでなかったものと思われる。

なお，この問題では，このように判断した理由を書くよう要求されている。生徒のなかには思考の過程や判断の根拠を反省し，すじ道を立てて，簡潔に言葉や文章で表現することに苦しむものが多い。

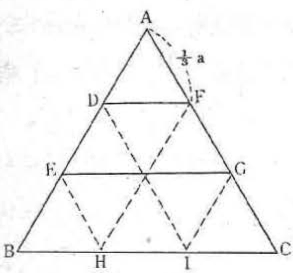
⑷　31年度〔５〕の問題は正答率が25.5%ではなはだしく悪い。

二つの円の周の長さの差は円の大きさに関係なく，半径または直径の差だけによって決定されるのであるが，中学校の生徒に，このことを知っているとか，洞察できると期待するのは無理であろう。したがって，生徒は，半径が$a$cm，および（$a+5$）cmの円の周を計算し，しかる後に周の長さの差を求めようとしたものと思われる。このように考えることはきわめて自然な考え方であり，問題の数理にかくべつの困難はないと思う。

生徒がつまずいた原因は，おそらく半径と直径との考えちがい，および，半径や直径が文字で表わされていた点であろう。

(5) 31年度〔8〕は正答率が63.0%でもっとも良い。底辺，高さが文字を含む式で与えられた三角形の面積と等積な正方形の一辺の長さを求める問題であり，それ程むつかしい問題ではないが，やはり文字を取り扱かわねばならない問題である。この正答率が比較的がよかったのは底辺と高さがはっきり図に書き表わされていたからだと思う。同様のことは正答率が59.1%の33年度〔4〕についても言える。これらのことは，図を書き，与えられた条件，わかっている大きさを書き表わしてみることが，思考を容易にするものであることを示唆していると思う。

(6) 32年度〔8〕は，正三角形の三辺の長さ，相似形の辺の長さや面積等についての知識を総合的に適用して解決しなければならない問題である。個々の知識はあっても，それらを具体的な問題に，総合的に活用することは，生徒にとって困難なことと思われる。



もっとも，この問題は結論だけを問うているので，きわめて実際的に，与えられた三角形を左図のように分割して考えることによっても正解を得られる。そして，このような考え方も，図形の研究には重要な考え方の一つである。

(7) 34年度〔5〕の問題は，ひし形の面積を求めるイの正答率が13.5%，面積が最小になる場合のテープを重ね合わせる角度を求めるロの方が32.5%であった。

この問題は，テープの端が図に表われているなど具体的に書かれているので，問題場面の理解は容易であったと思うが，その反面，問題の表現や示された図が数学的に整理されていないので，幻惑された生徒もあったと思う。

生徒は，ひし形の面積を求める方針を立てるのにまよったであろうし，高さは容易にわかったが底辺をどうして求めたらよいかに苦しんだことと思う。いわゆる視点の変更が必要だからである。

ロの問題では，ひし形の面積を，テープを重ね合わせる角度xの関数とし

て考えるところに，関数的に考えることになれていない生徒は苦しんだであろうと思う。

この問題は，イ，ロとも，基礎となる知識はきわめて基本的なものだけであるが，相当高度の思考を要する問題であり，それだけに生徒の思考力の有無をはっきり見わけ得る問題である。

3. 指導上の留意点

(1) 単純な求積の問題ならば，公式を暗記していて公式どおり計算するだけで一応正しい結果が得られる。公式の長所は，解決の過程における思考を節約して機械的な操作だけで結果を得られるところにあるので，公式を記憶していて機械的に適用することは，それ自身，何らとがむべきことでなく，むしろ必要な技能である。

しかし，その**公式の記憶は，基礎的な概念や公式の意味，公式のできるまでの過程すなわち公式の成立する根拠等についての理解に裏付けられていなければ，具体的な問題にその公式を正しく適用することができないし，数学的な思考を伸ばすことにも役立たない。**

導入の段階や公式指導の段階ではもちろんのこと，練習や復習の際にも，たえず基礎的な理解について確かめ，これを深めるようつとめなければならない。

(2) 図形の指導では，いわゆる空間観念を養うことにつとめなければならない。そのために，

- 実際の立体を手にとったり，位置を変えて観察したりする。
- 実際の立体からその見取図，展開図，投影図を作る。
- 見取図，展開図，投影図から立体を具体的に想像したり，実際に立体を作ったりする。
- かくれて見えない裏側や内部を想像したり，切断して確かめたりする。

等の指導が必要である。

このような具体的な経験を通じて養なわれた空間観念がなければ，図形の問題，特に立体図形の問題の解決は不可能である。

(3) 問題解決にあたって，見とおしをたて，順序よく，ねばり強く考えることの必要はしばしば説明したとおりであるが，それと同時に，一つの方針にもとづいて考え進んだ結果，行きづまった場合，新たな観点から問題をみなおし，方針を立てなおすこともまた重要である。

生徒はとかく最初の方針にこだわって，行きづまってもなお新たな観点から考えなおすということができないものであるが，この方針で不可能と考えた時には，

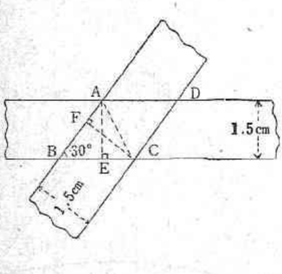
- 出発点にもどって，与えられた条件は何であったかから考えなおす。
- 売手から買手に，追う者から追われるものに，もうけた者から損をした者に，勝った者から負けた者に，立場を変えてみる。
- 問題の表現を変え，操作の順序を変更してみる。
- 問題に要求されていない条件を自分で勝手につくり出し，あるいは誤った第一感，直観にとらわれて自縄自縛に陥っていないか反省してみる。

などのことが有効であろう。

このような態度も指導しておきたいものである。

例を34年度〔5〕のテープの問題にとって具体的に説明してみよう。

イの考え方はいろいろあるが，ひし形も平行四辺形であるので，その面積は，底辺×高さ，で求められることに気づき，底辺としてＢＣを，高さとしてつぎの図のＡＥを考えるのが自然であろう。高さＡＥは1.5cmで問題ないとして，底辺ＢＣの長さを求めるのに苦しんだことと思われる。ある者は△ＡＢＥを考えたが，ＢＥとＢＣの関係がわからず，ある者は△ＡＢＣを考えたが三辺の長さが不明でその後の処置にこまったことであろう。この場合，最初にもどって，与えられた条件が何であったかを考えると，



(a) ＡＢＣＤ　はひし形である。

(b) もう１本のテープのはばも1.5cmである。

(c) $\angle ABC = 30°$

などに気づく。せっかく与えられた条件で生かされていないものがある。そこで，(a)からＡＢ＝ＢＣであるからＢＣの代りにＡＢの長さがわかればよ

いこと。(b)から図のＣＦを引いてＣＦ＝1.5cmを生かされないかと考え，△ＣＢＦに注目すること。などが可能となり，行きづまりが打開される。

(4) 34年度〔５〕のロ，は図形を動的に，関数的に考察することを要する問題であるが，**数量の場合と同様，図形の場合にも，関数的，動的に考察することは，重要な研究態度である。**

このような考察のしかたに馴れている生徒ならば，その理論的な根拠を示し得なくても，感覚的に正しい結論，すなわち$x°=90°$の場合にひし形の面積が最小になると気づいたであろう。

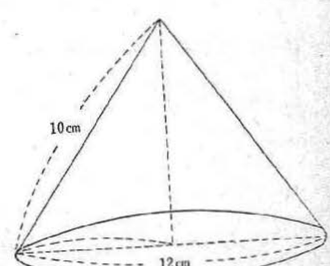
なお，数量の場合と同様に，図形を動的，関数的に考察する場合には，何が変化し，何が変化しないか，特に変化しない一定の要素または数量に注目することが必要である。この問題に例をとれば，ひし形ＡＢＣＤの面積を決定する要素である底辺（ＢＣと考えよう），高さ（ＡＥ）のうち，高さＡＥはテープのはばであって一定である。したがってひし形ＡＢＣＤの面積の変化はＢＣの長さの増減と一致する。このように考えれば$x°=90°$という結論も発見でき，その理論的な根拠も示されるのである。

要するに

- **図形を動的関数的に考察し，**
- **その際，変化しないものに注目すること，**

を指導しておかなければならない。

(5) 図形について考える場合は，与えられた条件にしたがって正確な図を書いて，わかっている辺や角の大小相等の関係を記号で書き込んだり，展開図や投影図から知り得た数値を見取図に書き入れて考えたりすることは，思考を容易にする重要な手段である。



たとえば，30年度〔5〕では，前頁のような見取図を書いて考えたらよほど考えやすくなったであろうし，直径の12cmを，半径が12cmと見あやまるような誤りも防ぎ得たと思う。

このことは，証明問題の場合には特に重要となる。

Ⅸ 三　角　比

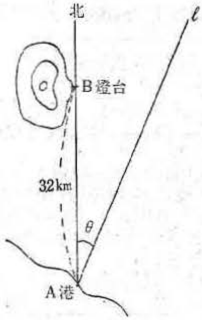
1. 問題とそのねらいおよび正答率

<table>
<tr><th>年度</th><th>問題番号</th><th>問　題</th><th>問題のねらいと正答率</th></tr>
<tr><td>30</td><td>〔9〕</td><td>

下の図で直線ℓは，A港を出港した船の航路を示したものである。この船が，B燈台を真西に見る位置まで進んだときの，船の位置について，つぎの問に答えなさい。

イ．船とB燈台の距離は何kmか。表をみて計算しなさい。（四捨五入法によって小数第一位までもとめよ。）

答　　　　km



ロ．つぎの式のうち，船とA港の距離をあらわすものの番号を○でかこみなさい。

1．$\frac{\sin\theta}{3.2}$km，　4．$\frac{3.2}{\sin\theta}$km

2．$\frac{\cos\theta}{3.2}$km，　5．$\frac{3.2}{\cos\theta}$km

3．$\frac{\tan\theta}{3.2}$km，　6．$\frac{3.2}{\tan\theta}$km

<table>
<tr><th>三角比／角度</th><th>正弦 sin</th><th>余弦 cos</th><th>正接 tan</th></tr>
<tr><td>42°</td><td>0.665</td><td>0.773</td><td>0.900</td></tr>
</table>

</td><td>

・方位の表わし方を理解しているか。

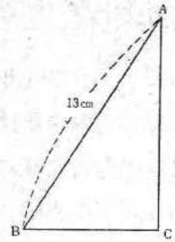
・三角比の意義，用法を理解しているか。

イ　40.4%

ロ　44.2%

</td></tr>
</table>

31 〔10〕 つぎの直角三角形では，$\sin B = \frac{12}{13}$ である。BCの長さをもとめ，答を書きなさい。



答＿＿＿＿＿cm

・正弦(sin) の意義，用法を理解しているか。
・三平方の定理を適用して直角三角形の辺の長さを計算できるか。

51.8%

32 〔9〕 水平面に対し 20° の傾(かたむ)きをなす坂道をのぼり，高さがはじめの位置よりも40m高い地点に達するには，何メートルの道のりを歩けばよいか。つぎの表をつかって計算し，四捨(しゃ)五入法により，メートルの位まで求めなさい。

答＿＿＿＿＿m

sin20°	cos20°	tan20°
0.3420	0.9397	0.3640

・三角比の意義，用法を理解しているか。
・四捨五入ができるか。

37.7%

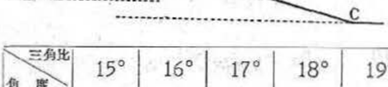
34 〔9〕 下図において，峠(とうげ)の頂(いただき) Bは地点Cより305m高く，B，C間の水平距離(きょり)は 1050 m である。また，地点AからBまでの道は，600mの一様な上り坂で，水平面と22°の角をなす。このとき，下の表をつかって，つぎの問に答えなさい。

イ．地点A，Cの標高差はいくらか。

答＿＿＿＿＿m

ロ．BCは水平面と何度の角をなすか。（左の表にある角のうちのもっとも近い角で答えること）

答＿＿＿＿＿度



三角比／角度	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°
sin	0.259	0.276	0.292	0.309	0.326	0.342	0.358	0.375
cos	0.966	0.961	0.956	0.951	0.946	0.940	0.934	0.927
tan	0.268	0.287	0.306	0.325	0.344	0.364	0.384	0.404

・水平距離，標高差の意味を知っているか。
・三角比の意味を理解し，活用することができるか。

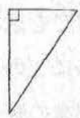
イ　49.5%
ロ　30.5%

2. 生徒の困難点

(1) この分野におさめた問題はいずれも三角比の意味を理解し，直角三角形の辺の長さや角の大きさを求めるのにそれを活用できるかどうかをみようとした問題である。正答率はどの問題も30%～50%で，大きな変動はないが，いずれも満足すべき状態とは言えない。

(2) 三角比の問題に生徒が抵抗を感ずる理由の一つは，用語や記号が複雑で見なれないものである点であり，もう一つは，三角比が文字の示すとおり比であり関係概念であるのに，生徒が比の意味をじゅうぶん理解していない点にある。

(3) 三角比の問題では，三角比の数表や端数の処理が必要になる場合が多い。数表の見方や端数の処理のしかたに習熟していない場合には，困難が一層大きくなる。

(4) 図形が特定の位置にある場合についてだけ指導されていると，位置が変っているだけで適切な判断ができなくなる。30年度〔9〕は，直角三角形を常に，のような位置でのみ考えていたために，逆にの位置で考えることにとまどった者もあったと思われる。なおこの問題では，「B点を真西に望む」という意味を図に表わせなかったものも，いくらかあったと思う。

(5) 31年度〔10〕は，与えられた斜辺の長さ13cmと$\sin B=\frac{12}{13}$から，先づAC$=13\sin B=12$を求め，つぎに三平方の定理でBCを求めるのであるが，正弦の意味をはっきり理解していないため，$BC=13\sin B$と速断したものもあったのではないかと思われる。

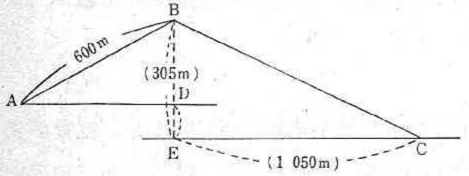
この問題の正答率は51.8%で，この分野のなかでは特別によかったのであ

るが，問題がやさしいこともさることながら，整理された図が示されておったことが，思考を容易にしたものと思う。

(6) 32年度〔9〕は，高さ40mと傾き20°を与えて斜辺を求める問題である。生徒は正弦を　$\text{正弦}=\dfrac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}$　または　斜辺×正弦=高さ，と記憶しているものが多いと思う。したがってこの問題では，求める斜辺をxとすれば $\sin 20°=\dfrac{40}{x}$，または　$x\sin 20°=40$　となり，いわゆる逆思考の問題となる。ここに生徒が多少困難を感ずる点がある。

しかし，逆思考の問題も，代数的思考になれている生徒には抵抗とはならないはずである。この辺に，指導上の反省すべき点があると思う。

(7) 34年度〔9〕の問題に与えられている図は未完成の図である。与えられた条件を全部書き込んで完成して（左図の点線およびかっこ内の数字）考えればイの問題はDEを求めるのであるから，BDがわかればよいこと，ロは△BECから∠Cを求める単純な問題であることに気づくことは容易であろう。



要するにこの問題の成否は，

- 問題の数量関係を図に書いて考える態度ができているか。
- 三角比の意味の理解があるか。

にかかっている。

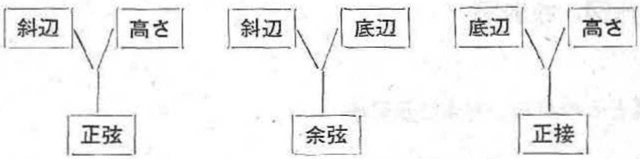
3. 指導上の留意点

(1) 中学校における三角比の問題は，理論的には単純なものが多いのであるが生徒は理解に苦しむようである。これはさきにも述べたとおり，用語や記号が複雑なことにもよるが，根本的には，三角比が比，割合についての理解を前提としているのにかかわらず，生徒の比や割合についての理解がじゅうぶんでないことによるものと思う。したがって，比や割合についての理解を徹

底させておくことは，三角比の指導の素地を養うという意味でも重要なことである。

(2) 三角比は比の意味や用法と関係づけて理解させなければならない。
すなわち，

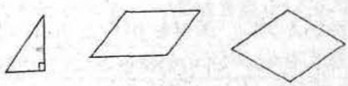
などと同様に，



の関係は，

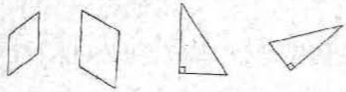
の関係にあることを理解させ，
比の三用法と結びつけて指導することが有効であろう。

(3) 図形の研究では，その図形の本質的な性質，一般的な法則を究明するのが目的である。図形を書いて考える場合も，書かれた図形の特定の位置や特定の形，大きさを超えた一般を見なければならない。(注18)

しかしこのことは，生徒にとってはなかなか困難である。たとえば，直角三角形，平行四辺形，菱形が  のような位置

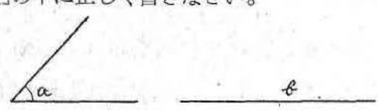
・注18　スミルノフ主監　心理学Ｉ　柴田，島，牧山訳　明治図書

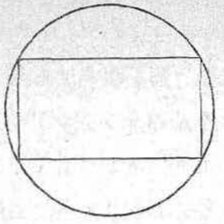
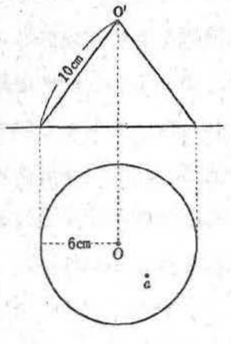
にある場合のみについて指導されているとこれらの図形の概念がじゅうぶんに一般化されず，これらとちがった位置，

たとえば，  等について考える場合にとまどう結果となる。どのような位置に置かれても，また複雑な図形の一部としてこれらの図形が示されていても，それらを見わけて，その本質的な性質や法則を見ぬけるよう指導する必要がある。

X 作図，投影図

1. 問題とそのねらいおよび正答率

年度	問題番号	問題	問題のねらいと正答率
30	〔10〕	下の図の$\angle a$を一つの頂角とし，辺の長さがbのひし形を，定木とコンパスを用いて□の中に正しく書きなさい。  ひし形の書き方がわかるように，定木やコンパスをつかった線は消さないでおくこと。	・与えられた大きさの角や線分を移すことができるか。 ・ひし形の意味や性質を理解しているか。 16.8%
31	〔12〕	下の図は，長方形の四つの頂点が一つの円周の上にある図形である。これと合同な図形を，定木とコンパスを用いて，下の余白に正しく書きなさい。（図の書き方がわかるように，図形をかくためにつかった定木やコンパスの線は消さないでおくこと）	・円や長方形の性質を理解しているか。 ・それらを作図に活用できるか。 24.3%

			
34	〔8〕	下の投影図について，つぎの問に答えなさい。  イ．この投影図で表わされる立体の体積はいくらか。ただし，円周率は π で書き表わすものとする。 答　　　cm³ ロ．平面図で示された側面上の点 a の立面図 a' を書きいれなさい。（作図した手順がわかるように，かいた線は消さないこと）	・投影図を見て実際の立体が想像できるか。 ・立面図と平面図の関係を理解しているか。 ・底面の半径と斜高を知って直円錐の体積を求められるか。 イ　45.2% ロ　8.6%

2. 生徒の困難点

(1) 30年度〔10〕と31年度〔12〕は，ひし形や長方形および円の基礎的な知識を活用して，簡単な作図ができるかどうかをみる問題である。この問題を解くに必要な知識はきわめて基礎的なものだけであるのにかかわらず，正答率はそれぞれ16.8%，24.3%にすぎない。もっともこの二つの問題は，いずれもその年度の数学の最後の問題であったので，正答率の低かったのが，生徒にとってむつかしかったからなのか，時間が足らなくて手をつけられなかったのか，資料から判定することはできない。もし時間不足で手がつけられなかったのだとすれば，問題点は別なものになる。

(2) 30年度〔10〕は，一つの角 a および一辺の長さ b を与えてひし形を作図する問題であるが，生徒は与えられた角を移したり，与えられた長さの線分を

切り取ったりすることに馴れていないのではないかと推察される。

作図の学習は，任意の三角形を作るとか，与えられた角を二等分する作図をやっている程度で，図形の大きさ，位置，形を決定する条件を与えて作図することの学習がふじゅうぶんなのではなかろうか。

(3) 31年度〔12〕は，円とそれに内接する長方形を与えて，これと合同な図形を作図させる問題である。

この問題は，円を書く場合の要点である中心を与えてなく，生徒自身が発見しなければならないところに，生徒が困難を感じた点があったと思う。長方形の対角線が等しくて互に他を二等分していること，すなわち対角線の交点が四つの頂等から等距離にあることを知っていても，その知識がこの作図題の解決に活用されない。これは，この図形を作図するポイントが中心を発見すること，そのために長方形や円のどんな性質が活用されるかに着眼し，見通しを立てることができなかったことによると思われる。

(4) 34年度〔8〕は投影図の問題である。さきに展開図の問題の際にも述べたとおり，展開図や投影図では，見取図を書いてわかっている数量を記入し，具体的，感覚的な見取図の助けをかりることが思考を容易にする有効な方法である。

イの問題では，具体的な立体を想像した上で，

・直円錐の体積$=\dfrac{\text{底面積}\times\text{高さ}}{3}=\dfrac{\text{半径}^2\times\pi\times\text{高さ}}{3}$ であること。

・高さは斜高とは異なる。高さは斜高と底面の半径から三平方の定理を応用して計算しなければならないこと。

を知っていなければならないのであるが，高さと斜高を間違えたり，3で割ることを忘れたもの，あるいは円周率をπで表わすことに抵抗を感じたものもあったことと思う。

ロの問題は，側面上の点の平面図aを与えて立面図a'を求める問題であるが，学習しておった生徒にとっては容易であり，学習していなかった生徒にとっては手をつけかねた問題であったと思う。けだし，投影図には投影図特

有の考え方や技法があるからである。

3. 指導上の留意点

(1) 図形の指導では作図や論証を重視しなければならないという声が高まっているが，実際の指導ではまだ面積や体積の計算にのみ力が注がれ，作図や論証が軽く扱われているようである。

定木やコンパスを正しく使用するような基礎的な技能の未熟な生徒も多い。

30年度〔10〕や31年度〔12〕の問題で必要な知識は，さきにも述べた通りきわめて基礎的な知識だけであり，ひし形の四辺の長さが等しいこと，長方形の対角線の長さが等しくて互に他を二等分していること等は，知識としてはほとんどの生徒が持っていると思う。しかし，それらの知識が個々ばらばらな知識にとどまっていて，総合的に，具体的な問題の解決に生きて働かない。

これら基礎的な知識を総合的に活用する場としても，作図はもっと重視しなければならない。

(2) 近年科学技術教育の重要なことが叫ばれ，数学科に対する期待も大きいのであるが，この面からの作図，投影図の知識，技能の重要性も考えねばならない。

なおまた，作図によって図形の新しい性質を発見したり，図形の性質が具体的に確かめられ，理解を深めるに役立つことも大きいのである。

(3) 30年度〔10〕は$\angle a$を移すことができさえすればきわめて容易な問題であるが，これが16.8%の正答率にとどまったことから考えると，大多数の生徒は角を移すことができなかったものと思われる。コンパスと定木で，与えられた大きさの線分や角を作ること，線分や角を二等分すること，平行線を与えられた位置に引くこと等，基礎的な作図の指導に手ぬかりがないかどうかを反省する必要があろう。

なお，これらはいわゆる技能である。**技能は実際に作業をし，練習を重ね**

なければ身につかないものである。

⑷　投影図の問題，特にロの正答率が低かったのは，投影図を指導しなかったり軽く取り扱り扱った学校があったためではないかと推測されることはさきに述べたとおりであるが，投影図には特有の図法上の規約や技法があるので基本的な規約や技法は必ず指導しておかなければならない。

なお，

- 一般に点の位置は一つの条件だけでは決定されず，少なくとも二つの条件が必要であること――二次元の空間すなわち面を考える場合は一般に二つ，三次元の空間を考える場合には一般に三つ。
- 点や線分を考える場合には，それだけを孤立させて考えたのでは何もわかってこない。**他の点や線と関係づけて**考えなければ，その位置や性質はわからないこと。

という，図形研究の原則的，一般的な考え方を悟らせるよう指導しなければならない。

34年度〔8〕のロを例にとれば，点A（平面図 a で表わされる点）は当然頂点0と関係づけて考えるべきであり，それによってAは0Aという母線上の点であるという条件に気づき，解決の糸口が発見されるであろう。

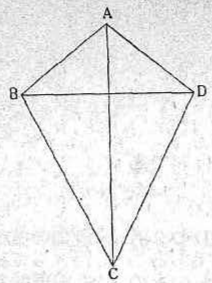
この考え方は作図や証明問題を解く場合でも重要なものである。

XI　図形の論証

1.　問題とそのねらいおよび正答率

年度	問題番号	問　　　　題	問題のねらいと正答率
32	〔10〕	下の図は，辺ABとADおよびBCとDCがそれぞれ等しい四辺形である。この四辺形の二つの対角線が直角に交わる理由を説明したい。 つぎの説明が正しいものとなるように，{　}の中から正しいものを一つ選んで，その番号を○でかこみ，また□の中にあてはまる記号あるいはことばを書きなさい。	・与えられた条件から論理をたどって結論を導くよう順序よく考えることができるか。 ・三角形の合同，対称について理解しており，その知識を活用できるか。 イ 32.4%

ロハ 31.1

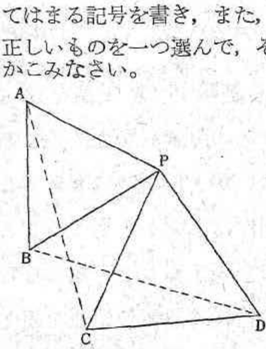


（説明）△ＡＢＣと△ＡＤＣとは

(イ)
1. 二つの辺の長さとそのはさむ角の大きさがそれぞれ等しい
2. 一つの角の大きさと二つの辺の長さがそれぞれ等しい
3. 三つの角の大きさがそれぞれ等しい
4. 三つの辺の長さがそれぞれ等しい
5. 一つの辺の長さと両端（たん）の角の大きさがそれぞれ等しい

から合同である。したがって，
∠ＢＡＣ＝∠ＤＡＣ，∠ＢＣＡ＝∠ＤＣＡとなるから，ＡＣを折り目として折り返せば，△ＡＢＣは△ＡＤＣと全く重なる。
このことから，点ＢとＤは，直線(ロ) □ について(ハ) □ であることがわかる。
したがって，対角線ＢＤとＡＣは直角に交わる。

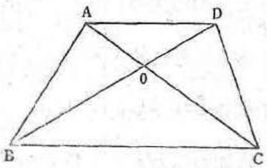
33 〔10〕 下図のように，一つの頂点Ｐが共通な，二つの正三角形ＰＡＢ，ＰＣＤをつくると，ＡＣとＢＤの長さはいつも等しくなる。この等しくなる理由を説明したい。つぎの説明が正しいものとなるように，□の中にあてはまる記号を書き，また，{ }の中から正しいものを一つ選んで，その番号を○でかこみなさい。



（説明）
ＡＣを一辺とする△ＰＡＣと，ＢＤを一辺とする△ＰＢＤをくらべてみる。
△ＰＡＢと△ＰＣＤはどちらも正三角形であるから
ＰＡ＝ □ および
ＰＣ＝ □ である。また，
∠ＡＰＢ＝∠ □ で，このことから
∠ □ ＝∠ □ であることがわかる。

- 既知の条件から論理をたどって結論を導くよう，順序よく考えることができるか。
- 三角形の合同について理解しているか。
- 正三角形の性質を理解しているか。

21.5％

		すなわち, 1．三辺の長さ 2．一辺とその両端の角 3．二辺とそのはさむ角　が等しい 4．三つの角 5．斜辺と一鋭角 から，これらの二つの三角形は合同である。 ゆえに，AC＝BDである。	
34	〔10〕	下図の台形ABCDで，BCはADの2倍であるとき，OB：OD＝2：1であることを説明したい。つぎの説明が正しいものとなるように，□の中にあてはまる記号を書き，また，{ }の中から正しいものを一つ選んで，その番号を○でかこみなさい。  （説明）　ADとBCは平行だから ∠OAD＝∠□ および∠□＝∠□である。 したがって，△□と△□は 1．二つの角 2．二辺の長さの比とそのはさむ角 3．三辺の長さの比 がそれぞれ等しいから相似である。 ゆえに，OB：OD＝□：□＝2：1である。	・既知の条件からすじ道をたどって結論を導くという論理的な考え方ができるか。 ・平行線の性質，三角形の相似について理解し，それを活用できるか。 14.4%

2. 生徒の困難点

(1) 論証の能力には，与えられた条件と証明すべき結論をはっきりつかむこと，与えられた条件から結論を導くための見通しを立てること，この結論を言うためにはどんなことがわかればよいかと解析的に考えること，要素をどのように関係づけ，どんな補助線を引けばよいかを考えること，思考の過程を論理的に記号を用いて簡潔な文章で表現すること，なども含まれるのであるが，完全な論証を要求することは現行指導要領の範囲を超えるおそれがあり，かつまた，このような能力をペーパーテストで，しかも客観的にとらえるには技術上の困難もある。

したがって，ここにおさめた三つの問題は，三角形の合同，相似，平行や対称等，図形についての基本的な性質の理解と，それらの知識をもとにしてすじ道をたどって考えることができるかどうかを見ようとしたものである。

(2) 正答率は15%～30%程度で，いずれも良くない。

生徒が論証の問題で困難を感ずる第一の点は，証明の意味を理解していないし，その必要性も感じていないということである。生徒は直観的な主観的なは握で満足し，どうしてそのような論理的，形式的な理由づけが必要なのかを理解していない場合が多い。

第二は，生徒が図形の証明になれていない。逆に言えば，この分野の指導が今まで軽視されていた，ということであり，

第三は，用語の意味がはっきり理解されていないことであり，

第四は，証明の基礎となる図形の基本的な性質についての理解が，断片的であり，形式的表面的であるということである。

これらの原因が総合されて，いずれの問題も30%たらずの低い正答率にとどまっているものと思われる。

3. 指導上の留意点

(1) 現行の指導要領では，直観的に，または実験，実測，作図等によって確認した図形についての知識を基礎として，すじ道を立てて考えることによって新しい性質を発見したり，確めたりすることを指導するよう要求しているが厳密な論証を指導することは要求していない。しかし，論証指導の必要は早くから叫ばれ，多くの教科書では，かなり論証的な指導をするよう計画している。

新しい指導要領では，この分野の指導を強化し，中学校数学の内容として円周角，中心角まで範囲を広げ，論証指導をするよう指示している。

(2) けれども，実際の指導では，一部の学校を除き，作図，投影図，論証はやはり比較的軽視されているように思う。指導方法を云々する前に，まず，もっと時間をかけ，力を入れて指導するようにしなければならないと思う。

(3) 論証は，確認された図形の性質，すなわち，公理，定理と，明確な定義にもとづいて論理的に進めなければならない。

したがって，

- 図形の定義が言える。
- 多くの図形の中から，または複雑な図形の一部として，特定の図形を見つけ出すことができる。
- 他の図形と区別したり，どこが等しく，どこが違うかを指適できる。
- その図形がかける。

ということ。要するに図形の概念が明確になっていなければならないし，

- その図形の性質として確実に言えることは何か。

ということ，すなわち，基礎的な性質を確実に理解していなければならない。

(4) 証明につかわれる図形の性質は，その図形のいろいろの性質の中のいくつかであり，どの性質が役立つかを選ぶのは，目標すなわち結論に導かれた見通しである。見通しを立てて考える態度の指導が特にたいせつである。

(5) 知識が個々ばらばらであっては，問題に出あった時に働らく力とはならない。その図形についての知識が総合的にまとまったものとしては握されていなければならない。

たとえば，

- 一つの図形のいろいろの性質をまとめてみる。
- 三角形の相似は合同と対比して理解する。
- 線対称は点対称と対比して理解する。
- 一般の四辺形，平行四辺形，長方形，菱形，正方形の一連の関係とそれぞれの性質をまとめて理解する。

など，**知識を体系だてて整理するよう**指導しなければならない。

新しく，一つのことを学習したならば，その知識が，既にもっている図形の知識の体系のどこに位置づけ，どのように整理すべきかを，心して指導する必要がある。

以上のことを，具体的な問題について説明しよう。

(6) 32年度〔10〕

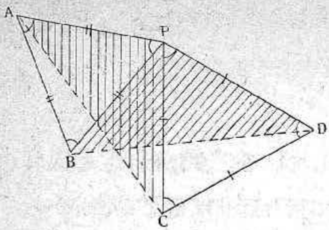
この問題を解決する方針は問題自身が示している。すなわち，△ＡＢＣと△ＡＤＣが合同であり，ＡＣを折り目として折り返せば重なることから，対角線ＡＣとＢＤが直角に交わることを言おうとしているのである。このような（説明）の全体構造をは握すること，すなわち証明の見とおしをつかんで考えることが，論理のすじ道を検討する場合にも，きわめてたいせつである。この問題の証明の方針は，さきにも述べたように，問題自身が示しており，一読すればただちにわかることではあるが，しかし，見通しを立てて考えたり作業したりする態度ができていない生徒は，このようなかんじんの点を読み落してしまうおそれがある。

つぎに，△ＡＢＣと△ＡＤＣの合同の根拠を，与えられた選択肢から選ばなければならないが，この場合には，三角形の合同定理をはっきり理解してまぎらわしい選択肢と区別できなければならないし，与えられた条件，すなわち，ＡＢ＝ＡＤ，ＢＣ＝D.Cを記号によって図に書きこんでおくことが役立つであろう。

最後に点ＢとＤの関係を直線 $\boxed{\text{ＡＣ}}$ について $\boxed{\text{対称}}$ と記入しなければならないが，これは線対称について，はっきりした理解がなければ気づかない言葉であろう。

(7) 33年度〔10〕

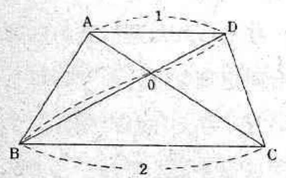
この問題も証明すなわち，問題に言うところの（説明）の方針が，△ＰＡＣと△ＰＢＤの合同からＡＣ＝ＢＤを言おうとしていることにあることは，見とおしをつけて考える態度のできている生徒ならば，問題を一読すれば容易に理解できるであろう。あとは，△ＰＡＣと△ＰＢＤの合同の理由を明らかにするだけである。そこで，与えられた条件である△ＰＡＢと△ＰＣＤとが正三角形であるということからただちにわかる線分や角の相等をつぎの図のように図に記入し，これと，二つの三角形の合同条件——問題の選択肢



の中の——のどれが成立するか，と考え合わせれば問題中の□を埋める「あてはまる記号」は必然的に発見される筈である。選択肢の中には合同条件でないものも含まれている。これに迷わされないためには，三角形合同定理をはっきり理解していなければならない。

(8) 34年度〔10〕

この問題も，二つの三角形の相似からOB：ODを求めようとしていることは，「見とおしを立てる」という心構えで問題を一読すれば，ただちに読みとれると思う。どの三角形を考えるべきかは，



・OBとODの比を考えるためのものであるから当然，OBおよびODを対応辺とする二つの三角形でなければならないこと。

・左図の通り，BCとADとの比が2：1と与えられていること。

などから△AODと△COBであるあることが推定される。あとは，三角形相似の条件——問題に与えられた選択肢——や与えられた条件のABCDが台形であること，すなわちAD∥BCから∠ADO＝∠CBOが考えられるであろう。

要するに

・見通しを立てて考える態度。

・与えられた条件は何か，それからどんなことがわかるか，と考えて，わかったことは図に記入すること。

・何を証明しようとしているのか，そのためにどんなことがわかればよいのかと考えること。

・三角形の合同や相似，対称，平行線等についての基礎的な理解。

これらが，この問題を解くために必要であり，かつじゅうぶんな能力であ

ると言えよう。

(9) 数学においては，「**対応**」**の概念**はきわめて重要である。数量関係，すなわち，比や比例について研究する場合等においても同様であるが，特に図形の対称，合同や相似について研究する場合には，どの点とどの点，どの線分とどの線分，どの角とどの角，どの部分の面積とどの部分の面積が対応しているのかを，はっきり確認させる必要がある。この概念が明らかに理解されていないと，複雑な図形の研究には，たちまち，つまづくことになろう。

なお，たとえば，合同または相似の図形においては，対応する点を結ぶ線分もまた対応し，したがってその長さまたは長さの比は等しく，方向も一定の関係にあり，対応する直線のなす角もまた対応し，したがってその大きさは等しくなるなど，対応する要素からなる図形が同様な対応関係にあることも，理解させなければならない。

(10) 生徒は，結果がどうなるか，それが事実であるかまちがっているかということには大きな関心を示すが，その結論を得た道すじ，真実である根拠を理論的に示すことの必要は痛感しないようである。したがって，過程を問題にしないで答だけを出そうとしたり，既に結論の示されている図形の性質に関する問題や，直観的に結論をなっとくできる問題を，あらためて証明するということに大きな意味を認めない傾向がある。

一般に，「論証」といえば「幾何」または「図形」を，「幾何」と言えば「論証」と考えるものが多い。これは大きな誤りであると思う。証明，すなわち論理的な推論は，図形教材だけでなく，数学の全分野を貫く，根本思想であり，根本方法である。論証をぬきにした数学は考えられない。ただ，図形のいわゆる論証の問題では，結論を示して，その結論に至る論理的な推論の過程を問うことが多く，小学校や中学校の算数教材や代数教材では，結論そのものも児童生徒に求めさせる問題が多いということにすぎない。たとえば，「直角三角形の三辺をそれぞれ一辺とする三つの正方形の面積についてどんな関係がなりたつか。」としたからとて，三平方の定理の証明が要求されていることには変りなく，

30年度〔2〕の

$\sqrt{3}=1.732$として$\sqrt{12}$の値を求めよ。

という問題を

$\sqrt{3}=1.732$としたとき，$\sqrt{12}=3.464$となることを証明せよ。

と書きかえたからとて問題の本質が変ったわけではない。

算数教材や代数教材では，ただ結論を求めることだけに関心をおいて過程を度外視または軽視し，したがって論理的に思考し，推論する能力が伸ばされていないとすれば，図形の論証にあたって，生徒の困難が倍加されるのは当然である。

もちろん，算数教材や代数教材をじゅうぶん指導してさえおれば，図形の論証指導に全然困難がなくなるなどと言っているのではない。対象の相違からくるいろいろの問題，たとえば，

- 図形についての基礎的な概念や性質の理解，定義
- 用語や記号の意味
- 補助線と数量的な媒介要素とのちがい
- 図形の論証問題特有の記述の形式

など，指導にあたって，特に注意しなければならない問題は多い。

なおまた，論証指導は算数教材や代数教材でやるべきで，図形教材では，そこで指導された論証をただ図形教材についても試みるにすぎないと言っているのでもない。各教材にはそれぞれの中心的なねらいがあるので，代数教材でもできるからと言って論証指導の中心を代数教材にうつすのでなく，論証は図形教材で主として指導するよう教育課程を構成したことには，それなりの意味があろう。ただ，

- 与えられた条件，確実にわかっていること，これが解決の出発点であり，これからどんなことがわかってくるか，結論を求めるにはどういうことがわかればよいかと考えていかなければならないこと。
- 思考の過程，推論の根拠を確めながら論理的に，すじ道を立てて考えていかなければならないこと。
- 独断的，主観的な条件をかってに作りだしたり，直観的な判断を根拠を確めないで使ってはならないこと。

・条件と結論を混同してはならないこと。

など，推論のの基本的な原理や，

・問題の要点をぬき出したり，図に書いて確めたりして，問題の意味を正しく，具体的にはっ握すること。

・見通しを立てて考えたり操作したりすること。

などの問題解決の基本的な方法が，算数教材や代数教材それ自身にとって重要な指導目標であり，それが生徒の身についていることが同時に，図形の論証指導の前提だと強調したいのである。

なお，ことがらによっては，図形教材よりもかえって代数教材で指導した方が，生徒達に理解されやすいのではないかと思われるものもある。たとえば，生徒は「逆命題もまた真」と考え違いをしやすい。しかも，中学校の図形の問題には逆もまた成立する場合が多く，この誤った判断がますます固定する。しかし，代数教材には，もちろん逆命題の成立するものも多いけれども，たとえば，

$a=b$ ならば $a^2=b^2$ であるが逆は成立しない。

$a=b$ ならば $a+3>b$ であるが逆は成立しない。

など，逆命題の成立しないことを指導するに適した，しかも代数教材の指導自身にとっても重要な問題となる材料が多くあるのである。

要するに，図形教材だけではなく，数学全体を通じて論証的思考の能力を高めなければならないと思う。

ま と め

以上，最初に述べたような数学科の学力に対する観点に立って，過去5か年間の本県高校進学学力検査結果を検討し，各分野ごとに，問題のねらいと生徒が困難を感じたと推定された点，および，それに対する指導上の留意点をのべてきたのであるが，全体を通じて言えることは，つぎのように要約できると思う。

(1) 各分野とも，生徒の学力は年度を追って向上しているが，まだ満足すべき状態とは言えない。

(2) 機械的，形式的な手順にしたがって，計算したり公式を適用したりするような問題の正答率は比較的よいが，それらの知識，技能に理解の裏付けがないため，具体的な，または理論的な問題に適用することができず，生きて働らく知識技能となっていない。

(3) 知識が個々ばらばらに記憶されているだけで体系化されていないし，個々の概念，法則，原理，規約が，一般化され統一的に理解されていないようである。

(4) 当然なさねばならない思考や操作の手順を省いて，手っとり早く答だけを出そうとする傾向があるように思われる。

- 問題の要点を，抜き出して整理したり，図に書いて確認したりして，問題を確実に，具体的に理解すること。
- 計算や思考の過程をはっきり書いて，確実に思考や操作を進めること。
- 結果を具体的な場面で確かめ，験算してみること。

など，一般的な学習態度ができていないと思われる。

(5) 見通しを立て，それにしたがって論理的にすじ道をたどって考えたり操作したりする態度が，じゅうぶんできていない。それと同時に，先入観や誤った直観にとらわれて，他の面，より広い視野，より高い次元から見なおすこと，いわゆる視点の変更のできないものも多いように思われる。

(6) 基礎経験が不足のため，問題の意味を具体的には握できなかったり，数量

関係を理解できないものもあるようである。経験の領域を広め，質を深めることは，数学科指導の面からも重要な問題と思われる。

(7)
- 原価，利益，売価の関係
- 原価，利益，利益の歩合の関係
- 速さ，距離，時間の関係
- 仕事，人数，日数の関係

など，日常生活における数量の関係の基本構造

- 長方形の縦，横，面積の関係
- 円周，直径，円周率の関係
- 円柱の底面積，高さ，体積の関係

など，図形の辺や面積，体積などの基本的な関係

- 基準量，比，比で表わされた量の関係
- 直角三角形の辺と三角比の関係

など，

基礎的な数量間の基本的な関係は，はっきりは握しておくよう指導する必要があると思う。小学校，中学校のそれぞれの学年で，どのようなことについてどの程度には握させておくべきかを考え，指導の系統を研究しておくことが必要であろう。

(8) 一つの学習が可能になるためには，その素地となるものが予め養なわれていなければならず，その学習の結果がまた，つぎの学習の素地となることを考え，数学の発展を見とおした系統的，発展的な指導が重要であると思われる。

(9) 文字に対する抵抗が大きい。文字がいろいろの意味に用いられることや，式が演算の操作を表わすとともに，その結果である一つの数量を示すものであることを，じゅうぶん，時間をかけて，段階を踏んで指導する必要があろう。

(10) 問題の全体構造をは握し，数量関係を理解して等式で表わす力が弱い。図式化等の方法で，生徒自身が数量関係をつかみ得るよう指導を工夫しなければならない。

(11) 比において，基準の量に注目する態度が弱いようである。基準の量が与えられていない場合は，それをa，p等の文字で表わし，あるいは特定の数を仮定して，比の問題を絶対量の問題に変換する考え方も指導しておくべきであ

る。

⑿ 数量や図形を動的，関数的に考察することになれていない。なお，この際変化しない，一定のもの——比例定数もその一つである——に注目する態度も，じゅうぶんでないようである。

⒀ 投影図，展開図の問題では必ず見取図を書くこと，一般に，図形の研究では，できるだけ正確な図を書き，与えられた条件，既知の性質を記号等で図に記入して考えることがたいせつなのであるが，このような習慣ができていないようである。

投影図，作図，論証は，もっと重要視すべきであろう。

⒁ 特定の図形を書いて考える場合も，その特定の図形の中に一般的な図形の性質，法則を見るためのものであることを考え，特定の位置，大きさにおける図形の性質を 図形一般のものと 考え 誤らないよう 注意しなければならない。そのために，教師は，いろいろの位置，大きさの図形について指導するような配慮が必要である。

数学のそれぞれの内容のもっている性格と，生徒の心理の特性から考えるとそれぞれの教材について，指導上のポイントが考えられる。もちろん，ここでいうポイントとは，特定の風変りの問題を解く際，のその問題の解決にだけ役立つ，一見巧妙ではあるが技巧的な解法を言うのではなく，数学研究の全般を流れる方法原理の，具体的な教材に対する適用のしかたのことである。この紀要では，それらのいくつかについて指摘してきたつもりであるが，もとより，これがそのすべてではないし，私の独断にすぎないこともあったと思う。数学の研究にあたられている方々，学習指導の実践にあたっておられる方々の御批判，御協力をいただいて，今後の研究を続けていきたいと考えている。

あ と が き

この研究は，全所員が共同で進めた「学力と学習指導—高校進学学力検査を資料として」の数学科編で，つぎの方々の協力をいただいた。ここに厚く感謝の意を表する。

新潟市立新潟高等学校教諭	宮部与一
新潟市立寄居中学校教諭	鏡淵　稔
新潟市立大形中学校教諭	渡辺新三
新潟市立舟栄中学校教諭	後藤　敏
新潟県教育庁学校教育課指導主事	桂　信雄

この研究を主として担当し，執筆した者は山野井嘉瑞である。