

小・中学校における空間概念育成の指導系統とその実践

関 恵一¹ 町田一伸² 保坂いよ子³ 林 英夫⁴
 樽木行雄⁵ 島田 貢⁶ 片桐芳男⁷ 関 一夫⁸
 加茂川義靖⁹ 本海 公¹⁰ 田中 斌¹¹ 石塚定雄¹²

算数・数学教育現代化の動きのなかで、今まで、等閑に付されていた空間についての認識が改めて見直され、その必要性が叫ばれている。この研究は、「図形の性質は空間に依存し、図形の置かれている空間の認識なしに、図形を考察することは無意味である」という立場から、児童・生徒の発達に合わせて、空間概念の指導系統を考え、授業の実践を通してまとめたものである。

1 研究の目的とその背景

これは小学校・中学校の一貫した空間概念育成のための指導系統を作り、それを実践授業により検証し補正していくことを目的とした共同研究の集録である。

今日、数学教育の現代化の立場から、新しい視点で図形教育を考えていくことが重要となってきた。これからの図形教育をすすめていく基本的立場として、空間の認識をとおして図形の性質を認めていかなければならないということである。すなわち、児童・生徒に、図形のおかれている空間にもっと着目させる必要があり、図形の性質がおかれている空間にどのように依存しているのかを理解させる学習が大切であろう。そしてそのためには、空間概念を育成し発展させていくのに欠かすことのできない教材を検討し、適切な指導のあり方を追究していくことが望まれるのである。

また、文部省指導書算数編や数学編の目標や内容の解説では、

- 基本的な図形の取り扱いを通して空間についての認識を深める。(小学校)
- 図形や空間に関して、数学的に考察し処理する能力を伸ばす。(小学校)
- 点・線・面のつながりに着目して考察することができるように空間概念を豊かにしたり、図形についての新しい性質を見出したりすることができるようにして、図形や空間についての見方を豊かにする。(中学校)
- 直線・平面および空間の広がりについて理解を深めて、位相的な見方など図形や空間についての見方を豊かにする。(中学校)

1：県立教育センター所員 2：県立教育センター所員 3：新井市立新井小学校教諭

4：長岡市立表町小学校教諭 5：新発田市立二葉小学校教諭 6：青海町立青海小学校教諭

7：大潟町立大潟町小学校教諭 8：塩沢町立舞子小学校教諭 9：柏崎市立第一中学校教諭

10：大島村立大島中学校教諭 11：中之島村立中之島中学校教諭 12：新発田市立本丸中学校教諭

のように「空間」の認識が強くなりだされている。この背景には、数学の現代化の要求や、過去の図形教育についての反省のあることがうかがわれるが、実際の授業の場で、空間概念をどのように定義づけ、空間概念育成の指導をどう展開していくかについては、いまだ十分に研究され、実践されているとはいえない現状であり、研究の目的もここにありといえる。

Ⅱ 研究の構想と態度

1 研究の構想

この研究は、昭和47年度教育センター定期研修員10名と、センター所員2名が、上述のような研究の目的と背景の認識を共通にし、各パートを分担した共同研究で、小学校・中学校を一貫した空間概念の育成のための指導系統を作り、その指導のあり方を検証授業により明確にすることをねらいとし、次のような構想で研究を進めてきたものである。

- 空間についての認識と、空間概念育成の意義と必要性について話し合い、図形教育の中での空間概念の指導の位置づけとその育成のための観点について共通理解を深める。
- 学習指導要領に示されている空間概念育成の指導内容をあらため、学年の発達段階に即し、児童・生徒の空間認識の立場より空間概念をいかに育成していったらよいかについて話し合う。
- 各社の教科書で、空間概念の育成に関係のある内容について、それぞれのねらいに応じた学年別の題材やその配列を調査検討し、ねらい達成のための効果的な教材は何かをさぐる。
- 上述のことを基礎として、小学校1年より中学校3年までの空間概念育成のための指導系統を作成する。この場合、学年の発展的な関係を明らかにし、明確にその系統が把握できるように留意する。
- 指導系統に基づき、題材とそのねらい、主な指導内容、指導順序、指導方法、時間配当を分析し、児童・生徒の学習における心理などをじっくり考え、教育的な意味における発展性系統性を主眼として適切な指導計画を作成する。
- 学年ごとに、指導計画の中でもっとも問題となると思われるところについて指導案を作り、授業を通して検証する。
- 授業を通して検証された結果に基づき、指導系統、指導計画を補正する。
- 空間概念を育てる指導系統のまとめと、実践研究の集録をする。

2 研究の態度

上述の基本的な構想のもとに、具体的な研究作業を推進するため、次のような研究態度を確認した。

- 各自が分担し研究した内容については全体協議で検討し、つねに小学校と中学校の関連を尊重していく。
- どこの学校においても実践可能な指導系統であり、特殊な生徒を対象としない。
- 全体討議を経た指導案に基づく研究授業を通し、確かめ補正した指導計画、指導系統にする。

Ⅲ 空間概念育成の指導の意義

1 空間概念について

学習指導要領では、空間概念を育てることを強調しているが、その「空間」の意味や、用語の使い方が統一されておらず、現場のとらえ方にも差のある現状である。広義に解釈すれば、空間とは、われわれの認識の対象そのものであるといってもよいが、児童・生徒の発達段階からみて、空間をそこまで広げて考えることはむずかしい。そこで、空間を図形の存在する場、とくに、彼らが生活している空間（三次元以内の空間）とし、しかもユークリッド空間を主体として扱っていくことが望ましいのではないかと考えた。これにより、児童・生徒は一次元（直線上）では、二次元（平面上）では、三次元（空間）では、と図形の置かれている場を自由に拡張し、図形に対する見方や考え方を深めていくことができるであろう。この考えから、空間概念を育成するための観点を次のように設定した。

(1) 空間を認識させる。

(ア) 方向をとらえさせる。(一定方向への運動)

(イ) 位置や位置関係を明らかにする。(座標の考えや図形の相互関係)

(ウ) 広がりに着目させる。(座標空間、数直線・平面・三次元空間の広がり、角の辺と内部の広がり、閉曲線の内部外部など)

(エ) つなかりに着目させる。(位相的な見方)

(2) 変換の考えを育てる。

(3) 図形の構成要素に着目させる。

以上、项目的に並べてみたが、これらがからみ合い作用しあい、また、これらをおうりものとして空間概念が育成されると考え研究をすすめてきた。しかし空間概念は、このような観点を指導するだけで育つかは今後に残された課題でもある。

2 指導の意義

従来の図形教育では、その図形の性質を解明していくことを主な指導の目的とし、その図形がおかれている空間を意識して事象を考えていく指導が少なかった。しかし、現代教育の思潮より、主体的学習や創造力を大切に教育がいわれ、図形教育でも多面的な思考を養うことを主眼とするようになってきた。そして、このような考えは、観点を変えたり、条件を捨象したりすることの学習によって育つものであり、動的な見方や図形のおかれている空間を意識させる指導が大切である。また、数学的に考えると、空間を意識することによって、図形を統合的に見たり、発展的に考えていくようになるだろう。この意味で、図形指導の中での空間概念育成の位置づけを考え、その育成のための指導系統を解明することは、児童・生徒が、図形の学習に生き生きと真剣に取り組み、自ら主体的に空間概念を発展させていく基盤となり得ると考えるものである。

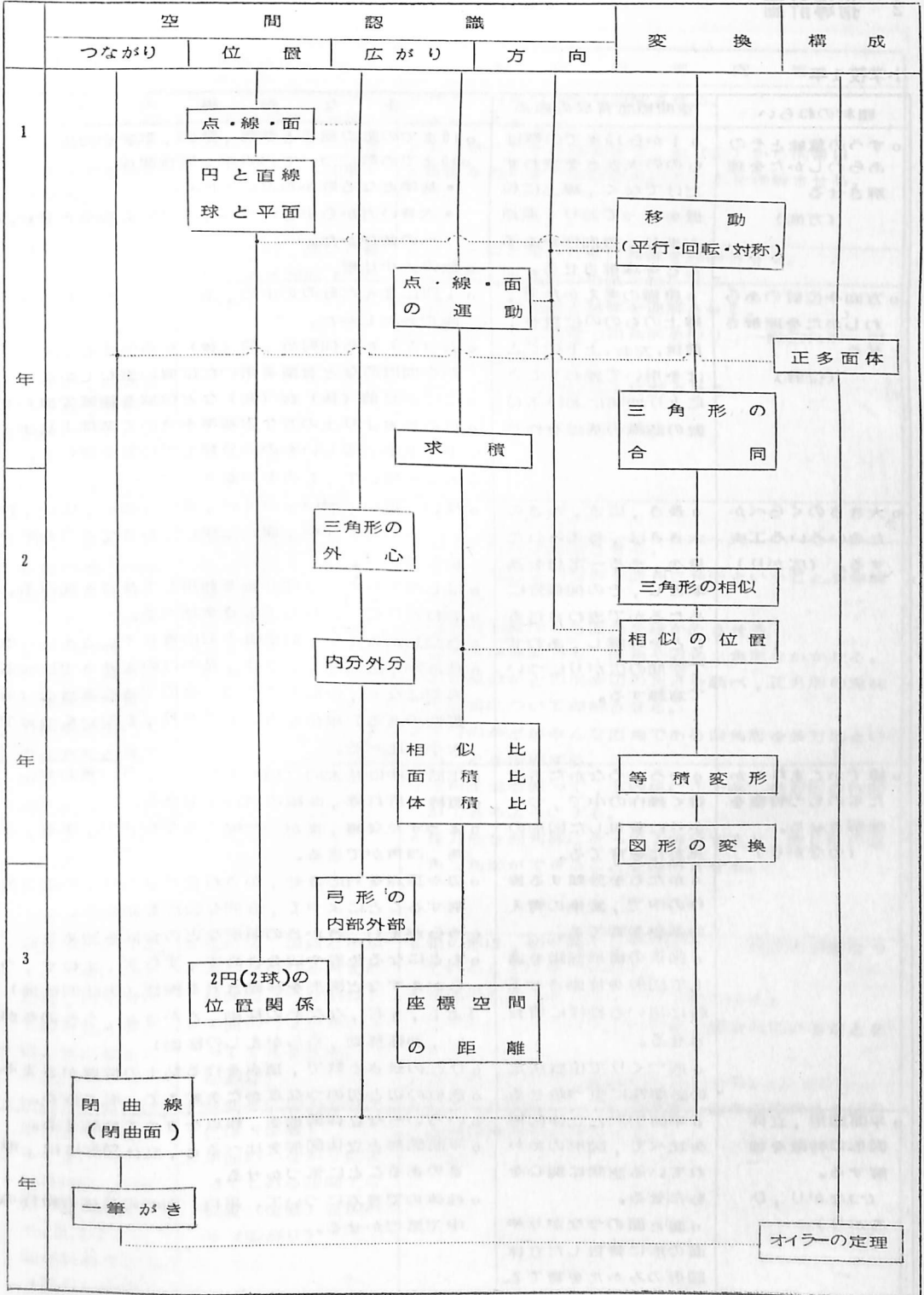
IV 指導系統と指導計画

1 指導系統

(1) 小学校

	空間認識				変換
	つながり	位置	広がり	方向	
1年		方向や位置の表 わしかた	大きさのくらべ かた	すうの意味と表 わしかた	
2年	線でかこまれた 形 厚さと広さのあ る形				
3年	三角形 四角形 開いた図	正方形 長方形		平面上の位置	
4年		角と合同 四角形 直方体と立方体	円 球 三角形		
5年			三角形 四角形 面積 円と正多角形		線対称 点対称
6年		立体	拡大図, 縮図		図形の移動

(2) 中学校



2 指導計画

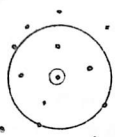
小学校1年

題材のねらい	空間概念育成の観点	主な指導内容
<p>○すうの意味とそのあらしかたを理解させる (方向)</p>	<p>○1から10までの数はものの大きさを表わすだけでなく、線上に位置を持っており、原点があり、方向性があることを理解させる。</p>	<p>○10までの数の構成と数詞、数図、数字の対応。 ○10までの数についての順序、前後関係 ・基準となる数からどの方向に。 ・大きい方から小さい方へ、小さい方から大きい方への並びかた。 ○数の大小比較。</p>
<p>○方向や位置のあらしかたを理解させる (位置)</p>	<p>○座標の考えかたで、線上のものの位置を、前後、左右、上下のことはを用いて表わすことにより空間における位置の認識の基礎を作る。</p>	<p>○1列に並んだものの中の、ある1つの物の位置や順序のあらしかた。 ○右(左)から何列め、前(後)から何番め、上(下)から何段めなど言葉を用いた位置のあらしかた。 ○○○より前(後)右(左)など位置を領域で表わす。 ○机の高さより上の方など基準をきめて基準より上、下、基準と等しいものに分類して位置を表わす。 ○方向を用いて、ものを分類する。</p>
<p>○大きさのくらべかたをいろいろ工夫する。(広がり)</p>	<p>○長さ、広さ、かさの大きさは、与えられた量を、ある一定量を基準とし、その何個分にあたるかで表わされることを理解し、あわせて空間の広がりについて意識する。</p>	<p>○長い、短い、厚い、うすい、高い、低い、広い、狭い、多い、少ない、深い、浅い、かさなどの用語を正しく使う。 ○はしをそろえたり仲介物を利用して長さを比べる。 ○重ねたり切ったりして広さを比べる。 ○うつしかえたり、数直線と対応させてかさを比べる。 ○長さや、広さや、かさは、見かけの大きさで比べるのではなく、空間をうめることのできる適当な(等質性のある)単位を用いてはかり、そのいくつ分で大きさを比べる。</p>
<p>○線でかこまれたかたちのもつ特徴を理解させる。 (つながり)</p>	<p>○いろいろなかたちを書く操作の中で、つながりに着目した図形の見かたを育てる。 ○かたちを分類する操作の中で、変換の考えの基礎を育てる。 ○図形の構成活動を通して図形を移動させる時に用いる操作に着目させる。 ○形づくりで位置決定の必要性に気づかせる。</p>	<p>○生活の中に基本的な図形をみとめ、言い表わす。 ○直線と折れ線、曲線の区別ができる。 ○まっすぐな線、まがった線のつながりで、まる、三角、四角ができる。 ○辺や頂点を対応させ、かさね合わせたり、色紙を分割することによって、合同な図形を認める。 ○うらがえし、さかさの図形などの合同を認める。 ○もともになる色板や辺をきめて、ずらす、まわす、うらがえすなど図形を移動させる操作。(実践例後掲) (上下、左右、ななめの移動、さかさ、うらのちがひ、回転移動、うらがえしの移動) ○ひこの長さや数で、頂点を作る粘土の位置がきまる。 ○色板の辺と辺のつながりかたを変えて、形を作る。</p>
<p>○平面図形、立体図形の特徴を理解する。 (つながり、ひろがり)</p>	<p>○平面図形と立体図形を比べて、図形のおかれている空間に関心をもたせる。 ○面と面のつながりや面の形に着目した立体図形のみかたを育てる。</p>	<p>○いろいろな立体図形を、観点をきめて分類する。 ○平面図形と立体図形を比べると、立体図形には、厚さのあることに気づかせる。 ○柱体のでき方について、平行、回転の具体的操作の中で気づかせる。</p>

小学校2年

題材のねらい	空間概念育成の観点	主 な 指 導 内 容
<ul style="list-style-type: none"> ○ 平面上に並んだものの相互の位置の関係の表わし方などを理解させる。 (平面上の位置) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 2つの方向から決定される位置(方向) ○ 具体的なものの位置を表わす。(位置) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 相互の位置の関係を理解させる。 ○ 向かって右, 左 ○ 前(後ろ)から何番目で, 右(左)から何番目 ○ 位置を表わすのに数を用いることを理解させる。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 開いた線, 閉じた線のなかまわけ ○ まがった線, 直線の意味 ○ 三角形, 四角形の定義, 弁別 ○ 直線のつくり方, かき方 ○ 辺, 頂点の意味(三角形, 四角形) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 閉じた線, 開いた線でできる図形(つながり) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 閉じた線と開いた線の特徴を理解させる。 ○ 三角形, 四角形の特徴を知らせる。 ○ 直線という用語と意味を理解させる。 ○ いろいろな三角形, 四角形を作り, 一般三角形・四角形を理解させる。 ○ 辺, 頂点という概念を理解させる。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 直角, 直角三角形の用語の意味 ○ 直角のかき方, 確かめ方と三角定規の機能 ○ 正方形, 長方形の意味と性質 ○ 方眼紙を用いての正方形と長方形の作図 ○ 長方形から, 2つの合同な直角三角形ができること。 (正方形, 長方形) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 直線の長さ, 方向によって決まる正方形, 長方形(位置) ○ 辺や頂点を対応させて, 方眼紙に正方形, 長方形をかく。(変換) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 直角の意味を理解させる。 ○ 三角定規のような形を直角三角形ということを理解させる。 ○ 紙を折る操作から直角を確かめさせる ○ 三角定規を使って, 直角や直角三角形をかかせる。 ○ 折り紙のかどの形や辺の長さを調べ, 正方形の意味や性質について理解させる。 ○ 4つのかどがみんな直角である四角形を長方形ということを指導する。 ○ 三角定規を使って, 方眼紙に正方形, 長方形の作図ができるようにする。 ○ 長方形を対角線にそって2等分すると, 同じ形の直角三角形ができることを理解させる。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 直方体を切り開くと平面になること, 折りまげて組み立てると直方体になること。 ○ 開いた図は, 長方形が連なっていること。 ○ 直方体は, 6つの面がかまれている, 頂点は8つ, 辺が12あること。 (ひらいた図) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 辺と辺, 頂点と頂点のつながりを考えた展開図(つながり) ○ 平面のつながりによってできる立体, (つながり) ○ 空間を区切っている立体(位置) ○ 平面のつながりによってしめる空間での位置(位置)と広がり(広がり) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 箱の形は, 切り開くと平らになり, 長方形が連なっていることに気づかせる。 ○ 立体の頂点, 辺, 面について知らせる。 ○ 箱の形は, 6つの長方形の面で囲まれていることを知らせる。 ○ 方眼紙を用いて, 展開図をかかせる。 ○ 直方体の頂点の数や位置関係, 辺や辺の長さや辺の方向の關係に着目させる。

小学校3年

題材のねらい	空間概念育成の観点	主な指導内容
<ul style="list-style-type: none"> ○ 円の性質についての理解。 ○ コンパスの機能とその使い方。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 円の定義に関連して円周は条件を満たす点のつながり(点集合)であり、空間を内部と外部に分けていることを意識させる。 ○ コンパスの機能を、空間を一定条件でくぎるものとしてとらえる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 生活のなかでの円の機能的な働き。 ○ 円の性質 <ul style="list-style-type: none"> ・ 円はどんな形かことばで言わせる。 ・ 定点から、5 cmの点をとる。 ・ 点を多くしていくとどうなるか考えさせる。 ・ 円の半径が無数にあることをさがさせる。 ・ 用語(円, 中心, 半径, 直径) ・ 半径と直径の関係 ・ 同じ円(等しい円)では、半径, 直径は等しい。 ○ 円の書き方の工夫(道具の工夫) ○ コンパスの機能について <ul style="list-style-type: none"> ・ 円をかくこと。 ・ 同じ長さにくぎること。 ・ 同じ長さを移すこと。 ・ 同じ長さであることを確かめること。 ○ 内部, 外部, 遠近の意識をもたせる (例) ある点から, 等距離, あるいは一定距離にある点を求めます。 (軌跡交会法の素地) 
<ul style="list-style-type: none"> ○ 球の性質についての理解。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 球のおかれている空間に関心をもたせる。 ○ 球の切断をとおして球の内部, 外部の意識化をはかる。 ○ ある条件を満たす点の集まりであることを意識させる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 球の見かけは, どこから見ても円である。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 投影された円(平面図形)と球(立体図形)のちがいを意識させる。 ○ 切り口は, どれも円になること。 ○ 球の中心を通る切り口は, いちばん大きいこと。 ○ 球の中心, 半径, 直径(円との関連でとらえる) ○ 球面上の点は, どの点も中心から等距離にある。 ○ 球には内部と外部がある。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 三角形と関連して, 角の大小を知る。 ○ 特殊な三角形の定義, 性質および, その包摂関係。 ○ 二等辺三角形, 正三角形の作図。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 角の大きさを2辺の開きとしてとらえる。 ○ 角は2辺により, 空間を, 内部と外部に分けることを意識させる。 ○ 位置, 大小に関係なく, 三角形を認めることにより, 空間の広がりを感じさせる。 ○ 軌跡交会法により, 点の位置を決定することを通して, 空間の広がり意識を深める。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 角の大小比較 <ul style="list-style-type: none"> ・ 折って重ねる。 ・ 切りとって重ねる。 ・ 分度器を使って比べる。 ○ 角の大小は, 2辺の開きであって, 辺の長さには, 関係がないこと。 ○ 辺の長さ, 角の大きさに着目した三角形の分類。 ○ いろいろな形, 大きさの直角三角形, 二等辺三角形, 正三角形のあること。 ○ 位置に関係なく, いろいろな三角形を認めること。 ○ 定義や性質を使つての作図(実践例後掲) <ul style="list-style-type: none"> ・ 条件を満たす点の位置決定にコンパスを利用する。

小学校 4年

題材のねらい	空間概念育成の観点	主 な 指 導 内 容
<ul style="list-style-type: none"> ○ 回転の大きさを示す量としての角の見方を育てる。 ○ 角を測定する能力を伸長する。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 角の大きさを、角の内部と外部の広がりにとらえる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 半直線の回転による角の大きさの変化。 ○ 角の大きさの単位「°」。 ○ 半回転, 1 回転の角の大きさ。 ○ 直角を単位とした角の大きさ。 ○ 角は, 2 辺により平面を内部と外部に分ける。 ○ 角の大きさは, 2 辺の長さには関係しない。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 合同の意味, 合同関係の調べ方を理解させる。 ○ 三角形の決定条件を理解させる。 (合同な図形) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 位置の捨象を通して空間の広がり意識をもたせる。 ○ 変換の考えの素地を育てる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 図形の合同の意味 ・形と大きさの区別 ・合同の用語 ・対応する頂点は必ず重なる ・対応する辺, 角の大きさは等しい ・対応する線分は等しい。 ○ 重ねるのに必要な操作を移動としてまとめる。 ○ 三角形の決定条件。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 3 つの頂点の位置で三角形は決まる ・ 3 つの辺の長さで三角形は決まる ・ 角だけでは三角形は決まらない ・ 他の条件でも決まる場合がある。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 2 つの直線の位置関係として, 平行や垂直の関係を知らせ, それを用いて, 基本的な平面図形の理解を深める。 (四角形) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 角の概念を媒介とする直線の位置関係に着目させながら, 平行, 垂直関係を理解させる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 直線の垂直, 平行の概念の理解。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 2 直線の位置関係。 ・ 垂直, 平行な直線の作図, 弁別, 確かめ方。 ・ 同位角, 錯角, 同側内角の性質。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 基本的な立体図形について理解させるとともに空間について簡単な考察ができるようにする。 (直方体と立方体) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 直方体, 立方体の構成要素のつながり方, またその位置関係に着目させ, 二次元と三次元の図形のちがいをとらえさせる。 ○ 空間における点の位置決定に関連して, 空間の無限の広がりや, 直線, 平面と三次元のちがいに着目する。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 直方体と立方体について。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 面の数と形, 辺の数と長さ, 頂点の数。 ・ 面や辺の平行, 垂直関係。 ・ 面のつながり方, 辺のつながり方に着目し, 平面図形との関係, 立体図形の特徴を知らせる。 ・ 上記の考えをもとにした展開図の理解。 ○ 空間における位置の表わし方。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 空間に, いろいろの大きさの直方体を想像できる。 ・ 三次元の点の位置決定には, 3 つの要素が必要である。(実践例後掲)
<ul style="list-style-type: none"> ○ 広さを数で表わすことができることを知らせ, 面積の概念を理解させる。 (面積) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 単位面積によってうめつくされることから, 平面図形の広がり意識させる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 面積の概念の理解。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 長方形, 正方形の面積を求める公式の意味の理解とその活用。 ・ 面積を表わす各種の単位についての理解。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 単位体積によって立体の大きさを求められることから, 体積の概念を理解させる (体積) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 単位体積の数によって大きさを表わすことができることから, 三次元的な空間を意識させる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 体積, 容積の概念の理解。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 体積の単位としての相互関係。 ・ 直方体, 立方体の体積の求め方と公式。 ・ 体積を液体におきかえてはかること。

小学校5年

題材のねらい	空間概念育成の観点	主な指導内容
<p>○ 基本的な平面図形について、包摂関係に着目し考察できるようにして理解を深める (四角形・三角形)</p>	<p>○ 図形構成要素のうち、ある条件を一定にし、他を変化させて考えるなど図形を動的な見方をさせることにより、平面空間の広がりを意識づける。 ○ 三角形の外部空間を内部空間との関連でとらえる。</p>	<p>○ 各基本図形が、ある要素を変化させることにより、連続的に形を変え、無数に描けること。 ○ 連続的な形の変化の特別な場合としての正三角形や正方形という見方。 ○ 三角形相互の包摂関係をまとめる。 ○ 四角形相互の包摂関係をまとめる。 ○ 三角形の内角の和。 ○ 三角形の外角と内対角の和の関係。 ○ 三角形の内角の和を知って、多角形の内角の和を考へること。</p>
<p>○ 基本的な図形について、その面積が計算で求められることを知らせ、求積公式を理解させる。 (図形の面積)</p>	<p>○ 平面の広がりには垂直に交わる二本の線分の長さに関係があること。 ○ 図形の外部に高さがくるときや等積変形を通して、図形の内部から外部へ着目させ平面の広がりを意識づける。</p>	<p>○ 平行四辺形、台形、ひし形、三角形の面積の求め方。 ○ いずれも直交する二本の線分の長さによって、その面積が決定されること。 ○ 図形の外部に高さが表わされる場合についての求積。 ○ 高さの平行移動と等積変形 ○ 等積変形によって、もとの三角形と同じ面積の三角形が無数に描けること。 ○ 多角形を、三角形に分割して考え、その面積を求めること。</p>
<p>○ 円周率を知らせるなど、円についての理解を深め、その求積方法を発見させ、理解させる。 (円と正多角形)</p>	<p>○ 曲線で囲まれた図形についても、その面積は基本単位(方眼)の数を求めればよいことにより、平面は基本単位でうめつくされることを知らせる。 ○ 円を平行四辺形に変形する時の無限、極限の考え方の経験を大切にする。 ○ おうぎ形、正多角形の作図を通して、軌跡交点法による点の位置決定の条件を理解する。</p>	<p>○ 円周率の意味。 ○ 円周の長さの求め方。 ○ 円の面積の求め方。 ・ 方眼の数から ・ 平行四辺形に変形して ○ おうぎ形や中心角の意味。 ○ 中心角とおうぎ形の弧の長さとの関係。 ○ 弧の長さの求め方。 ○ 中心角とおうぎ形の面積との関係。 ○ おうぎ形の面積の求め方。 ○ 正五角形、正六角形のかきかた。 ○ 平面上の点の位置は、その点と基準となる線分の一方向の端点とを通る直線が線分となす角、および、その2点間の長さ、の2量によって決定すること。</p>
<p>○ 線対称、点対称の意味を知らせ、1つの図形、または2つの図形の相互関係を対称の観点からは握し、構成できるようにする。 (線対称・点対称)</p>	<p>○ 線対称移動と点対称移動の相違から空間を前提として考える経験を与える。 ○ 図形の移動から、平面の広がりを意識させる。 ○ 対応する点の位置決定に関して、平面上に無数の点を意識させる。</p>	<p>○ 線対称移動は、三次元空間をかりた移動、点対称移動は二次元空間の移動であること。 ○ 図形だけを取り出した操作から、図形を含む平面の移動と考えること。(実践例後掲) ○ 線対称の位置にある図形の対応の規則。 ○ 線対称の位置にある特別な場合として線対称形。 ○ 点対称の位置にある図形とその対応の規則。 ○ 点対称の位置にある特別な場合として点対称形。 ○ 図形の対称性を認め、この観点から図形を分類すること。 ○ 線対称形の線対称移動。</p>

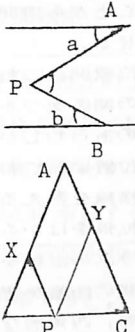
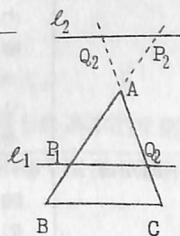
小学校6年

題材のねらい	空間概念育成の観点	主な指導内容
<ul style="list-style-type: none"> ○ 基本的な立体図形(柱体, すい体)を構成している要素について理解させ, その要素間の関係をとらえさせる。 ○ 柱体, すい体の展開図から, 側面の形, 側面や底面のつながり方を理解させる。 <p style="text-align: center;">(立体)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ○ 立体図形について, ○ 立体の構成要素の位置関係を, 構成要素の形やそのつながりとの関連でとらえさせる。 ○ 立体を展開図などに表わすことから, 二次元の平面と三次元空間の関係を意識づける。 ○ 立体図形の切断などを通じ, 立体の内部と外部についての見方を育てる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 柱体(角柱と円柱)について理解させる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 底面と側面の形や数, 頂点や辺の数, 高さ。 ・ 見取り図のみかた, かきかた。 ・ 2底面の相互関係。(平行・合同の関係) ・ 角柱の底面と側面の関係。(垂直の関係) ○ すい体(角すいと円すい)について理解させる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 底面と側面の形や数, 頂点や辺の数, 高さ。 ・ 見取り図のみかた, かきかた。 ○ 柱体, すい体の切り口と分割された図形を理解させる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 底面に垂直な切り口で切った場合の切り口の形。 ・ 底面に平行な平面で切った場合の切り口の形とその大きさ。 ・ 分割された立体の見取り図。 ○ 立体の分類について理解させる。 ○ 展開図のみかた, かきかたを理解させる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 角柱, 角すいの底面の形やそのつながり方。 ・ 円柱の側面の展開図が長方形になることと, 底面とのつながりかたや長さの関係。 ・ 円すいの側面の展開図がおうぎ形になることと, 底面とのつながりかたや長さの関係。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 柱体の表面積, 体積の求めかたを理解させる。 ○ 立体を正確に平面上でとらえる手法として投影図の表わし方を理解させる。(立体) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 曲面と平面との異同などの関係から空間の意識を深める。 ○ 立体図形を平面的に表わす手法としての投影図から, 三次元空間と二次元平面の対応関係に気づかせその異同を理解させる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 立体を構成する面を平面図形にする必要性を理解させ, その表面積を求めさせる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 曲面も平面に展開することによって面積を求めうること。 ・ 底面積, 側面積の求め方。 ○ 立体の体積の求め方。 ○ 投影図にあらわす意味とその利点を理解させる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 立面図(正面図), 平面図から立体の弁別。 ・ かんたんな立体の立面図, 平面図のかきかた。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 平面図形の移動と合同の関係と移動の特別な場合に立体図形ができることを理解させる。(図形の見かた) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 合同変換につながる図形の平面上での移動を分類する。 ○ 図形の三次元空間での移動による立体図形の構成を理解させる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 合同な2つの図形は, その一方を平面上で平行移動, 対称移動(線対称, 点対称)することによってできることを理解させる。 ○ 回転体について理解させる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 回転によってできる立体図形 ・ 回転体の軸に垂直な平面で切った切り口の形 ・ 回転体の軸を含む平面で切った切り口の形
<ul style="list-style-type: none"> ○ 図形の拡大, 縮小について理解させる。 ○ 縮尺の意味と使い方を理解させる。(図形の拡大, 縮小) 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 相似の概念の理解から, 図形の要素間の対応についての見かたを育てる。 ○ 図形の拡大, 縮小から平面の広がり意識づける。 ○ 長さ(次元)と面積(次元)の違いに気づかせる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 同じ形の図形(相似形)について理解させる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 相似形の弁別 ・ 相似条件の抽出 <ul style="list-style-type: none"> ・ 対応する角の相等, 対応する辺の長さの比一定 ・ 図形の拡大, 縮小のしかた(実践例後掲) ○ 縮尺の意味と使い方を理解させる。 <ul style="list-style-type: none"> ・ 地図上の距離 ・ 簡単な面積比

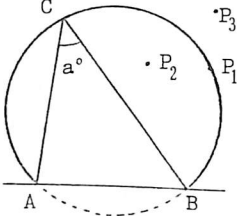
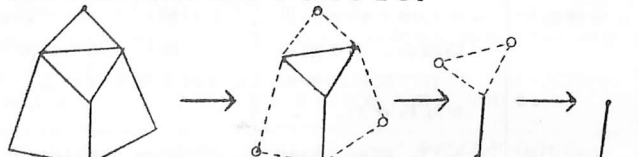
中学校1年

題 材	空間概念育成の観点	主 な 指 導 内 容
<ul style="list-style-type: none"> ○点・線・面 	<ul style="list-style-type: none"> ○直線や平面についての概念を明らかにし、直線・平面の位置関係を考察させることによって空間認識を高める。 	<ul style="list-style-type: none"> ○平面上の直線の意味 ○2つの平面の位置関係 ○空間における2直線の位置関係 (実践例後掲) <ul style="list-style-type: none"> ・同一平面上にあるもの [平行 交わる ・同一平面上にないもの・ねじれの位置 ○図形間の距離の意味を知る。
<ul style="list-style-type: none"> ○円と直線 ○球と平面 	<ul style="list-style-type: none"> ○円の弧や弦と中心角、円と直線の関係の学習から球についての理解を深めるなど、空間と図形の関係や内部、外部などの意識を高める。 	<ul style="list-style-type: none"> ○円と直線の位置関係 ○回転体としての球の理解を深め、球と平面の位置関係について理解する。 ○球は空間内で、1つのきまった点からの距離が一定である点の集合であるという見かたを理解させ、球の内部、外部の意味を明らかにする。
<ul style="list-style-type: none"> ○移動 (運動) 	<ul style="list-style-type: none"> ○図形を移動という立場から統一的に見ていくことと、図形を移動によって構成されるものと見る見方を養い、空間の広がり認識を高める。 	<ul style="list-style-type: none"> ○図形の移動の意味 ○平行移動 ○平面上の図形の回転と点対称移動 ○線対称移動 ○空間における点・線・面の移動によってできる図形 点→線→面→立体 ○条件を満たす点の作図
<ul style="list-style-type: none"> ○合同 	<ul style="list-style-type: none"> ○移動による図形の不変性から合同を学習し、変換の素地を養う。 	<ul style="list-style-type: none"> ○図形の移動についてのまとめから、合同の概念を理解させ、変換の考えから空間を認識させる。 <div data-bbox="560 1185 1102 1391" style="text-align: center;"> </div>
<ul style="list-style-type: none"> ○正多面体 	<ul style="list-style-type: none"> ○多面体と回転体を対比しながら、空間における立体図形の構成についての認識を高める。 	<ul style="list-style-type: none"> ○母線の考えや面の移動による立体図形の構成について理解する。 <ul style="list-style-type: none"> ・母線による図形の構成と回転体。 ・単一閉曲線に囲まれた平面をその平面に垂直方向に移動してできる柱体 ○正多面体について理解し、その定義と種類を知る。
<ul style="list-style-type: none"> ○求 積 	<ul style="list-style-type: none"> ○図形を数量的にとりあつかうことによって空間の広がりを量的にとらえられるようにする。 	<ul style="list-style-type: none"> ○平行四辺形・三角形・台形・円・おうぎ形などの面積。 ○円周と弧の長さ。 ○角柱・円柱・角すい・円すい・球の体積と表面積 ○面積を変えないで多角形の形を変える。 ○面積公式の相互関係

中学校2年

題材	空間概念育成の観点	主な指導内容
<ul style="list-style-type: none"> ○ 三角形の外心の位置 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 外心が三角形の内部だけでなく、辺上や外部にもあることを知らせ、外部空間を意識させる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 三角形により平面が内部と外部の2つの部分に分けられる。 ○ 外接円, 外心の定義とその書き方, 求め方。 ○ 外心の位置 (鋭角三角形なら内部, 直角三角形なら斜辺上, 鈍角三角形なら外部) ○ 外部空間を利用する例 三角形の高さ, 内角の和の求め方, 外角の利用。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 図形の内部と外部のちがいを 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 図形の内部において発見した性質を, 外部にまで発展させてみることにより, 外部空間の存在を認め, 広がりを認識させる。 (実践例後掲) 	<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>$\angle P = \angle a + \angle b$</p> <p>$(AB = AC)$ $(PX \parallel AC)$ $(PY \parallel AB)$</p> <p>$PX + PY = \text{一定}$</p> </div> <div style="margin-left: 20px;"> <p>この点Pが平行線間外へ出たときに, $\angle P$の大きさがどうなるか。</p> <p>この点PがBCの延長上にきたときに, $PX + PY = \text{一定}$が保たれるか。保たれないとしたら, どうなるか。</p> </div> </div>
<ul style="list-style-type: none"> ○ 三角形の相似 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 相似, 相似の位置の考え方を理解し, 空間における位置の認識と変換への足がかりをつくる。 ○ 面積比, 体積比を通して, 空間の広がりの特徴を認識させる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 相似の定義とその性質 ○ 相似比の定義と合同との関係 ○ 相似の位置, 相似の中心 ○ 相似条件 ○ 形を変えないという観点に立つ図形の変形であること。 ○ 相似形の面積比は, 相似比の2乗に等しい。 ○ 相似形の体積比は, 相似比の3乗に等しい。 ○ 一次元空間, 二次元空間, 三次元空間の広がりちがいを。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 線分の内分と外分 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 分割点がある場合から, 延長上にある場合へ発展させて, 広がり認識とその統一的把握をはかる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 内分の定義 ○ 外分の定義 ○ 三角形と比例への応用 一辺に平行な直線が, 三角形の他の辺上を通る場合と, 延長上を通る場合とを統一的にとらえることができること。 
<ul style="list-style-type: none"> ○ 等積変形 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 平行線の特徴の再認識と, ある観点に立つ図形の変形を知らせる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 平行線による平行四辺形の等積変形 ○ 平行線による三角形の等積変形 ○ 面積を変えないという観点に立つ図形の変形であること。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 図形の変換 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 平行, 回転, 対称移動を合同変換として統一的にとらえ, 相似変換と比較することにより変換についての基礎概念を育てる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 点の変換 (点は点に, 1対1対応) ○ 線の変換 (線は線に, 1対1対応, 両連続) ○ 合同変換 平行移動 回転移動 対称移動 ○ 相似変換 ○ その他の変換 ○ 合同変換, 相似変換はどんな観点に立つ図形の変形であるか。

中学校3年

題 材	空間概念育成の観点	主 な 指 導 内 容
<p>○ 弓形の内部 ・外部</p>	<p>○ 円周角との関係において、点が円の周上から円の内部外部にある場合にまで発展させ、空間の広がりについての認識をはかる。</p>	<p>○ X : 弓形の弧 ACB 上の点の集合 Y : 弓形の内部にある点の集合 Z : 弓形の外部にある点の集合 とすると、点 P について $P \in X$ のときは $\angle APB = a^\circ$ $P \in Y$ のときは $\angle APB > a^\circ$ $P \in Z$ のときは $\angle APB < a^\circ$ であることから空間の広がりをつかませる。</p> 
<p>○ 2円の位置関係 (2球の位置関係)</p>	<p>○ 2円(2球)の位置関係から、空間における位置の認識と広がりの特徴の理解を深める。</p>	<p>○ 2円の位置関係において、2円の半径 r, r' と中心間の距離 d の関係をつかませることによって、空間における位置関係のあらわしかたや広がりをとらえ方を意識つける。 ○ 2球の位置関係においても、同じことがいえることや、その共通接線を考えることにより、二次元空間から三次元空間への拡張をはかる。</p>
<p>○ 座標空間内の距離</p>	<p>○ 座標空間内で、距離や面積を数量的にとりあつかうことから、空間の広がりについての認識を深める。</p>	<p>○ ピタゴラスの定理を利用して、座標空間内で ・ 2点間の距離を求めること ・ 三角形、四角形などの面積を求めること ・ 長方形、直方体の対角線の長さを求めること によって、数量的に空間の広がりをとらえさせる。</p>
<p>○ 閉曲線 (閉曲面)</p>	<p>○ 線のつながりかたに着目した図形の見方から、距離空間以外の空間に着目させる。 ○ 閉曲線(閉曲面)の内部、外部を理解させることによって、空間の広がりについての認識を深める。</p>	<p>○ 図形を、つながりかたが同じという観点から類別させ、ユークリッド空間からはなれた図形の見方を養う。 (閉じた線と開いた線の区別など。)(実践例後掲)</p> <p>○ 閉曲線(閉曲面)のもつ性質を ・ 線(面)の分割 ・ 内部と外部 などから考察させることによって、空間の広がりについての認識を深める。</p>
<p>○ 一筆がき</p>	<p>○ 一筆がきができる図形とできない図形とを識別させることにより、つながりを意識させる。</p>	<p>○ いくつかの線状図形について、一筆がきができる図形と一筆がきのできない図形との識別を、線のつながりかた一閉曲線の性質の発展とし、とらえさせる。</p> 
<p>○ オイラーの定理</p>	<p>○ 線状図形、多面体などの点、線、面の数の関係に着目させることによって、図形の構成から空間の認識を深める。</p>	<p>○ 点の数 t、線の数 s、面の数 m の関係を調べることによって線状図形では、$t - s + m = 1$ 多面体(閉曲面)では、$t - s + m = 2$ であることを発見させ、これは形や大きさに関係なく成り立つ性質であることを理解させるとともに、図形の構成にも目を向けさせる。</p>

V 実践例

小学校第1学年 実践例

題材 線でかこまれたかたち(1)

1 指導系統に基づいた本題材のねらいと問題点

1年生における図形指導について指導要領では次のように述べている。

ものの形についての観察や構成などの操作を通して図形や空間について基礎的なことを理解させる。

ア. ものの形やその特徴を認めたり言い表わしたりすること。

イ. 図形を考察するときに用いる操作などに着目すること。

ウ. 左右・上下などの方向や位置に関する言葉を知り、それらを正しく用いること。

この中で、空間について基礎的なことを列挙すると、1年生では

- 図形の位置や方向がかわっても形が同じと認められる。
- 点、線、面などの位置、方向を言い表わすことができる。
- 物の形は、いろいろな条件によって変化していくことに気づき、形の連続的な変化と、図形を変化させたり構成するときの操作ができるようになる。
- 具体的な物の形からとらえた概形をもとにして、図形を構成し図形のもつおもしろさや、美しさが理解できる。
- 空間を線でしきると形ができることを知って、形を書くことができる。

といった内容もっている。

ここでの学習で得た図形や空間についての基礎的な理解は、次のように発展していく。

- 第2学年では、三角形、正方形、長方形、直角三角形などの用語を理解する。さらに基本的な図形の特徴を明らかにしたり、展開図などをなかだちとして、平面図形と立体図形の相違や関係に着目する。
- 「重ねる」「まわす」「ずらす」「うらがえす」などの動的操作は、4年生の合同、5年生の対称な図形、6年生で回転体の学習に図形考察の操作として直接つながる。

このような指導系統上にあたる本題材は、次のようなねらいを持っている。

図形を考察するときに大切になる操作を構成活動を通して身につけさせる。

大きさや、位置や、物体の種類などに関係なく図形を認める時、構成要素に着目した見かたができる。

このねらいに到達するための学習指導では、次のことが問題となる。

- 位置や方向、質にとらわれず、図形を認めたり、ひごをつないで作った形の中に基本的な図形を認めるとき、要素の数やつながりに着目した見かたをさせるには、どう指導するか。
- 色板を用いて図形を合成したり、分解する操作を行なうとき、点、辺、面のどこをもとにして、

空間をどう移動させるかを意識させるには、どうするか。

- 色板や、ひごを用いて図形を構成していくとき、要素の数に着目して構成させるだけでなく、辺のつながり方や、位置関係からとらえた構成をさせるには、どうするか。

2 指導の構想

(1) 図形についての指導は、本題材が最初である。この導入には、日常生活の中にあるものの形の中から基本的な図形を認めさせること、次に児童のことばで表現させたり、色紙を折ったり切ったりして形を作る遊びの中から基本的な図形を認めさせていく方法が多くとられている。

このような方法は、1年生の発達段階から考えられたものであろうが、ややもすると遊びに終って、図形を構成している線のつながり方や図形的位置関係についての見かたが落されてしまいがちである。

そこで、空間構成を中心にして、4時間の学習指導を計画した。

第一次 ○いろいろな線で形を書く遊びの中から、直線と曲線を区別させる。

- 線の数、つながりかた、大きさなどに着目させながら図形を観察させて、そのものの形を、ことばで表現させる。

第二次 ○長方形や正方形の紙を分割するなどの操作を通して、2つあるいは4つの合同な直角三角形、長方形、正方形を作る。

- 合同な直角三角形、長方形、正方形を組み合わせて大きな直角三角形、長方形、正方形を構成する。

第三次 ○色板で図形を構成する時、「ずらす」「まわす」「うらがえす」など図形を考察する時に必要を操作に気づく。

- つながりに着目して図形を分類できる。

第四次 ○辺の数や大きさ、辺や面のつながり、角の形、数などの異同を対応させて、色板やひごで形を構成する。

- 図形の特徴を要素やつながりで見ると学習のまとめをする。

(2) 本時の指導の構想

色板で図形を構成する時、具体的に示された形を模写的に、はしから1つずつ並べて作ったり、試行錯誤的に動かして偶然に形ができてしまいがちである。

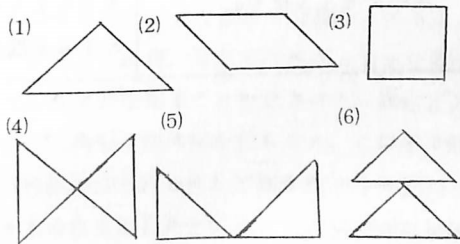

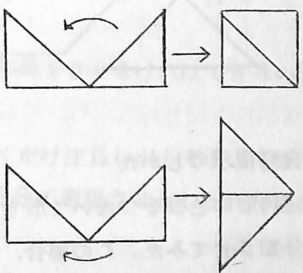
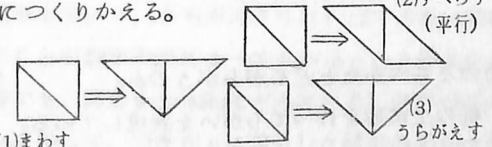
本時は、「ずらす」「まわす」「うらがえす」操作を、平行移動、回転移動、対称移動の基礎となるよう意識づけた指導をしたい。

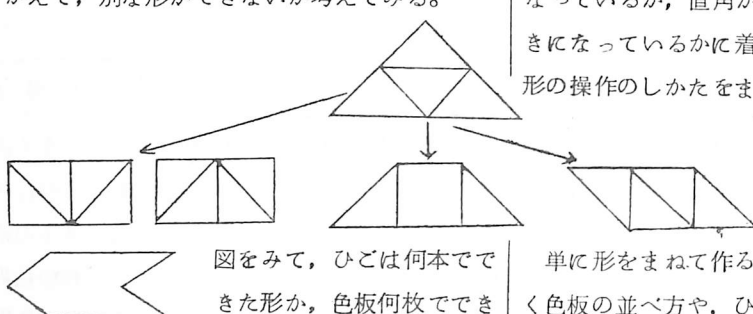
そのためには、辺のつながりに着目した図形の見かたをさせる。どの頂点や辺を、どの方向に移動させたのか、どの辺と辺がつながってできた形なのか、1年生なりに、操作や言葉で表現させることを大切にしたい。

また、辺のつながりかたや、図形的位置関係、要素から、全体的な見通しをつけて、手ぎわよい構成法を見つけていくことも考えさせたい。

3 指導例

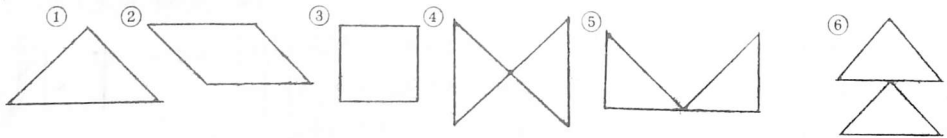
- (1) 題材 いろいろならべ
- (2) ねらい つなかりに着目した図形の構成活動を通して、移動や回転など図形を考察する時に必要な操作に気づかせる。
- (3) 展開

指導内容	学習活動	指導上の留意点
<p>本時の学習内容をつかむ。</p> <p>つながりを分類する。</p>	<p>絵を見て直角二等辺三角形の色板8枚でできていることを見つける。</p> <p>2枚の色板でできた形をみて、色板のつながりかたのちがいをしらべる。</p> 	<p>たんなる遊びにならないために、本時は何を使ってどんな学習をするのか明確にする。</p> <p>2枚の色板で構成された6個の図形の色板の並べかたのちがいについて、へりとへりがつながる、かどとかどがつながる、へりとかどがつながる、など接合のしかたについて話し合わせる。この場合、あわせる、つなぐ、くっつく、かさなるなどの言葉の整理に留意する。</p>
<p>辺と辺がつながると基本図形ができる。</p>	<p>下図のように、角がつながっている図形を移動させて、(シート上をすべらせて)正方形、直角二等辺三角形をつくる。</p> <p>どんな形ができたか、どことどこがつながっているか発表しあう。</p> 	
<p>色板をおきかえて、ずらす、まわす、うらがえすなど図形を変形させる操作</p>	<p>二枚の色板のうち一枚だけ動かして、ほかの形につくりかえる。</p> 	<p>点と点から辺と辺をつなぐと、きちんとした形になるというように操作を通して気づかせる。</p> <p>試行錯誤的に動かして、偶然に形ができるのではなく、もともとなる形をきめて、その色板の直角がどんな向きになっているか、どの辺と辺をつないだのか</p>

<p>操作を中心にして学習をまとめる。</p> <p>次時の学習の問題をもたせる。</p>	<p>どう動かして形を作ったのか動かし方を発表する。</p> <p>4枚の同じ色板でできた形から、1枚だけおきかえて、別な形ができないか考えてみる。</p>  <p>図をみて、ひごは何本でできた形か、色板何枚でできた形か考えてみる。</p>	<p>に着目させながら作らせる。</p> <p>どの方向に、どう動かしたのか、ずらす、まわす、うごかす操作について話し合わせる。</p> <p>色板の一番長いへりは、どうなっているか、直角がどんな向きになっているかに着目し、図形の操作のしかたをまとめる。</p> <p>単に形をまねて作るのではなく色板の並べ方や、ひごのつなぎかたをくふうして形を作ろうとする意欲を持たせる。</p>
---	--	---

4 結果の考察

(1) つなぎについて



ア資料提示のしかた

三角形の色板をつないで形を作るという問題意識をもたせうえて上図の図形をつなぎのちがいで分類させてみた。この場合、③は四枚の三角形でできた形、二枚でできた形など色板の枚数に目がいき、つなぎりに分類することは困難であった。「2つの形でできているとわかるのは」というような発問のしかたにも無理があったと思うが、つなぎりが、辺と辺、角と角、辺と角の3つにはっきり分類できるように図形を提示すればよかったと思う。

また、図⑥は辺と角のつなぎりで異なったものなので、まず、辺と辺、角と角の2つに分類してから他のつなぎりとして考えさせるのも一つの方法であろう。

イ教師の発問

- T. ①②③のならべかたと、④⑤のならべかたとどこがちがうのか。
- C. (言葉で表現できないため、机の上に形を作ってちがいを表現している。)

- T. ②と⑥はどちらがうのだろう。
 C. ②と⑥は形がちがう。(②はかんたんに作れない。)
 T. ②と⑥のどこがちがうのか。
 C. ⑥はこんなふうに(OHPの前で操作)ひらいている。
 T. はなれているのか。
 C. かどとかどがくっついている。②はへりとへりがくっついている。

2種類の図形をみせて、どこがちがうかという発問は、そのちがいを、つながりだけでなく、形、大きさなどいろいろな面から見られる。そのため子どもはどう表現したらよいかわからない。三角形の色板2枚でできる仲間、つながっている仲間、ひらいている仲間、でこぼこのある仲間など、子どもの持っている多くの見方を引きだしてから、つながりかたによって分類していけば効果があったのではないかと思う。

(2) 移動について

ア回転移動と平行移動の区別

不動点をきめて回転させることと、たて横に平行移動させることを区別させるため、図⑥を90度回転させて、正方形を作らせた。この時、はじめつながっていたのは角と角で、回転することでへりとへりがつながり、きちんとした形が出来ることを見させた。次に正方形からできるだけ簡単な動かしかたで、へりとへりをつないで三角形や四角形を作らせた。この中で回転移動にも気づかせたいと思ったのだが子ども達は、二枚の色板をばらばらにして形を作り、移動のしかたに着目する事が少ない。子どもは弧をえがいてずらしたものをまわしたといい、三次元空間を移動させたものと、たて横に移動させたものをずらすとしている。回転移動と平行移動の区別のできない子が多いという事は、1年生にとっては、その取扱い方について考察すべき1つの観点を示唆しているとも思える。

このような意味から、子ども達が平面図形を構成していくとき、回転移動をさせなければできない図形を与え、それについて考えさせくふうさせることが大切になると思う。

また移動をことばで表現させることはむづかしいが、できあがった形にだけ注目しがちな子どもを、できあがった形が同じでも作る過程がちがうことを意識させ、それらを十分に表現させることが大切と思う。

イ対称移動について

三角形の色板をひっくりかえすとか、うらがえすなどの言葉が、子どもの操作の中から出てきたが、三角形の色板が三次元の空間を移動したものであると考えることはむづかしかった。これは、直角二等辺三角形を用いたので、平行移動させても形ができてしまったり、うらがえしたことがはっきりしないので操作していながら気づかないなど混乱がおきた。

ここで直角不等辺三角形を用いて、うらがえさなければできない図形を作ったり、TP板に数字を書き入れて、うらがえしたことが数字の逆によってわかるという教具を用意すべきであった。

以上1年生の図形指導でも、図形を全体的にとらえたり、遊びの中で図形を構成するだけでなく、教具の工夫や発問のしかたを工夫して、つながりに着目した図形の見かたをさせる事が大切と思った。

小学校第2学年 実践例

題 材 正方形と長方形

1 指導系統に基づいた本題材のねらいと問題点

本題材に関連して 指導要領には、次のように示されている。

(3) 事物についての観察や構成などの操作を通して、図形や空間の概念を漸次理解させる。

C. 図 形

(1) ものの形や位置などについて考察することができるようにするとともに、基本的な平面図形の概念を漸次理解させる。

ア. 三角形、四角形などについて、図形を構成する要素(頂点、辺など)を知ること。

イ. 正方形、長方形および直角三角形などの基本的な図形を知ること。

用語； 直線、三角形、四角形、正方形、長方形、直角三角形、直角、辺、ちょう点、面

本題材を指導の系統からみた場合、次のようになる。

- | | |
|----|--------------------|
| 1年 | しかく、さんかく、ながしかく |
| 2年 | 長方形、正方形、直角三角形 |
| 3年 | 二等辺三角形、正三角形、三角形の作図 |
| 4年 | 四角形、三角形、合同、作図 |
| 5年 | 対称、三角形、四角形の包摂関係 |
| 6年 | 図形の拡大・縮小 |

1年生では、基本的な図形を観察したり、操作をとおして構成したりして頂点や辺など図形の構成要素にも着目しながら、児童の日常のこたばを用いる程度で、基本的な図形を理解する基礎的な経験を与えられている。

2年生の空間概念育成の指導内容は、平面上の図形の位置を広がりの中でとらえるという具体的問題の処理とともに、基本的な平面図形や立体図形について、構成要素の数や関係などの認識から、図形を構成する立場で図形をとらえていけるようにすることであろう。その際、2直線が交わることなどの意味を具体的経験を通して考察する態度を育てる必要がある。

本題材の最大のねらいは、簡単な平面図形を分類する観点を考えたり、それにしたがって分類することにより、基本的図形の定義を知り、性質を調べることである。

1年生では、平面図形の全体的な特徴に目をむけさせ、2年生になって基本的図形を構成する要素について取り扱うわけである。この題材を扱う上で、前記のねらいを達成するためには、どんな問題点が予想されるか考えてみたい。

- (1) いろいろな条件(観点)を与え、用語等の指導から図形の特徴や定義を理解させ、図形を分類させる指導法も考えられるが、児童が個々の観点を図形を分類し、その観点をお互いに出し合い、考

え合うことにより、図形の特徴や性質の理解がより一層深められると考えている。はたして、どちらが効果的なのであろうか。

- (2) 用語の指導は、いつ、どこですべきか。
- (3) 児童に分類、弁別させるために与える図形は、どんな図形を提示すべきか。
- (4) 空間概念育成のためのどんな要点をどう扱おうと、空間概念が育成されていくのか。

以上、どのような図形で、どのように扱い、どのような指導、助言を与えたならば、空間概念の育成がなされ、より効果的に、基本的図形の定義を理解させ、性質を知らせることができるかが、大きなねらいでもあり、また、問題点となってくると思われる。

2 指導の構想

(1) 題材の構想

この題材の指導過程として、先の問題点でも述べたが、2通りが考えられる。

空間概念の育成を考え、効果的学習を願うとき、心理的に考えるならば、児童の誤りやすい価値あるつまづきを指導の根底にすえて、仲まわけの観点を発見させるように設定した児童の話し合いによる葛藤の場を通しての意欲的な学習展開が考えられる。したがって、観点を与えるような用語の説明からの指導はさけ、児童自らの観点で図形を分類させ、児童の手で、図形の特徴を見つけ出し、その観点で分類や弁別することができるような、意欲的な学習の展開を考えて、図形の分類、弁別から指導し、これらの観点を活用した作図指導をする過程をとった。

これらのねらいを達成するため、指導計画を次のように立てた。

小 題 材	時数	指 導 内 容
開いた線・閉じた線	2	・開いた線・閉じた線の特徴
三角形・四角形	2	・三角形・四角形の定義・特徴 ・用語「直線、辺、ちょう点」
三角じょうぎ	2	・直角三角形 ・直角の意味
長方形	2	・長方形の定義、性質
正方形	1	・正方形の定義、性質
正方形・長方形のかき方	1 (本時)	・方眼紙を使っての正方形、長方形のかき方
まとめ	1	・平面図形の弁別 etc

(2) 本時の構想

きめられた正方形・長方形を方眼紙を使ってかいていく中で、四角形(正方形・長方形)のかき方を理解させていく。

この学習をすすめていく中で、今までの学習内容が、次のように生かされてくることを願っている。


- 閉じた形である。—— 辺がすべてつながっている。
- かどはすべて直角—— 方眼紙の交点の直角にあわせてかく。
- 頂点が4つある。—— ひとつ決定すると他の3つもきまってくる。

向かいあった辺の —— むかい合った辺が平行・等長となる。
 長さが等しい。

学習のすゝめ方は、各自の作図から、そのかき方の話し合いを通して、どんなかき方があるか。どうしても忘れてならないこと(辺の長さ、かどが直角など)などから、長方形・正方形の構成要素を再確認させ、空間認識を高めていきたい。

3 指導例

- (1) 題材 正方形と長方形のかき方
- (2) ねらい 方眼紙を用いて、正方形・長方形をかくことができるようにする。
- (3) 展開

指導内容	学習活動	指導上の留意点
<p>○課題提示</p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>○これと同じ正方形がかけるかな。</p> </div> </div> <p>○方眼紙を使って、正方形のかき方を考えさせる。</p> <p>○正方形の構成要素の再確認</p> <p>○方眼紙を使って、長方形のかき方を理解させながら、正方形・長方形のかき方を理解させる。</p> <p>○方眼紙の大きさによって、かける長方形、かけない長方形のあることをわからせる。</p> <p>・用紙 10 cm × 10 cm 長方形 12 cm × 7 cm</p>	<p>○学習課題をつかむ。</p> <ul style="list-style-type: none"> • かける。かけそうだ。 <p>○正方形のかき方を考える。</p> <p>○方眼紙に正方形をかく。</p> <p>○自分のかいた方法を発表し、話し合う。</p> <p>○かき方を通して、もう一度、正方形がどんな形か考える。</p> <p>○いろいろな方法で長方形をかき、どの方法でかいても同じ結果になることを確かめる。</p> <p>○長方形が方眼紙にかけないわけについて考え、話し合う。</p>	<p>○かかれた正方形を見て考えさせる</p> <p>○自分なりの方法でかく場合、どこに目をむけているかを机間巡視などでおさえ、いろいろな方法をわからせるようにしたい。</p> <p>○話し合いから、正方形の構成要素と長さ、方向によってきまる正方形を再確認させる。</p> <p>○この中から、かきやすい方法、確実にかける方法をつかませていきたい。</p> <p>○最初の頂点のきめ方のたいせつさをわからせる。</p>

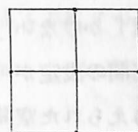
<p>○まとめ</p>	<p>○正方形・長方形を方眼紙にかく場合のかき方について話し合い,まとめる。</p>	<p>○方眼紙の大きさをみるための方法についてもおさえる。</p>
-------------	--	-----------------------------------

4 結果の考察

(1) 与えられた図形を与えられた空間の中に位置づけること。

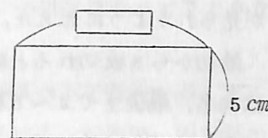
与えた方眼紙(8cm×8cm)の中に正方形(一辺4cm)を位置づけることは容易である。空間の広がり意識して,第1の頂点を決定している。

しかし,与えた方眼紙が8cmの正方形であったため,右のように区切って,4つできたという児童がいた。これから考えられることは,「かける」ということと「切り取れる」ということを混同している児童が少数いるということ,最初に与える方眼紙の大きさと,何をするのかを明確にすることがたいせつである。



(2) 与えられた図形のおかれていた空間の意識について

児童は直観的に位置を意識しているが,これを数学の舞台の上で意識させていくことがたいせつなことで,右のような図形を示して,「かけるかな」「辺の長さがわからないからかけない」「では辺の長さを12cmとすればどうか」「かける・かける」と長方形が2辺の長さの決定により,決まってくることを理解を深め,そのしめる位置も意識してくる。



(3) 方眼紙に正方形をかく方法を通して,

○方眼紙のますを1, 2, 3, 4とかぞえて頂点(・)を決めている者

○辺の線はじょうぎを使っている者と使わぬ者と両方がある。

○方眼紙のますに・を1, 2, 3, 4とつけて,4つの頂点を決めてから線で結んでいる者

○なるべく用紙の上の方,いいなと思うところを指でおさえておいて,頂点4つを決めてから線を引く者

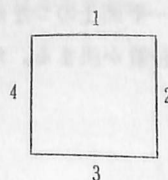
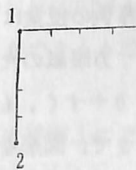
○ひとつの頂点を決めてから辺の長さを区切りかぞえてから辺の線をひいていく者

○辺の線をひきながらかぞえて4でとめ,順に結んで閉じている者

○かき方としては大きく3つの型(4頂点,頂点から辺を順に,辺の長さで順に)にわけられる。

三角形・四角形(任意)の作図をしているし,概念的に理解しているせいか,容易にかくことができた。

かき方の話し合いを通して,正方形の概念理解のまとめをはかったわけだが,ねらったことでは,閉じている形(つながり),頂点が4つ,辺の長さが全て同じな



どは、理解されていたが、話し合いの中に、直角、対辺平行などの意識がでてきていなかった。

角、対辺平行などの意識を想起し、定着させるには、白紙上での作図が適当と思えるが、2年生では無理(角のかき方が未習)で、方眼紙での作図の中で意識させるくふうを考えていかなければならない。

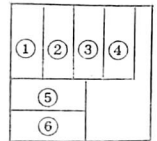
(4) 与えられた図形の大きさにより、それにあった空間の設定

一辺が9cmの正方形の方眼紙を与え、長方形(12cm×7cm)をかけるかとの問いかけに「方眼紙の横が短かすぎてかけない」「12cmより短かいからかけない」などから「方眼紙の横を長くすればかける」の発言もでてくる。

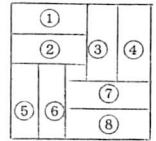
また「たて3m、よこ5mの長方形をかくとしたら……」の問いかけに対しては「黒板にかける」「天井ならかける」「ゆかにかける」などと反応し、「では、たて50m、よこ70mの長方形なら……」に対しては「かけない」「体育館ならかける」「グランド」「空」……など、与えられた図形の大きさにあった空間の設定が可能である。

(5) 与えられた空間を区切る能力

次の時間、一辺9cmの正方形(方眼紙)を与え、辺の長さが5cm、2cmの長方形をできるだけたくさん切り取ることは、くふうと今までの学習のあとが見られたように思えた。



最初から8枚切れると線を入れた者は34名中8名、6枚しか切れないとした者は25名、最後まで2~5枚位の者が1名であり、8名の者について話を聞いたところ、6枚しか取れないが、残る面が広くあるので、きちんと並べずに取ってみたら8枚とれた。と試行錯誤的な思考方法と空間をうめていこうとする方法とから発見できたのであろう。



(6) 本題材の指導を通して

児童は直観的に位置をとらえているし、空間の広がりの中に、大きさを見て図形の位置をきめることができる。

児童が無意識(直観的)に作業(思考)していた、かどが直角、対辺平行、等長、辺がつながっている……などを意識づけてやることは、以後の図形学習のために意味があるのではないだろうか。

図形をかかせることにより、広がり、つながりなどに着目して図形を見直せるようになるようだ。

指導例の授業は、空間概念の育成としては、辺を延長して、いろいろな長方形(正方形)を作る考え方や、方眼紙のため、角の大きさに着目しなくていいなど、着目しなければならない点が見落されがちになりやすく、ものたりない気がするが、正方形、長方形のまとめとしては、適切だと思われる。

今まで、図形を切り取られたモデルや線でかかれたものとして、三角形、四角形を見てきたものが、同一平面上のつながりによる内外の区切られたものと見たり、平面上の空間の1点の決定によって図形の位置が決まる。などの見方や考え方が育ってきたと思われる。

小学校第3学年 実践例

題材 いろいろな三角形

1 指導計画に基づいた本単元のねらいと問題点

第3学年の指導内容に関し、角、三角形、円は互いに密接な関連をもたせて指導しなければならないと考える。本題材に関係して指導要領では次のように示している。

C 図形

(1)基本的な図形について理解させ、これを認めたり、用いたりすることができるようにする。

ア. 基本的な図形と関連して角を知ること。

イ. 二等辺三角形、正三角形などについて知ること。

ウ. 円については、中心、半径、直径などの意味を知ること。

第1学年では、まる、さんかく、しかくのような具体的な図形に手で触れたり、眺めたりすることによって、図形そのものの形や位置に着目して、その類似点や相違点など図形の特徴を発見させるような学習を経験してきている。

第2学年では、その発展として、具体的な図形の形や位置について観察や構成などの操作を通して、頂点、角、辺、面などの図形の構成要素や個数および図形相互の関係に着目させて、三角形、四角形の特徴に気づかせて、基本図形を浮き出させている。

第3学年としては、二等辺三角形、正三角形、円、球の学習内容について、次のように取扱いたい。

●基本的図形と関連して角を知ること。

角だけを単独に抜き出して指導するようなことをせず、三角形の指導の過程に十分関連づけて、開きとしての角から角の大小、相等の比較ができるようにして、三角形の性質を調べる学習に活用したい。

●二等辺三角形について知ること。

書かれた三角形を切り抜くなどの動的操作を通したり、二等辺三角形の性質を明確に浮き出させたりしていくことは、三角形の包摂関係の理解にも結びつけたいと考える。

更に、作図したり、作図した図形を確かめたりすれば、二等辺三角形、正三角形の包括的理解をすることになり、大きさや位置にとらわれなくて、二等辺三角形、正三角形を認めることができると思う。

●二等辺三角形の作図において、頂点を決定すること。

底辺一定で頂点を決めて作図するときは、等辺を変えることで二等辺三角形が無数に平面上にできる。平面上に頂点が無数にとられることから空間の無限性を認識させ、空間概念の育成をはかりたい。

●児童の図形認識について問題があると考えられること。

(1) 基本的な平面図形を何によって定義したらよいかかわからない。

(2) 三角形の作図の場合、第三の頂点が認めにくい。

- (3) 位置や大小に関係なく、二等辺三角形、正三角形を認めることに抵抗がある。
- (4) 閉じた平面図形では、その内部だけを意識しがちなため、外部の無限に広がる空間を意識することがなかなかできない。
- (5) コンパスの機能(等長をとる、円弧を描く)から二等辺三角形の頂点の決定を理解できるだろうか。
- (6) 正確に作図することがむずかしい。

これらの問題点の解決のためには、題材取扱い前の子どもの題材に係る三角形に対する認識、関係概念や学力、教材教具等の分析と準備を十分に考えておかなければならないと思う。

操作や構成活動においても、子ども自身が発見的に考察できるような過程を重視し学習を進めるようにすることが必要だと思う。

2 指導の構想

(1) 全体構想

図形の考察や作図の基本的な要素として辺や角に着目し、それが条件を満たすことによって位置、形、大きさが決定すること、位置や大きさに関係なく二等辺三角形、正三角形を認めること、あるいは、底辺の定まった二等辺三角形の頂点を決定すること等、作図などの図形の動的操作や構成を通しながら、図形を動的に見ていけるようになることが、三学年で空間概念の素地を養うとか、空間の理解を深めることになると考える。

したがって、このような観点から、従来の三角形の指導を見直し、空間の認識を深めるような指導計画が立てられなければならない。

二等辺三角形、正三角形の指導で、どのような空間をどのように認識させていくかが主題の問題であるが、三角形の辺や角や面などの限られた存在範囲の図形から、無限にのびた直線と平面など、広がりをもった図形へ発展させてとらえさせるようにしなければならないと思う。

例えば、図形の位置決定について、二次元(平面)の無限的な広がりの中に位置決定するように意識づけをした扱いや、底辺を一定にして無数に二等辺三角形を作図していく場合、二等辺三角形の特別なものとして正三角形を認めるなど、図形の存在する空間を一層明確にさせていくべきであると考えられる。

(2) 本時の構想

ア. コンパスの必要性の理解

○二等辺三角形の作図で、すぐにコンパスや定木をもち出して、その書き方(操作方法)を指導するのではなく、コンパスは等しい長さをとる道具であることの理解がまず必要だと考えた。

そこで、ひごで二等辺三角形をつくる構成活動を取り入れ、ひごの先端の動きに着目させ、定点から一定距離にある軌跡の考えとコンパスの機能を結びつけコンパスの必要性を理解させたい。

イ. 合同な二等辺三角形が2つできること。

底辺の長さを与えて、二等辺三角形を書かせた場合、反対方向にも合同な二等辺三角形のできることをわからせたいと思う。また、底辺を与え、等辺を自由にして書かせ、大きさのちがう二等辺三角形を書かせることも必要だと思う。そのことによって、位置や大きさに関係なく二等辺三角形が認められる。

ウ. 底辺一定の二等辺三角形の頂点の場合は, 底辺の垂直二等分線上にあること。

底辺一定で二等辺三角形を作図するとき, どこに頂点があるか考えさせた場合, 垂直二等分線上にすることを予想すると思ひ, 等辺を変えていったときも, 頂点は次々に垂直二等分線上につながって無数にできていくことがわかると思ひ。

空間の認識として, 頂点が無数にとれることから平面の無限性を認識させ深めたいと考える。

(3) 指導計画

(9時間)

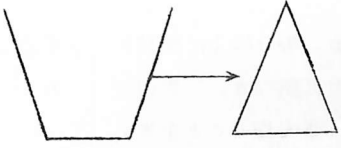
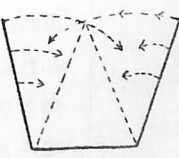
- いろいろな三角形を作る 1
- 正三角形, 二等辺三角形と角 2
- 二等辺三角形の性質 2
- 二等辺三角形のかき方 3 (本時 $\frac{1}{3}$)
- まとめ 1

3 指導例

(1) 本時の目標

- 二等辺三角形の条件を満足する, 第三の頂点を決めて, 1つの二等辺三角形を作図することができる。
- 二等辺三角形の定義に基づいて, 底辺の両側に2つの二等辺三角形を作図することができる。
- 底辺の定まっているとき, 二等辺三角形を無数につくっていくことができる。

(2) 展開

指導内容	学習活動	指導上の留意点
<p>○辺の長さが与えられた二等辺三角形のつくり方。</p> <p>○定点から一定きよりにある点の軌跡の理解</p>	<p>○三本のひごを使って二等辺三角形を作る。</p>  <p>○ひごの先端の交わる位置を予想してみる。</p> <p>○2本のひごの先端の動きによく注意をして実験してみる。</p> <p>○ひごが最後までまわっていくと円ができる, コンパスで円をかくのと同じということがわかる。</p>	<p>○頂点をきめていくまでの, ひごの操作に観点をしぼる。</p>  <ul style="list-style-type: none"> ・ひごの先端の動きを注意して見させる。 ・先端の動いたあとをたどらせる。 ・もし最後まで動いたとき何が出来るか。 <p>○上図のようなひごの置き方から, 頂点をきめていくのを操作を通しながら考えさせる。</p> <p>○ひごの先端はコンパスが弧を描く時と同じであることをわからせる。</p>

○二円による交点の決定。

○二等辺三角形のかき方。

○合同な二つの二等辺三角形の理解

○二等辺三角形のひろがり。

○O. H. P. の操作を見ながら、自分たちのひごの実験で考えたことを確かめる。

○底辺の長さと等辺の長さが与えられて二等辺三角形をかく。

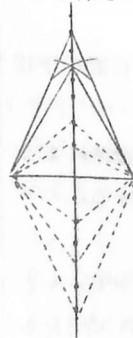


○下向き(反対側)にも二等辺三角形のかけることがわかる。

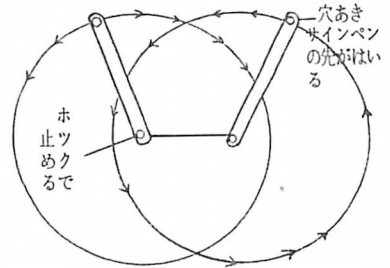
○底辺、等辺の長さを変えて作図してみる。

○底辺の長さを定めて、二等辺三角形がいくつかけるか考えてみる。

○頂点は垂直二等分線上に無数にとれることに気づき、二等辺三角形をたくさん作ることを考えてみる。



[O. H. P. の操作で確かめる]



○コンパスの機能が二等辺三角形の等辺と頂点の位置決定に使えることを発見させる。

○書いた三角形の両底角が等しいことの確かめ方を考えさせる。

○反対向きにも合同な二等辺三角形のかけることにも気づかせ作図をさせる。

○頂点の位置が二等分線上にくることの予想をさせる。

○垂直二等分線上に頂点が無数にとれることに気づかせる。

○無数にある頂点のひとつを結ぶと正三角形であることを確かめる。

[以上OHPを使って学習を進める]

4 結果の考察

(1)コンパスの必要性を軌跡の考えを用いて理解させようとしたことについて。

円の半径はどこも等しく、無数にあるということを理解している。そこで、二等辺三角形の頂点の位置の決定をする軌跡の考えは、ひごの先端の動きにめを向けさせると理解できると思った。

しかし、ひごの先端の間がちぢむ、ひごの交点が上り下りする等、ひご全体の動きで見たりして、円弧ということの理解は無理であったように思う。結局、二円を完全にかくことにより、二円の交点が二等辺三角形の頂点を決定するというように学習を進めなければならないと反省した。また、コンパスは等しい長さをとったり、求める円を作図したりするものであることを理解させる必要もある。そのためには、穴あき物指のような教具の開発とコンパスの機能を結びつけて指導することが必要である。

(2)底辺一定で頂点の位置決定について。

平面上に三本のひごを使って二等辺三角形を構成したのであるが殆んど児童は底辺を固定して、等しい二本のひごの操作で二等辺三角形を構成した。構成された二等辺三角形の向きは \triangle のものが多く ∇ で構成した児童は数名にすぎなかった。

頂点がどのへんにくるかについて予想では、児童の大半は、大体、垂直二等分線上にとったが、上下どのあたりかははっきりしない状態である。

(3)底辺一定の二等辺三角形の頂点の位置について

二等辺三角形の作図指導で、どのような空間の認識をさせていくかということが最大の課題でもあったわけだが、平面上に(二次元空間)底辺一定で等辺を変えて二等辺三角形を作っていくとき、垂直二等分線上に頂点が次々と無数にとれることがわかる。それにつれて、平面上に無限に二等辺三角形をつくっていくことで二次元の空間を平面の広がり(無限性)として認識させようとならしたのである。

児童の認識の程度はどうであったかを考察すると、どこに頂点がかかるか予想をたて作図をする、そして確かめをする、次に等辺の長さを変えて作図する、このように児童は平面上にどこまでも限りなく垂直二等分線を延長していくことができること、また垂直二等分線上に無限の点を取り得ることが可能であることを発見し理解したと思う。このことは、二次元空間を広がりとして三学年の児童らしく理解し得たと思っている。

なお、垂直二等分線上に無数にできる二等辺三角形のうち、二つ(反対側にひとつ)だけが正三角形であるということを確認して、正三角形は二等辺三角形の特別のものということも理解できた。

(4)指導内容の精選から。

平面の広がりとしての空間認識がねらいとすれば、展開のなかの合同な二つの二等辺三角形は上学年で取り扱うべきであったし、無理に当学年に位置づける必要はないと思った。

(5)教具について

三角形の構成で数種類の長さのひごを用いて学習したのであるが、欠点としては固定できず動きやすく操作しにくかった。利点では、ひごの長さ(辺)の組み合わせによっては、できない三角形があることを発見したことであった。O.H.P.の活用は確かに学習の効率をあげうらと思った。

小学校第4学年 実践例

題 材 直方体と立方体

1 指導系統に基づいた本題材のねらいと問題点

本題材は、基礎的な立体図形の観察と空間における位置の考察を内容としているものであるが、本年度の研究テーマである空間概念の育成ということに焦点をあてて記すことにする。

本題材のねらいは、直方体に関連して空間にあるものの位置の表わし方を理解させることである。すなわち、直方体の構成要素であるたて・横・高さの3つの要素に着目させ、空間の中に直方体を想定させて点の位置を表わすことにより空間の無限性、一様性に気づかせていくことであると考えられる。

本題材までの指導については、1年生で身のまわりのものを図形としてとらえさせ、その特徴を日常のことばを用いて表わしたり、自分を基準にした方向とか位置をとりあげている。2年生では、展開図をもとにして直方体を作らせ本題材の素地指導を行ない、さらに、自分以外のところに基準をおいて空間における位置の表わし方を学習してきている。3年生では、空間における位置についてはとりたてて指導はしていないが、2年生の内容をより深く理解させることをねらっている。本題材は、これを基盤にして学習するわけである。5年生、6年生においてもとりたてて空間における位置の指導をとり上げていないが4年生の内容がより定着できるような配慮がなされなければならないと思う。

これらの指導を通して、空間に関する数学的な考え方や図形を処理する能力が育成されるものと考えられる。本題材に関する空間概念育成上の問題点として次の4点が考えられる。

- (1) 2年生で座席の位置の表わし方を学習している。しかし、二次元と三次元の空間のちがいを具体的に対比しながら指導することにより一層の理解を深める必要がある。
- (2) 空間の中に直方体を想定することが困難であろう。これは、直方体の学習に関連して三次元の直交座標系を想定することの困難さに関係するものと思う。
- (3) 直角座標の表わし方と道順と混同するのではないか。
- (4) 指導上の問題としては、直方体にとらわれすぎると空間における無限性が育たなくなると思うし抽象的すぎると理解しにくいであろう。教具の活用のしかたを十分考える必要がある。

2 指導の構想

立体図形の観察のところで学習してきた直方体の構成要素や辺や面の平行、垂直関係、対応関係や、2年生のときの座席の位置決定などの学習を生かしながら本時では「三次元における位置の表わし方」を取り上げるわけである。これについて指導要領では「直方体に関連して…」というように述べている。このことは直方体の構成要素であるたて、横、高さの3つの要素に着目させながら空間におけるものの位置の表わし方を理解させることをねらっているものと思う。空間の1つの点は直方体の1つの頂点であると考え、直交座標の考え方で位置を表わすものであると解する。

本時の指導過程としては、上述の問題点や児童の実態から、空間における点の位置は直方体を想定したときその頂点の1つであるということから、位置の表わし方を考えさせる。これを既習の二次元の場合と比較してとらえさせ、そのちがいを発見させる。このように空間に直方体を想定させることによって空間を数量化してとらえさせることができると考える。したがって、その位置がたて、横、高さの3組の量によって表わされるということから空間の無限性や充てん性に着目させていきたい。

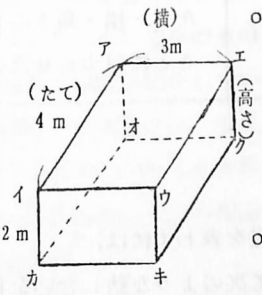
本時のねらいを達成するために、空間における位置の表わし方は、平面上のみでは理解しにくいので立体模型や教具をくふうして、子どもの視覚にうったえながら学習できるように計画する。

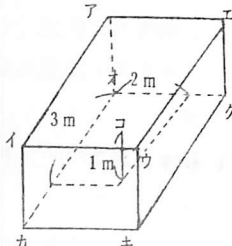
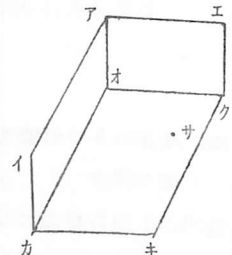
そこで、本時の位置づけを本題材の中に次のように設定した。

第1次	立方体と直方体	2時間
第2次	辺や面の垂直と平行	3時間
第3次	見取り図と展開図	3時間
第4次	位置の表わし方	1時間(本時)
第5次	まとめ	1時間

3 指導例

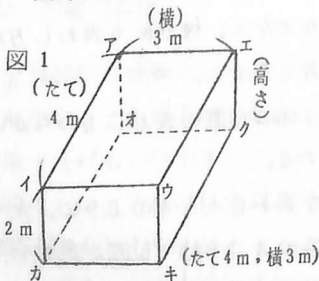
- (1) 題材 位置の表わし方
- (2) ねらい 直方体の1つの頂点を基準にして、たて、横、高さの3つの要素を用いて位置を表わすことを理解させる。
- (3) 展開

指導内容	学習活動	指導上の留意点
<p>○直方体の1頂点を、他の頂点を基準としたときの3つの数で表わすこと。</p>	 <p>○直方体や立方体の大きさは、何によってきまるか。</p> <p>○オの点をもとにしてウの点の表わし方を考える。</p> <p>○平面と立体の位置の表わし方のちがいをみつける。</p> <p>○基準点を同じにしておき、求める点を ウエ、イウ、ウキの辺上に移動したときの表わし方を考えさ</p>	<p>○直方体や立体の大きさは、たて、横、高さによってきまることをおさえる。</p> <p>○直方体の構成要素をもとにして位置を表わすようにさせる。</p> <p>○ひと通りでなく、ほかにも表わし方がないか考えさせる。</p> <p>○平面と立体の位置の表わし方のちがいを確認する。</p> <p>○ウの点を表わしたときのように、たて、横、高さの3つの組で位置が表わせることを確認する。</p>

<p>○ 直方体の内部の点の表わし方</p>	<p>せる。</p> <p>○ オの点をもとにして、イの点を表わすのに、たて・横・高さの3つの組を使って表わすにはどうするか。</p> <p>○ カの点をもとにして、エの点の表わし方を発表させる。</p> 	<p>○ 横が0になる場合であるが、横が3mになる場合と比較してとらえさせる。</p> <p>○ 具体物を使って、コの位置をはっきりさせてやる。</p> <p>○ コの点を直方体の頂点として、とらえれば、ウの点と同じようにして表わせることに気づかせる。</p>
<p>○ 直方体の外部の点の表わし方</p>	 <p>○ オの点をもとにして、直方体の外部のサの点を表わすには、何がわかれば表わせるか。</p>	<p>○ 具体物(1つの頂点に集まる3つの面)を使って、サの点をわかりやすく示してやる。</p> <p>○ サの点も直方体の頂点としてとらえればウやコの点と同じようにして表わせることに気づかせる。</p> <p>○ 空間において、基準点さえはっきりすれば、どこに点をとってもその位置はたて・横・高さの3つの組で表わせることに気づかせたい。</p>

4 結果の考察

(1) 直方体の1頂点を基準として、対角線上の他の頂点を表わすには、



左の直方体について次のような話し合いをした。

(T—教師 C—児童)

T. オの点をもとにしてウの点を表わすには、何がわかれば表わせるか

C1. 長さがわかれば表わせる。

T. この場合 何の長さか具体的にいうと

C1. 3つの長さ

T. 3つの長さとは

C2. たて・横・高さ

T. 直方体の大きさは、たて・横・高さによってきまりますね。それでは、この3つを使ってオの点をもとにしてウの点を表わしプリントに書きなさい。

C3. オの横へ3m, たてへ4m, 高さへ2mいったところ。

C4. オの点からたて4m, 横へ3m, 高さへ2mいったところ。

C1. オの点から高さへ2m, 横へ3m, たてへ4mのところ。

このように、たて、横、高さの3つの要素を使っているのだが、二次元の空間、三次元の空間を意識せず道順としてとらえているものが多かった。そこで、オの点からオア、オカ、オクの辺は直線上にあり、キの点はオの点と同一平面上にあることをおさえ、さらに高さが加わることによってウの点の位置が表わされることから、平面と立体の表わし方のちがいをみつけさせた。ウの点の表現方法も「たて4m, 横3m, 高さ2m」のようにすることを約束した。また、ウエ、イウ、ウキの辺上に任意の点をとっても、たて、横、高さの3つの組で表わせるということをはとんどの子どもが理解できた。

(2) 直方体の1頂点を基準として、直方体の内部の点を表わすには、

図2

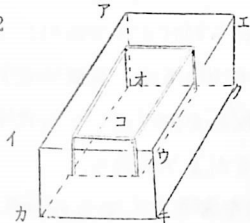


図2をO, H, Pで示し、さらに具体物を使って説明をつけ加えた。

T. オの点をもとにしてコの点を表わすにはどうしたらよいか。

C6. 横2m, たて3m, 高さ1m

C2. たて3m, 横2m, 高さ1m

このように高さをあとに書いている子どもが多かった。そこで

T. 高さを最初を書くことができないか。

C7. できない。1つの辺しかない。

C5. コの点もウの点と同じように考えられるから先にとってもかまわない。

そこで、図2に太い線の部分を書かしてやったら「あー そうか」とうなづいていた。

このことから、オの点をもとにしてウの点の位置を表わすときに、道順の考え方からぬけきれず直方体の辺をたよりにして空間の位置決定をしているものと考えられる。したがって、オの点をもとにしてウの点を表わすときに、空間における立体は、たて、横、高さの3つの要素によって表わされることをもつと具体的におさえおく必要があったことを反省している。また、これは導入時の問題点とも考えられる。空間の中の1つの点を直方体の1つの頂点と想定して考えるということから導入すれば、このような問題は防げたかもしれない。

(3) 直方体の1頂点を基準として、直方体の外部の点を表わすには、

自作した教具(オの点に集まっている3つの面)を示して、空間に電燈をさけて

T. オの点をもとにして電燈の位置(サの点)を表わすには何がわかれば表わせるか。

C5. 長さがわかれば表わせる。

T. どこ長さか。

C5. (アからサ, イからサ, エからサまで指さして)この長さがわかればサの点が表わせる。

C6. それは、ななめの線で考えているからおかしい。

T. しかし、3つの組という考え方からすると正しい考え方だね。でも、ここではななめの考え方はむづかしいので今まで考えてきたことをもとにして考えてみよう。

今まで考えてきたウの点やコノ点は、直方体の何とみてきたか。

C3. 直方体の頂点とみてきた。

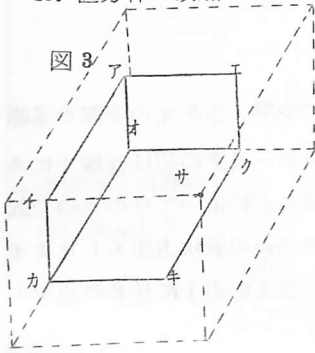


図3

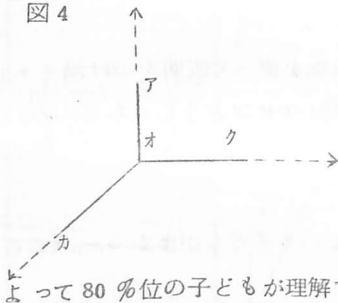


図4

C2. サの点も直方体の頂点としてとらえることができることから、たて、横、高さの3つの組で表わせる。

T. (教具を指さして)これでは、たて、横、高さというのはどこにあたるのか。

C4. アオの辺をサの点の高さまでのばし、オクの辺も横にのばしていきオカの辺ものばしていく。そして、見取り図をかけばサの点を直方体の頂点とみることができその位置も表わせる。

この考え方が理解できたのは、33人中6,7人であった。この理由を分析してみると、平面上の点とか三次元空間の点の位置を表わすのにあまり正方形や長方形という具体物にとらわれすぎて指導していたために、空間の中の任意の点を直方体の1つの頂点と見直すことが困難であったためと思われる。そこで同じ教具を使うにしても教室のすみにつけて説明してやればもっと理解できたように思う。

C4. に T. Pに図3のようにして点線を書きこんでもらった。これによって80%位の子どもが理解できた。さらに、図4を書いて説明を加えた。このことにより空間における無限性とか単位立体の充てん性に気づかせることが可能でないかと思う。

(4) おわりに

○三次元空間の位置の表わし方の指導には、児童の思考を助けるような教具が必要であることを痛感した。また、座標の考えを伸ばすだけでなく、空間について理解したり考察する力を伸ばすことも忘れてはならないと思う。

○位置の表わし方を直角座標を基盤にして実践してきたが、一方空間は単位量でうめつくされるといふ考え方がある。二次元の空間において単位正方形がくり返して作られるということから、空間の無限性に気づかせることができるのではないだろうか。また同じように、三次元空間では単位立方体でうめつくされるといふことにより空間の無限性、一様性に気づかせ、空間の次元性を育成することができるのではなからうか。このことは面積や体積の概念にも関連してくると思う。今後はこういう面からも検討を加えていきたい。

小学校5学年 実践例

題材 線対称・点対称

1 指導系統に基づいた本題のねらいと問題点

平面図形を考察する観点として、3年生では辺の数と長さ、角の個数などが取扱われ、4年生では直線の平行、垂直関係とともに、図形の相互関係として合同が取り上げられてきた。

このような前学年までの学習を受けて、5年生の本題材では、平面図形の新しい観点として対称性を取り上げ、対称性に着目して図形を考察したり構成したりするなど図形の見方をさらに豊かにさせることがおもなねらいとなる。

しかし、この対称性に着目させる指導は、単にある図形が対称形であるという見方ができるようにさせればよいとするものであってはならない。図形の移動の過程そのものに積極的に着目させ、動的な操作を取り入れ平面図形を考察できるようにさせることも主要なねらいであることを忘れてはならない。なぜなら、この操作のうらには変換の考えがあり、次のような発展と意義を認めるからである。

この図形の移動の過程を積極的にみつめさせ、図形を動的に考察する学習経験は、直接的には6年生の「回転体」、中学1年生「平行、対称および回転の移動」、さらに、中学2年生での「変換」につながるものである。

また、図形の移動を考察させることは、その図形を含む空間全体を意識させる機会ともなる。

このような意味をもつ本題材は、実際指導の上で次のような問題点をもつ。

- (1) 動的な操作は低学年から、「まわす」「ずらす」「裏返す」など、具体的な図形の操作に関連して扱われてきている。しかし、どちらかという、「重なった」「同じ形ができた」など操作そのものよりも結果だけに着目しがちであった。ここでは、もっと操作の過程に注目させ、それを数量的にとらえさせていくことになる。5年生として、操作の過程をどのようにして、どの程度意識的に見つめさせ得るか、また、この操作過程の意識化をどのようにして対応の規則発見に結びつけることができるか。
- (2) 形の特徴をみるといった観賞的な観点もさることながら、移動を重視し、空間概念を深める立場をとるとしたら、そのためには指導過程をどのようにくんだりよいか。
- (3) 対応する点の位置決定などに関連し、空間の広がりや、空間にある点の位置決定など空間についての理解を深めるための学習場面が想定できるが、線対称、点対称の理解の深まりとのかねあいをどうとりながら指導するか。
- (4) 点対称と線対称では移動の上では本質的な違いがある。前者は同一平面上の回転であり、後者は立体空間をかりた回転移動である。この相違に目を向けさせることは今後の図形学習において、空間を前提として、思考を進めたり、操作をしったりする態度を育成する糸口とすることができる。この点を操作を通して発見的に導くにはどのようにしたらよいか。

2 指導の構想

対称指導の指導過程には、対称な図形の導入から、対称の位置に進む方法と、逆に、対称の位置の導入から、対称な形を対称の位置の特別な場合と見させていく二通りが考えられる。

前の方法は教科書などで一般的に取り上げられている方法でありそれなりのよさはある。ひし形や、二等辺三角形が線対称形であり、対称軸は何本あるかなど、ある図形の性質をさぐるのに対称性に着目して検討を加えるといった面が強調されてくる。

しかし、この方法だと、図形を移動の考え方でとらえさせる指導場面がせばまり、移動らしく取り扱いは得るのは対称の位置の指導の場面に限られてしまう。しかも、この対称の位置の指導も対応の規則を知ったあとの応用的な扱いになってしまい、図形に動的な操作を加えてみるといった必要感もなくその意識もうすくなる。このように教科書の取り扱いでは操作よりも、静的なとりあつかいが主となってしまいうらいがある。

そこで、本題材の指導を対称の位置からはいり、対称な形に進むように構想してみた。なぜなら、次のような指導が必然性をもってなされ、強調できると考えたからである。

- (1) 児童が「まわす」「裏返す」「ずらす」など、これまで親しんできた見方に数量的に正しい意味を与えるとともに、移動の考えをより深める。
- (2) 「まわす」「裏返す」と区別している移動は「平面上をすべらせてまわす」、「三次元空間を通してまわす」というように「まわす」ということでは一致するが、同じ「まわす」であっても、操作する空間を前提として考えなければならないということに気づかせること。
- (3) 対応する点の決定ということから平面を構成する無数の点を意識し、そのなかから条件にあり点を決定するという考え方。
- (4) 図形を移動させる時に、その対称軸や対称の中心の置き方の多様性を知らせ、平面の広がりを意識づけること。
- (5) 二等辺三角形の底辺を軸として対称の位置にある図形をかくと、全体としてひし形ができ、そのひし形が対称の形であるといった線対称形の見方

本題材の指導では、対称の規則の発見や、その応用を急ぐのではなく、上記の点を強調しながら、より柔軟な対称の見方や考え方を育てるように構想してみた。

指導計画

第一次 題材全体の導入として、ずらす、まわす、裏返すなど動かす操作にまとめる。(1時)

第二次 線対称の位置にある図形の対応規則の発見と作図(2時 本時1/2)

第三次 線対称形の意味と基本的な図形のみかた。(2時)

第四次 点対称の位置にある図形の対応規則の発見(1時)

第五次 点対称形の意味と基本的な図形のみかた。(2時)

第六次 線対称と点対称のまとめ(1時)

この指導構想により、本題材の問題点にせまり得ると考えている。

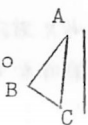
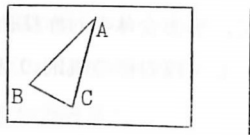
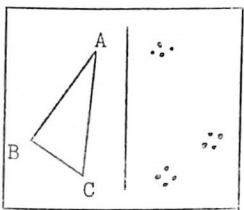
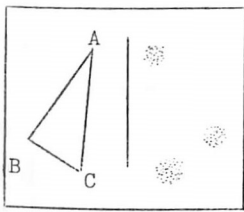
3 指導例

(1) 題材 線対称

(2) ねらい 図形の対称移動において、考えている図形だけを取りだし裏返す考え方から、対称軸と図形のおかれている平面との関係に着目させて、平面全体の対称移動というイメージをもたせ、平面の広がりや、平面上の無数の点を意識させたりして線対称の規則の発見の素地をつくる。

(3) 展開

指導内容	学習活動	指導上の留意点
<p>○「まわす」「裏返す」の共通点と、相違点を確認させる。</p> <p>○紙を折っても裏返しになることを確認させる。</p> <p>○紙面上に折り目が無数に考えられることを知らせる。</p>	<p>○ふつう、「まわす」と言った時、次の二通りあることを確認する。</p> <p style="margin-left: 20px;">平面の上をすべらせてまわす。(まわす)</p> <p style="margin-left: 20px;">空中を通してまわす。(裏返す)</p> <p>○「まわす」と「裏返す」の動きかたの相違点</p> <p style="margin-left: 20px;">「まわす」は、ある頂点(点)が動かない。</p> <p style="margin-left: 20px;">「裏返す」は、辺(直線)が動かない。</p> <p>○前時は三角形だけを取りだして動かす考え方が強かったが、三角形のすぐ近くにある図形も同時に、裏返すにはどうすればよいか考える。</p> <p>○下図のうす紙を折って、折り返せば、アの三角形も「イ」という図形も同時に裏返しになることを確認する。</p> <div data-bbox="325 1138 588 1302" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> </div> <p>○O.H.Pをみて確認。</p> <p>○折り目は何本ぐらい考えられるか、各自、線を引きながら考える。</p> <p>○各自の考えた線をシートにかき、それを重ね合わせて、多様な方向に、それぞれ無数にできることを話し合う。</p> <div data-bbox="561 1391 798 1595" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> </div> <p style="text-align: center;">(重ね合わせたT.P)</p> <p>○紙面上に無数の折り目を考えたが、まだ他に折り目と考えられるところはないか考える。</p>	<p>○点対称、線対称の相違、空間を前提とした考え方、それぞれ本質的な意味をもつものであり強調しておく。</p> <p>○児童は図形だけを平面から取り出して動かす考え方が強い。図形を含む平面全体が移動するという見方を経験させること。</p> <p>①紙のへりに平行に、②三角形の各辺に平行になどの折り目を考える児童が多いと考えられる。その他の発想を大切にしたい。</p> <p>○単に無数でなく、方向の多様さをはっきりおさえさせる。</p> <p>○紙面内の平面から紙面外</p>

<p>○紙面外に折り目を考えさせ、平面の広がり意識づける。</p>	<p>○紙のへりを折り目と考えてもよいことを知り、その時の動きを実際に操作する。</p> <p>○紙面からはなれ、紙面外に折り目を考え、その操作を実際に行なう。</p>	<p>の平面へ広めるステップである。</p> <p>○紙面から、それを広げたより広い平面を意識させることにより、日常、身のまわりのものに対して、対称性を認めたり、空間に平面を意識させることをねらった学習である。</p>
<p>○で、頂点、A、B、Cに対応する点を予想させ、対称の規則発見へ導く。</p>	<p></p> <p>対称軸 (鉛筆を用いる)</p> <p>○紙のへり、紙の頂点、三角形の頂点の動きかたを手で描いてみることにより、上図の移動操作を正確にとらえる。</p>	<p>○見当づけた理由を大切ににする。</p>
<p>○シートにかかれた右図で各班、A、B、Cに対応すると思われる点を4つ位づつ直観的にフリーハンドで打つ。</p> <p>○各班の見当づけの理由を発表させながら、シートを重ね合わせて、多くの点を意識し、どのようにしたら、A、B、Cに正確に対応する点を求められるか話し合う。</p>	<p></p> <p></p>	<p>○まず、点があり、そのなかから条件にあった点をさぐるというような学習経験はすくない。ここでの経験を重視し、平面は点の集合としてみる考え方への素地としたい。</p>

4 結果の考察

(1) 題材全体の指導の構想から

(ア) 低学年から親しんできた、まわす、ずらす、裏返すなどの操作を5年生なりにとらえなおさせ、本題材全体の導入としたことについて。(主に第一次、1時について)

裏返しと、平面上の回転移動とを混同している児童が全体の $\frac{1}{8}$ 以上もいた。低学年から親しんできたこれらの操作を5年生としてとらえなおさせることが必要だと考えた。この時、単なる復習に終わるのではなく次のような点にも着目させることが5年生として大切なことであり、また可能なことでもある。

○平面上でまわす、立体空間でまわすというように同じまわすでもおかれた空間によって様子がかってくる。このことから「どんな空間でまわすか」というように空間を前提として考えを進めるこ

と。

○ 回転移動と線対称移動の対比により、児童が、回転移動はある点(対称の中心)が不動であり、線対称移動は直線(対称軸)が不動であることを発見した。このことは5年生で空間を問題にしながら操作をとらえなおさせたことによるものと考えられる。

イ) 対称の位置から本題材の指導にはいったことについて。

三角形を最初裏返したり、まわしたりする時、その回転軸や回転の中心を三角形の辺や頂点からはなれた図形の外部に考えた児童は少なかった。このことは児童の図形認識が、閉曲線の外部に及びにくいとみられる。しかし、本時の紙面全体を折り返す指導のように意図的に閉曲線の外部に着目させていけば、図形からはなれて対称軸を考えることには特別抵抗は感じられない。このことは、5年生としては描かれた図形だけに着目しているのではなく、その外部空間に着目させ得ると言うことができる。

ウ) 規則発見を急がず、移動の過程や、空間の広がりや大きさを大切に扱ったことについて。

児童は規則を知ってしまうと、その形式的な応用に走りがちである。まわりくどい感もないではないが本時のように空間の広がり等を問題にすることによって図形についてより深い理解が望まれるのではないか。

(2) 本時の指導について

イ) 図形だけの移動から平面全体の移動を意識させようとしたことについて。

本時学習前の児童は与えられた図形だけが移動するという考え方が強く、その図形を含む平面全体の移動という考え方ができなかった。本時指導で紙を折るという操作を与えることによって、平面全体を動かして考える経験を与えられた。どの程度まで平面全体の移動という考え方が定着したかについては問題がある。しかし、図形だけを動かして考えるだけでなく、それを含む平面全体を動かして考える経験も大切ではなからうか。

イ) 紙面から空間にまで、その平面の広がりや大きさを意識させようとしたことについて。

もう、ワンステップ欲しかった。つまり、与えられた紙より広い紙を用意し、その紙の上に与えられた紙面をのせる段階である。そうすれば、スムーズに平面が拡張されるのではなかったか。本時学習の流れだと鉛筆で表わした直線を1辺とした長方形(与えられた紙面)の移動としてとらえていたとも考えられる。

ウ) 対応する点を見当づけさせたことについて。

この学習によって、直観的ではあるが対応の規則の発見が見直される。しかも、まず平面に点があり、そのなかから条件に合った点を選ぶといった経験、点の位置決定に関する学習場面を設定できた。

以上、対称の指導を通して、対称のより深い理解は、空間の広がりなど、空間認識を深めることによってなされるという印象を持った。応用のきく、柔軟な図形のみかたを育てるためにも、空間概念を育てる指導の研究を深めたい。

小学校第6学年 実践例

題 材 図形の拡大, 縮小

1 指導系統に基づいた本題材のねらいと問題点

(1) 本題材のねらい

本題材に関連して、指導要領では次のように示している。

C (2) 縮図などの意味について知らせ、図形についての理解を深める。

ア、図形の形と大きさについての理解をまとめること。

イ、縮図・縮尺の意味を知ること、簡単な縮図や拡大図をよんだり、かいたりすること。

小学校の図形指導では、図形の位置、形、大きさが重要な指導内容となるが、本題材を指導の系統の上からみた場合、直接に関係あるものとして、次のことがらが指導されてきた。

3年生では、基本的な図形のひとつである三角形の作図をとおして、二つの辺の開きぐあいに着目させ、それを角としてとらえさせること、角の大きさは、辺の長さには関係ないことなどを指導してきた。

4年生では、二つの図形の位置や向きに関係なく、対応する角の大きさや辺の長さが等しいとき、二つの図形は合同であることを指導してきた。

5年生では、図形の位置決定に関連して、対称性に着目させ、図形の動的な操作(折り返す、ずらすまわす等)をとおして、図形を考察したり構成したりして、図形に対する理解を深めてきた。

6年生の本題材では、4年生、5年生でとりあつてきた合同や対称の考えに、さらに、図形に対する新しい観点として、図形を拡大したり縮小したりする考えを加え、空間の広がりなどの空間認識をいっそう深めることを重要なねらいとしている。

(2) 問題点

このような指導系統の上にある本題材は、つぎのような問題点をもっている。

ア. 図形をみる観点

5年生までの合同や対称の学習は、図形間の関係を、ぴったり重なる形としてとらえ、形や大きさに着目し、対応する辺や角の等値関係を中心として進められてきた。本題材は、さらに大きさを捨象し、「同じ形」という相似の考えの素地を養おうとするものであるが、児童自身が「同じ形」ということの内容を明確にしていく観点を見つけることができるだろうか。

イ. 空間の広がり

同じ形を相似の位置においた場合、対応する辺が平行であること、そして、同じ形の図形が無数に存在するという空間の広がりまで着目して図形をみることができるかどうか。

児童が図形の空間における広がりまで着目するようには、図形の操作を通してとらえさせていくことが重要なことであるが、どのような指導過程をとり、また、教材や教具を、どこで、どのように用いて指導したら、児童が空間の広がりまで着目して図形をとらえることができるか。

2 指導の構想

• 一般的な指導方法としては、対応する角の相等，対応する辺の比が一定，合同は相似の特殊なものというとらえ方から，拡大図や縮図を理解していくという手順で指導されているようである。この指導方法は，それなりのよさをもっているが，空間概念育成の観点から考えてみた場合，児童が拡大図や縮図をかけたとしても，相似の条件を真に理解して作図しているかどうか，また，図形の広がりやまで着目して，図形をとらえているかどうかの判断がむずかしい。ややもすると，機械的，形式的に操作しているおそれもあるわけである。

そのため，ここでは，児童に同じ形を類別させ，その要素を対応づける操作の中から同じ形のもっている性質を見いださせ，その上に立っての相似の形のかき方に気づかせていくという指導過程をとることにした。

• 合同との対比について

「同じ形の図形」から指導に入っていく場合，「同じ形」について，児童は，かならずしも合同や相似を念頭においたみかたをしてくれるとは限らない。同じ形と合同とは別々のもの，というみかたをしたり「面積が等しい」「同じ四角形」という考え方をするかもしれない。そこで，同じ形と合同の関係をしっかりとらえさせるためには，図形を動的に操作させることによって，必要な条件を発見させていくことが重要である。

• 広がり意識について

図形を動的にとらえて，いろいろな操作ができれば，図形を相似の位置においた場合には，対応する平行な辺が無数存在し，いくらでも拡大できるという広がりやまで気づくようになろう。

また，相似の作図についても，条件をよく理解した上で作図方法をくふうさせる。その作図方法はけつきよくは，相似の概念に基づいたものであるということころまで理解をもっていきたい。

• 縮尺と面積比について

図形を同じ割合で拡大したり，縮小したりする場合，児童には，縮尺と面積との関係がなかなか理解できない。それまでに学習してきたことを基礎にして，実証しながら理解を深めていくようにつとめた。しかし，この内容の完全な理解をはかる指導は中学校2年生になるのであまり深入りしたとりあつかいはしない。

指導計画

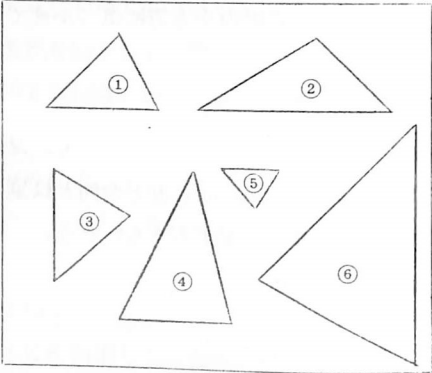
1次	「同じ形の図形」の条件の発見と合同との関係の理解 相似の条件の一般化	3時間（本時2/3）
2次	図形の拡大，縮小のしかたのくふう	2時間
3次	縮尺の理解と面積比についての実証	2時間
4次	縮尺をつかった計測のしかた（面積比を含めた）	2時間
5次	まとめ	1時間

3 指導例

(1) 題材 同じ形の図形

(2) ねらい 同じ形と考えられる図形を決定する条件として、形の大小にとらわれず、対応する角の相等、対応する辺の比の一定という観点からとらえさせ、さらに、空間のひろがりまで着目させる。

(3) 展開

指導内容	学習活動	指導上の留意点
<p>課題提示</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ 同じ形の図形を弁別する条件を発見させる。 <p>○ 図形の位置、向き、大きさを捨象して、同じ形の図形と他の図形とを弁別する条件を考えさせる。</p> <p>○ 対応する角の大きさ、対応する辺の長さに着目して図形をみさせる。</p>	 <p>↓</p> <p>どれとどれが同じ形の三角形だろうか見当をつける。</p> <p>↓</p> <p>①と③は合同のようだ。 ⑤と⑥は同じ形のようだが合同ではないようだ。 ②と④はちがう形のようだ。</p> <p>↓</p> <p>同じ形の条件について何を条件としたか発表しあう(グループバズ)</p> <p>↓ ↓ ↓</p> <p>角に目をつける 辺に目をつける 面積や高さに着目する</p> <p>↓ ↓ ↓</p> <p>たしかめをする</p>	<ul style="list-style-type: none"> ○ 左のような三角形を書いたプリントを各児童に与えて考えさせる。 ○ 同じ形の条件について自由に考えさせ、それぞれを分類させる。 ○ ①③⑤⑥の内角は 80°, 60°, 40° ② 25°, 40°, 115° ④ 50°, 55°, 75° ○ 着目した条件について、グループごとにたしかめをする。 ○ 必要な数値は教師が用意し、

- 合同と同じ形の図形の条件の比較をさせる。
- 対応角の相等について確認する。
- 相違点を明確にさせる。
- 対応する辺の長さの比に着目させる。
- 対応する辺の長さの比が等しいことを確認する。
- 図形を相似の位置におき、図形を動的に操作することによって合同は同じ形のなかの特別のものであることを確認する。
- 同じ形における広がりについて理解させる。
- 本時のまとめをする。

↓

目をつけた各条件とたしかめの結果を
発表しあって表にまとめる

↓

「合同」「同じ形」と思われる図形との
類似点・相違点をはっきりさせる

- ・対応する角は等しい
- ・辺の長さが、合同は等しいが他はちがう

↓

対応する辺の長さについて考える

↓

対応する辺の長さの比はどれも等しい

① : ③ = 1 : 1 ① : ⑤ = 1 : $\frac{1}{2}$
① : ⑥ = 1 : 2

↓

合同と同じ形との関係を考える。

① ③ ⑤ ⑥ の三角形を重ねたO.
H. P.を見ながら考える

↓

二辺は重なっている、他の一辺は全部
平行である。（計測して確認）

同じ形をいくつも作れる。

合同は同じ形を作るとちゅうに、もと
にする形とぴったり重なった場合の特
別なものである。

↓

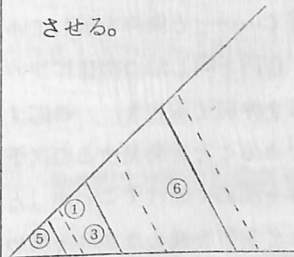
同じ形のまとめをする

- ・対応する角の大きさが等しい
- ・対応する辺の長さの比は、どの辺の比も等しい。
- ・合同は同じ形の特別なものである。
- ・同じ形はいくつでも書くことができる。

各グループの着目した条件
に必要な数値を与えてやる。
角の大きさ、面積、辺の長
さ、三角形の高さを用意し
ておく。

- OHPを使って確認してい
く。

- ①を原図として考えさせる。
- 下図のように三角形を重ね
て辺の比を確認させる。
- 合同と同じ形の関係を考え
させる。



- ・実線は提示した図形
- ・計測して確認させる。
- ・下図のようにまとめさせ
る。（集合の考え）



4 結果の考察

(1) 相似の条件のとらえ方について

ア. 「同じ形」という用語のとらえ方

「同じ形の三角形はどれとどれだろうか」という発問をして、6つの三角形を提示したとき、児童たちの示した反応は29名中12名が合同ということを考え、角の相等を考えた者が10名、辺の長さ、面積、三角形の高さを考えた者が各1名、他の児童は「同じ形」という用語をどうとらえたらよいかわからなかった。

グループバズのとらえ方として、6グループのうち2グループは合同だけを同じ形としてとらえ、他の4グループは、合同を含めた①③⑤⑥の図形を同じ形であるととらえていた。

イ. 図形の形と大きさ・位置関係について、

位置関係については、①と③を合同ととらえたグループ、①③⑤⑥を同じ形ととらえたグループとも、位置関係(向き、裏返し)は容易に捨象されていたものとする。

図形の大きさについて、①③⑤⑥を同じ形ととらえていたグループは、発表の中に「図形の大きさに関係なく……」と条件を示していたところからみて、捨象してとらえていたと思う。

ウ. 合同と同じ形の関係について、

図形を弁別するとき、対応する角の相等については比較的簡単に理解できたが、対応する辺の比が一定であることを発見するのに予想以上に時間がかかった。児童から「同じ形を分ける条件は自分たちで条件を決めて分けてよいか」という質問が出されたとき、その発言を生かして弁別の条件をはっきりとさせて学習を進めなかったためと思う。児童の多くは、直観的には、①③⑤⑥の三角形を同じ形ととらえていたと思われる。

けっきょく、①を原図として、各三角形を相似の位置においたO・H・Pを見せつつ、対応する辺の長さを数値で、⑥は①の2倍、⑤は①の $\frac{1}{2}$ 、①と③は等しいと、ひとつひとつ確認することによって、ようやく、合同は同じ形の特別なものであることを理解させることができた。

辺の比が一定であることを確認する過程で、「辺の比が、2倍、2分の1になると、それにつれて、面積も同じ割合で、2倍、2分の1になる。」と予想していた児童があった。このことは、第3次の面積比の学習の課題提示となった。

(2) 空間の広がりについて、

相似な三角形の二辺を、ぴったり重ね合わせると、残りの一辺が互いに平行となり、この辺を平行移動することにより、合同な三角形をつくれることを知る。この過程を通して、合同と、同じ形の包摂関係や、同じ形が無数にできることが理解できた。すなわち、原図をいくらでも拡大したり、縮小したりすることができるということ、同じ形をいくつでもかくことができるということ、ほとんどの児童が考え、空間の広がりまで着目して図形をみることができたといえる。

このことは、あとの相似概念の一般化、作図方法のくふうの学習において、基礎的な理解として役立つ。

中学校第1学年 実践例

題材 直線・平面の位置関係

1 指導系統に基づいた本題材のねらいと問題点

中学校1年の図形領域の目標に「図形をいろいろな観点から考察し、図形についての理解を深める。」とあり、「直線と直線、平面と平面の位置関係」が内容として取りあげられている。直線と直線の位置関係では、直線が同一平面上にある場合と、ない場合とに分けて、それらに違いがあることを生徒に認識させ、空間の違いにより、同じ命題でも真偽が一致しないことを知らせることに重点がおかれている。

たとえば、同一平面上で1つの直線に垂直な2直線は平行になるが、同一平面上にない場合は、平行になる場合だけではない。図形の性質は、その図形のおかれている空間によって違いがでてくることに着目させることが、生徒の空間認識を深めていくのに重要である。

空間概念育成のための指導系統で、「位置」「広がり」の観点から考えたときの主たる教材としては1年生では、次の2つを取りあげている。

- (1) 点・線・面 (2) 円と直線・球と平面

(1)のねらいは、直線と直線・直線と平面・平面と平面の位置関係など、基本的な図形の位置関係について考察していくことにより、空間概念を育てることである。

(2)のねらいとしては、円と直線・球と平面の位置関係を理解させ、与えられた円(球)との位置関係によって直線(平面)を分類したりすることを扱いながら空間認識を深めていくことである。

また、指導系統に位置づけられたそれらの中心的な題材のねらいを、生徒に定着させるための指導上の問題点も多くあるが、取り扱う素材が、点・線・面という図形の要素的なもので、ともすると、教師自身がそれを安易に処理し、空間概念育成の観点からの指導を手うすにしたまま過ぎてしまうおそれがある。また、本題材は、取りあげかたによっては、生徒にとって興味のない内容となってしまうおそれもあるので、学習過程をたいせつにしながら、ねらいの達成にむかわなければならない。

2 指導の構想

生徒の直線と直線の位置関係のは握の傾向は、直線と直線のみに着目するだけで、そのおかれている空間を意識しながら思考を展開することが少ないと思われる。すなわち、直線と直線を平面上(2次元の空間)で操作しながら位置関係を考えるのが主で、3次元空間にそれを発展させて考えることは、生徒にとってかなり困難であろう。また、従来、図形の性質を、その図形のおかれている空間との相互関係でみていきながら空間認識を深めるという指導はあまり行なわれなかったといえる。この実態に基づき、本題材を、直線や平面の位置関係の理解をはかりながら空間概念を育てていくという観点から、主な指導内容を次の指導順序で授業をすすめていくことにした。

(1) 平面上の2直線 (1時間)

$l \parallel m, m \parallel n \longrightarrow l \parallel n$ を導いたり, 平面上の直線の方向に着目させたりする。

(2) 空間の2直線 (1時間) — 本時 —

空間での2直線の位置関係をは握させたり, 3直線についての位置関係で推移律が成り立つ場合, 成り立たない場合や, いろいろな3直線の位置関係を考えていく。

(3) 平面と直線 (1時間)

同一平面に平行な2直線の位置関係や平面と直線の垂直関係に着目していく。

(4) 平面と平面 (1時間)

平面と平面の位置関係(交わる, 平行である)を知ったり, 平面と平面の垂直関係に着目していく。

以上のような指導構想に基づき, 生徒が「位置, 広がり」に着目し, 空間概念を深めるように指導したい。

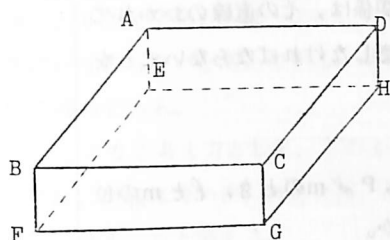
3 指導例

(1) 題材 空間での2直線の位置関係

(2) ねらい 直線と直線のいろいろな位置関係が, 同一平面上にある場合と, 同一平面上にない場合に違いがあることを調べながら, 直線の位置関係が, そのおかれている空間に依存していることを理解させる。

(3) 展開

指導内容	学習活動	留意点
1. 空間での2直線の位置関係をとらえさせるとともに, 本時の課題を明確にする。	<ul style="list-style-type: none"> ○ 2直線の位置関係について考える。 ○ ねじれの位置にある2直線の存在を知る。 ○ 平行とねじれの位置についての違いについて考える。 ○ 同一平面上にあるか, ないかという立場で, 2直線の位置関係を分類する。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 発表させる。(「平行」と交わる)がでるだろう。) ○ 交わらないが平行でない場合から, ねじれの位置の存在に気づかせる。 ○ 同一平面上にあるか, ないかの違いであるところへまとめたい。 ○ 本時の学習の課題を, ここでつかませる。
2. 直線の位置関係の認識を深める。	<ul style="list-style-type: none"> ○ 直方体の辺で, ABと平行な辺, ABと垂直(交わる)な辺, ABとねじれの位置にある辺はどれか。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 平行な辺, 交わる辺については, 同一平面上にあることを確認させる。



3. $l \parallel m, m \parallel n$
 $\rightarrow l \parallel n$ が成り立つことを知らせる。

4 直線が同一平面上にあるとき、ないときによって、その位置関係が違ってくる場合のあることをはっきりさせ、図形の性質の空間への依存性の強さを理解させる。

(1) 空間への依存性をまとめる。

(2) 空間への依存性を確認する。

○ 3 直線が同一平面上にないときも、 $l \parallel m, m \parallel n \rightarrow l \parallel n$ が成り立つか考える。

(問 1)

○ $l \perp m, m \perp n$ のとき、 l と n の位置関係はどうか。

(同一平面上にあるとき)
 (同一平面上にないとき)

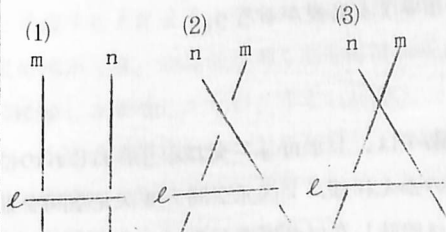
(問 2)

$l \parallel m, m \perp n$ のとき、 l と n の位置関係はどうか。

○ 問 1・問 2 より、直線の位置関係とそのおかれている空間についてわかったことをまとめる。

(問 3)

$l \odot m, m \odot n$ のとき、 l と n の位置関係はどうか。



○ $AB \parallel GH$ のように、直方体の同一平面上にないものについては、特に留意し、 $AB \cdot GH$ によってできる平面を想定させる。

○ 直方体における AB, CD, GH により具体的に考えさせる。

○ 生徒全員に、ヒゴを 3 本ずつ与える。

○ 自由に考えさせる。

○ 問 1, 問 2, 問 3 はプリントして与える。

○ 具体物としてのヒゴは、有限であり、直線は無限であることをおさえて考えさせる。

2 直線の位置関係の空間への依存性の強さを考えさせる。

○ 理解が困難な場合は、直方体で、具体的に考えさせる。

○ 「 $l \odot m$ 」は、 l と m がねじれの位置にあることを示す。

(1) $m \parallel n$

(2) $m \odot n$

(3) $m \otimes n$

○ 「 $m \otimes n$ 」は、 m と n が交わることを示す。

5. 次時への予習課題	<p>○直線の位置関係は、その直線のおかれて いる空間を意識しなければならないことを 理解する</p> <p>○平面 $P \parallel \ell, P \parallel m$ のとき、ℓ と m の位 置関係はどうか。</p>	
-------------	--	--

4 結果の考察

(1) 生徒の反応

本時における生徒の反応から次の点が考えられる。

- ア. 2直線の位置関係(平行・交わる・ねじれの位置)についてはよく理解された。
- イ. 2直線の位置関係がその置かれている空間に強く依存していることは理解された。
- ウ. 空間への認識は深まった。

以上のことは、次のような生徒の反応から推測することができる。

(問1)について、生徒の反応は、最初「 $\ell \parallel m$ 」がほとんどで、「 $\ell \odot m$ 」はごく少数であった。教具としてヒゴを使用させたが、それを机上(平面上)で操作していたゆえである。

生徒の思考は、これまでの図形が平面図形中心で、前時も平面上の2直線の位置関係を取り扱っているためか二次元空間にとどまり、2直線に置かれている空間を考えての思考をした生徒が多くなかったものとする。しかし、生徒の中のあるひとりが三次元空間の操作に気づくと、他の生徒もすぐ気づき、関係をとりえていた。

(問2)について、「垂直(交わる)とねじれの位置」が多かった。このことは、すぐ三次元空間を想定した生徒が多かったゆえと思われる。(問1)での思考にくらべ、図形が置かれている空間を意識する必要があることに気づいたことを意味する。

しかし、2直線の位置関係の違いは何によるか、という問に対して、「平面上と空間上」、あるいは「平面上と空間の中」と答えた生徒がいた。この用語の使用から考えて、空間上と答えた生徒は「直方体の表面」、空間の中と答えた生徒は「直方体の内部」にあたるような空間を思い浮かべていたとすると、空間の広がりがかこれまで正しくとらえられていたか疑問である。これについてはすぐ指導したが、折にふれ、このような点を留意して指導する必要がある。

(2) 2直線の位置関係と空間概念

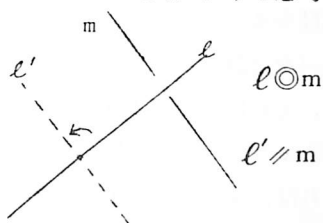
2直線の位置関係について、現段階では、「平行」「交わる」「ねじれの位置」と3つに分類し、この3つの場合を並列的に扱った。いかえれば、2次元空間と3次元空間を並列的に考えたのである。この扱い方が正しかったということは吟味しなければならないことだが、現段階では、この扱いは、正しいと考えた。

しかし、いつか、2次元空間と3次元空間とを統一的に、いかにすれば、2次元空間を3次元空間の部分集合としてとらえさせなければならないと考えている。この統一的に扱う時期をいつにしたらよいかということは、問題点として残っている。

また、統一的に扱う場合のもととなる考え方として、どのようなものを考えるか、あるいは、指導にあたってはどうするかについては、実践はないが、たとえば、次のように、図形の動きに着目するとき統一的に考えることもできるのではないかと考える。

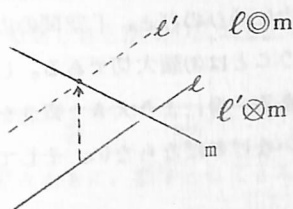
① 「平行・交わる」を「ねじれの位置」の特殊な場合と考える。

(3次元空間における思考)



② 「平行」を「交わる」の特殊な場合と考える。

(2次元空間における思考)



○①, ②をさらに統一的に考える。

図形の動きに着目し、動くことによって、3次元空間にあった2直線が、2次元空間の図形になることから、2次元空間を3次元空間の部分集合と考える。

(3) 空間の教具について

3次元空間における図形の学習は、2次元空間のように、図形を図にあらわすことが容易ではない。そこで、教具のくふうが、学習の効果を高めるために重要なことである。本時においては、3本のヒゴを、直線の代用としたが、このヒゴが、生徒の思考に大きく助けとなったことは言うまでもない。

ただ、私たちが、作りうる教具は、すべて有限のものであり、無限のもの、たとえば、直線を作ることとはできない。ここに、はがゆさを感じるとともに、空間の広がり、単に目で見て学習できないことから、指導のくふうと、さらに教具のくふうを行ない、よりよく理解させていきたい。

(4) 本題材と空間概念の育成

空間という立場で教材を見直すことにより、すなわち、教材がそこに存在する意義やその教材の背景を考えることにより、授業に幅ができ、生徒の思考も活発になった。今まで考えなかった意味を教材にもたせることにより、学習に楽しみが増したためと考えられる。

この題材の指導を通して、生徒の意識に変化が見られたし、本題材の内容そのものが、特に困難なものでないことから、空間概念育成に力をそそぐことができる。このことから、本題材は、空間概念育成のための題材としては、適した題材であると考えられる。

生徒は、空間認識が浅いため、意識づけが素直に受けとめられそうである。この題材での空間概念の育成は、教師のくふうしたいで、いかようにも、生徒を変容させて行くことができるであろう。

中学校第2学年 実践例

題材 図形の内部と外部のちがい (三角形の外心と関連して)

1 指導系統に基づいた本題材のねらい

生徒は図形を見れば、その形または内部空間を意識する。しかし、外部空間は見えていても、関係ないものとしてとらえている。あるいは、その存在に全く気づかない者もいる。したがって、思考が外部空間にまで発展することはめったにない。閉じた図形は、生徒の思考空間をも閉じてしまっているのではないだろうか。この枠をはずし、自由にのびのびと、「空間の広がり」を認識させたい。

与えられた変域の中で思考するということは勿論大切である。しかし、それは、より大きな概念が育成された後に行なわれる思考の方法である。今、より大きな概念を育成しようとしている段階では、思考空間は常に拡大される方向に向いていなければならない。そして、これは、創造性を育成するための条件でもある。

空間概念育成の観点「つながり」「位置」「広がり」「方向」のうち「広がり」を認識させる教材としては、「三角形の外心」「線分の内分・外分」「弓形の内部・外部」が指導系統に位置づけられているが、この他にも、2点A、Bからの距離が等しい点の集まりと垂直二等分線を結びつけたときに、垂直二等分線上以外の空間の存在を認識させるなど、図形教材の各所に「広がり」を認識させるのに適したものがあ

る。このような場面で、外部空間の存在を意識させ、内部で見つかった性質(法則)を外外部にまで発展させて考えるという発想を養う。そして、内部空間と外部空間のちがいを認識し、更に内部と外部の統一的是握を、いずれかの日に生徒が自ら発見したときにこそ「空間の広がり」そして空間概念が大きく育成されることになり、「数量、図形などに関する基礎的な概念、法則の理解を深め、より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力と態度を養う」という中学校数学の目標の1つに迫ることになる。

2 指導の構想

「三角形の外心の位置は、鋭角三角形ならば内部、直角三角形ならば辺上、鈍角三角形ならば外部にある」とだけ認識できたとしても、何ら生きてはたらく能力にはならない。

外心の位置を求める過程において、今まで漠然ととらえていた外部空間を明確に意識させ、関連する教材を適当に与えることにより、外部空間の存在、内部と外部の同質性と異質性を認識させる。そして、与えられた変域(空間)の枠を破って考えるという発想とその楽しさを知らせる。

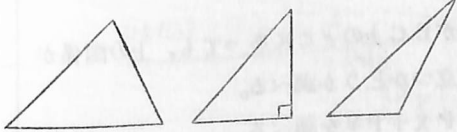
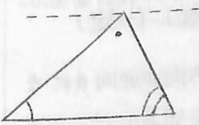
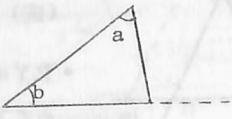
そのために、外心の求め方とその位置(特に、外心が存在するという点では、内部外部は同質であり、いずれにくるかは角の大きさによって条件づけられることを強調する)を指導した直後、続けて図形の内部と外部のちがい(本時)に1時間をかける。

内部外部に重点をおくため、教材としては、できるかぎり既習のわかりやすいものを選ぶ、証明は図の上で納得できればよい程度にとどめる。必要な図はプリントして与えるなど抵抗をできるだけ少なくするように留意した。

3 指導例

- (1) 題材 図形の内部と外部のちがい
- (2) ねらい 内部・外部を意識して図形を見る考え方があることを知らせる。
外部空間にも思考の場が存在すること。
内部空間，外部空間のちがい。
外部空間へ発展する楽しさと空間の広がり。

(3) 展開

指導内容	学習活動	指導上の留意点
<ul style="list-style-type: none"> ○ 三角形により，1つの平面が内部と外部の2つの空間に分けられる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 三角形を見たときに，数学としてどんなことを考えるかを話し合う。 • 図形の内部・外部の意識をもつ。 • 内部と外部は異質の空間かどうか考え話し合う。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ すもうの土俵，バレーコートなどで内部外部の意識を高め，三角形に向かわせる。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 三角形の外心の位置のまとめ。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 鋭角三角形の外心は内部にある。 ○ 直角三角形の外心は辺上にある。 ○ 鈍角三角形の外心は外部にある。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 外心が存在することでは，内部外部は同質である。
<ul style="list-style-type: none"> ○ 外部空間の利用 	<ul style="list-style-type: none"> ○ 外部空間を使っていた例が今までになかったか考える。 • 次の図を見て考えよ。 	<ul style="list-style-type: none"> ○ ①は高さを考えたとき，内部にあるときと，外部にくるときとあることを気づかせる。
<ul style="list-style-type: none"> (• 外部空間の認知) 	<p>①</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ○ ②は1頂点のところへ3つの角を集めるときに外部空間を利用することを気づかせる。
<ul style="list-style-type: none"> (• 外部空間の価値の認知) 	<p>②</p>  <p>③</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ○ ③は外角として，外部空間を利用して来たことを気づかせる。

○外部空間への発展

内部空間と外部空間の同質性, 異質性

(・思考空間を拡げる)

(・外部空間を思考の場としてとらえる)

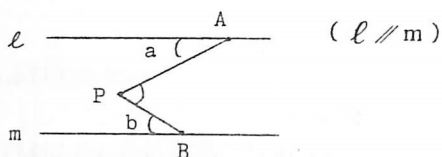
○外部空間への発展

(・性質の発見)

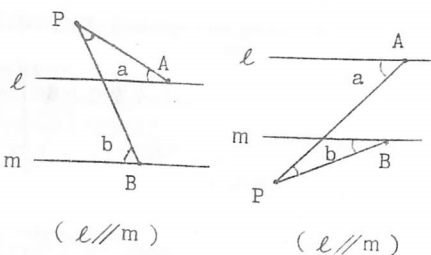
(・思考空間を拡げる)

(・空間の広がり認知)

○次の図において, $\angle P = \angle a + \angle b$ であることと, その理由を復習する。



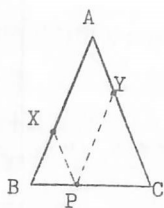
○点Pがどこにあっても, $\angle P = \angle a + \angle b$ が成り立つかどうか調べる。できるだけ点Pを別の状態の所へもっていきよ。



○ $\angle P = \angle a + \angle b$, とその理由は既に習っているの
で記憶を引き出す程度にする。

- 点Pを自由にとり終った後に,
2本の平行線で平面は
(イ)3つの部分に分けられることに気づかせ,
(ロ)平行線ではさまれた部分を内部, それ以外を外部と考えさせる。
- 外部においても, $\angle P$ は, $\angle a$, $\angle b$ と関係をもつことを発見させる。

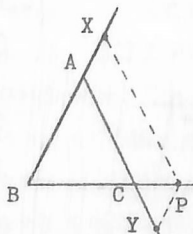
○



△ABCは二等辺三角形
Pは底辺BC上の点
 $PX \parallel AC$, $PY \parallel AB$
のとき,
 $PX + PY$ の大きさは
どうなるか考える。

○ $PX + PY = AB$ の理由を考え合ひ。
(変) (変) (一定)

- 点PがBC上のどこにあっても, 上の関係が成り立つかどうか調べる。
- 次の $PX + PY$ を調べる。



- $PX - PY = AB$ を知る。
(変) (変) (一定)
- PYの方向が逆向きになることを知る。

○△ABCはプリントして与えておく。Pを自由にとらせ, PX, PYを実測させ発表させて一定を気づかせる。

- あっさりと扱う。
- 点PをBCの延長上へもっていく生徒が多く出ることを期待する。
- $PX - PY = AB$ の証明は重視しない。ただ外部にも $PX + PY =$ 一定に相当する関係があることを強調。

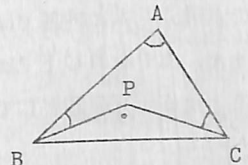
4 結果の考察

(1) 生徒の反応

㉞ 全体的な傾向

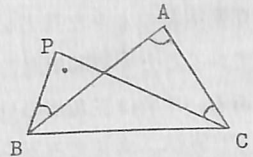
- 1つの三角形を見て、平面が内と外の2つの部分に分かれているなどという見方が生徒の意識にのぼるはずはない。まして、内と外とは異質の空間であるという考えは浮かばない。結果は予想と一致した。しかし、「すもうの土俵、バレーのコートの白線は明らかに、内と外の2つの部分に分けるためにもうけられた図形である。数学でもこのような考え方はできないだろうか」ということから進めたこの授業の後では、生徒は数学上の図形でも内と外の意識をもって考察するようになってきた。

その一例を上げると、後日、右図の $\angle BPC = \angle A + \angle ABP + \angle ACP$ の理由を考える問題に出会ったとき、解決後、一生徒からすぐに「点Pを外部へもっていったらどうか」という発言があり、全員がそれに直ちに反応して考え始めた。



ざんねんながら、 $\angle BPC = \angle A - \angle ABP + \angle ACP$ （右図の場合）

という関係は、生徒の力では発見できなかったけれど、何かしらそのような関係が存在するであろうと予想していたと答えた者が多く、説明がわかったというのとは別の満足感が教室にあふれたように思えた。



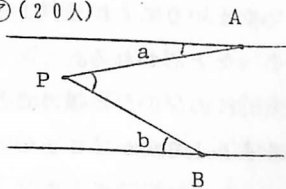
そしてこのことは、円の性質（円周角と中心角の関係）を理解するとききっと役立つことであろう。

㉞ 授業中に見られた反応

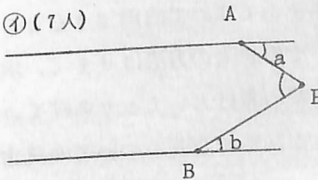
- 鈍角三角形の高さが外部に引かれた垂線で表わされることに自分で気づいた生徒はいなかった。しかし、高さを書き込むよう指示されたときに「アッソーカ」「アーアー」「なるほど」という声が方々から聞こえた。これで外部空間へ引き込むねらいは達せられた。
- 内角の和の求め方は既に習っているので抵抗はなく、次第に外部空間を意識することに慣れてきた。
- 平行線の問題で、生徒がどこへ点Pをもっていったかをまとめると次のようになる。（生徒数25人）

(6つの状態)

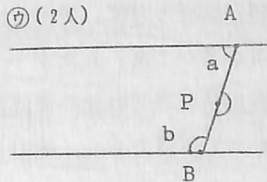
㉞ (20人)



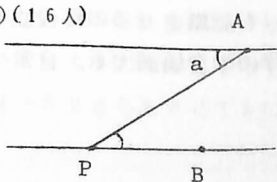
㉞ (7人)



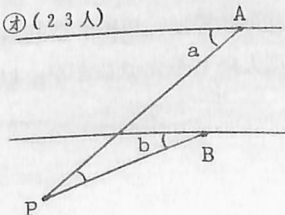
㉞ (2人)



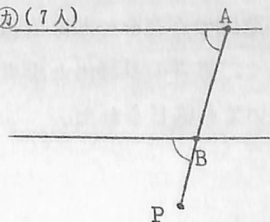
㉞ (16人)



㉞ (23人)



㉞ (7人)



ほとんどの生徒が、はじめに㉞を書き、2番目に㉠または㉡へ進んでいる。また、全員が㉡または㉠をかき、㉠または㉡を書いている。すなわち、思考は内部から外部へと発展している。

㉠については、 $\angle P = \angle a - \angle b$ の関係は容易に見つけたが、㉡については、 $\angle P$ をどう $\angle a$ 、 $\angle b$ に関係づければよいのかわからない生徒が多かった。いずれにしろ、点Pがこれだけ自由に動けばねらいは達成されたといつてよい。

- 二等辺三角形の $PX + PY = AB$ (一定) は実測させたので容易に見つかり、証明もよく納得できたし、直ちに延長上への発展がみられた。この場合、X、YがBA、ACの延長上にくること何の抵抗も示さなかった。 $PX + PY =$ (一定) でないことが見つかったとき、すぐに、それに代わる関係を見つけないかという意欲がわき、 $PX - PY = AB$ も容易に見つかった。ここで、空間の広がりをはっきり感じたと思う。そして、平行線の $\angle P = \angle a - \angle b$ と二等辺三角形の $PX - PY = AB$ との共通点(共に内部では和、外部では差)を指摘されたとき、教室の中にある種よりのこびが流れた。また、点PをBC上ではなく、三角形の内部にとつたらどうか、外部にとつたらどうかという発言もあったが研究課題としておき、教室ではとり扱っていない。

(2)

- 本時のような題材は、指導系統の中にはない。したがって、個々の教材のとり扱いを通じて、その都度本時のような見方をさせていけばよい。ただ、どこかで一度このような意図でとり上げて指導しておくことが空間概念の育成に大きく役立つし、また、図形を見る観点を多様化させる上でも必要である。本時は三角形の外心の位置関係と関連させて発展させてみたのだが、やゝ必然性が弱くすっきりしない。考えてみたい問題である。
- とり扱った例は2つとも、内部では和になり外部では差になる。そのため、内部と外部の差異を印象づける結果になったが、外部空間にも内部と同じように何かの関係が存在するのだという認識はできた。勿論、内部外部の統一的把握が望ましく、平行線の場合 $\angle P = \angle a - \angle b$ を外部に出た角を負と考えさせて、 $\angle P = \angle a + (-\angle b)$ として統合し、二等辺三角形の場合 $PX - PY = AB$ を逆方向に出た線分を負と考えさせて、 $PX + (-PY) = AB$ として統合させたい。本時ではその方向へ生徒が進むよう配慮して展開してある。
- 従来、図形指導は論証指導の素材とされたために図形のもつ性質を細かく分析的に考察し、与えられた問題の図形の中に、習った定理をあてはめて活用できる場所はないかということに全精力をそそぐ場面が多かった。したがって、その思考の方法はせまく、求心的であったと思われる。今、図形指導を空間概念の育成のための素材としてとりあげてみて、直感的にのびのびと扱うことも場合によって必要であり、そのことが図形や空間についての見方を豊かにする上でかかすことのできないものであることを感じている。

外部空間の存在をつねに意識させた図形指導は、単に「空間の広がり」を認識させるのに役立つだけでなく、思考の多様化と思考空間の拡大にも役立つことが、以後の数学の学習場面でも、日常生活面においても感じられた。

中学校第3学年 実践例

題材 線のつながり(閉曲線)

1 指導系統に基づいた本題材のねらいと問題点

生徒にとって、これまでに学習してきた図形は、ユークリッド空間での図形の考察が中心であったし、また、これまでの空間概念の育成においてもユークリッド空間における「位置」「広がり」「方向」「つながり」などの認識であった。この中学校第3学年の段階に至って、初めてユークリッド空間から逸脱して位相空間の存在へ目を向けるのである。すなわち、今までの固定された観念を打ち破り、点・線・面のつながりから図形を考察することによって、より柔軟な考え方ができ、それが空間認識を深める足場になると考えられる。また学習指導要領によれば、この指導の目的は、「点・線・面のつながりに着目して図形を考察し、直線、平面および空間の広がりについての理解を深めて、位相的な見方など図形や空間についての見方を豊かにする」ことであるとみられることは、本題材が、空間概念育成に有効な教材であることを意味している。そして、本題材を空間概念育成の立場に立ってみれば、ある観点から図形を類別することであり、それは、図形のおかれている空間を意識することにほかならない。生徒の図形についての認識を、ユークリッド空間にとどめることなく、位相空間においても、図形のおかれている空間を意識させ、図形の類別の観点を生徒自身が発見、創造し、自分なりの、図形を同じと見る見かたができれば、本題材のねらいは達成されたと見られると考えたのである。

しかし、図形の類別の観点を、図形と図形の相互比較の中だけで発見させるだけでなく、置かれている空間によってその観点が異なることを意識づける教具が必要であるという指摘が実践後なされた。今回の研究では、そこまで考慮せずに実践に入った点が大いに反省させられる。どのような教具がそれに値するものであるか、今後検討すべき問題点とした。

2 指導の構想

ここでは、空間を全体集合としてとらえさせ、その中の図形の類別を考えるのであるから、まず、その類別の観点を生徒に明確にとらえさせなければならない。また、その観点を生徒から引き出すことが、必要であると考えられる。そのためには、論理的な思考よりも生徒の直観を重視した指導が大切であると考えた。

この題材の導入としては、この教材は位相変換(1対1, 両連続な変換)であるから、合同変換一相似変換一アフィン変換一(射影変換)一位相変換を比較することによって、図形の位置, 形, 大きさ(面積), 角などを問題にしないで、点・線・面のつながりに着目すればよいという観点をまずつくりたい。この新しい観点は、生徒の今までの経験の中では意識していなかったことであるが、生徒の直観的考察によっても十分把握できるものであると考えられるので、点・線・面のつながりに着目するという観点さえはつきりとらえさせておけば、あとは生徒自身がこの観点到着して、発見的、発展的にとらえる

ことができるのではないかと考える。

閉曲線 — 一筆がき — 閉曲面 — オイラーの定理においても、生徒の直観的考察によって発見的、発展的に扱いたい。すなわち、ある観点ではちがう図形（例えば、辺の数からは三角形と四角形）が他の観点では同じと見れる（単一閉曲線）という観点の発見と、自分なりの図形の柔軟な見方を伸ばしたい。また、そのような観点の育成には、生徒の思考（頭の中だけで考えること）だけでは達成されないと思うので、できるだけ作業（操作）をとり入れて考えさせたい。

本単元（図形のつながり）の指導計画

(1) 点・線・面のつながり

- ① いろいろな変換 — 点・線のつながり (1時間)
- ② 線のつながり — 閉曲線 (2時間) ……本時 1/2
- ③ 閉曲線の性質 — 内部・外部, 分割 (1時間)
- ④ 一筆がき (1時間)
- ⑤ 面のつながり — 閉曲面 (1時間)
- ⑥ 閉曲面の性質 — 内部・外部 (1時間)

(2) オイラーの定理

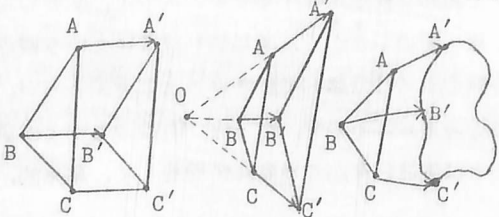
- ① 線状図形 (1時間)
- ② オイラーの定理 (2時間)

3 指導例

(1) 題材 線のつながり（閉曲線）

- (2) ねらい
- ① 同じつながりの意味を理解させ、その観点から図形を類別させる。また、その中で閉曲線をとらえさせる。
 - ② 線のつながりの観点に立って、全体集合から集合づくりをさせることによって、空間概念の育成をはかる。

(3) 展開

指導内容	学習活動	指導上の留意点
<p>1. 変換から線のつながりへ（前時の復習）</p>	<p>○前時の復習をする。 — 図形の変換によって変わらない性質を再確認する。 （合同変換）（相似変換）（ゴム膜上の変換）</p> 	<p>○前時の学習のまとめから、ゴム膜上の変換（位相変換）では、<u>点の順序</u>、<u>線のつながりかた</u>が変わらないことをもう一度しっかり確認させる。 （OHPによる）</p>

2. 線のつながりかたによる図形の類別

○ 次の10この図形を、線のつながりかたに着目して分類をする。



○ 分類したものは、どんなところがちがうか考え、話し合う。

$$A = \{ ①, ④, ⑤, ⑧ \}$$

$$B = \{ ②, ⑦, ⑨, ⑩ \}$$

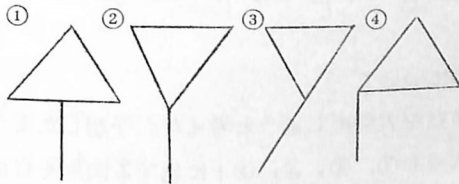
$$C = \{ ③, ⑥ \}$$

3. 図形が位相的に同じであること。

○ Aのような図形をゴムひもで3つ作って、ノートに書いてみる。(TPで発表)

○ 線のつながりかたの同じ図形を知る。

○ 次の図形は、つながりかたの同じ図形かどうかを考える。



4. 閉曲線の意味

○ Bのような図形をゴムひもで3つ作って、ノートに書いてみる。(TPで発表)

○ Bのような図形を閉曲線(閉じた線)ということを知る。

○ A, B, Cの図形のつながりのちがうところを、もう一度確認しておく。

○ 線のつながりかたという観点をしっかりおさえる。

(大きさ、形などは考えないことを強調する。)

○ 同じつながりかたの意味を明確にとらえさせる。

○ BとCの区別 → 輪が1つ、輪が2つ交わっている。

○ 伸び縮みさせたり、まげたりしてもよいが、切ったり、つないだりしないという制約を守ればどんな形でも作ってよいことを十分印象づけたい。

○ 位相的に同じ → 線のつながりが同じ → 図形をまげたり、伸ばしたりして、その1つから他に重ねることができる。(ゴム膜上の変換)

○ AとBのちがいは → 閉じているかいないかであること。

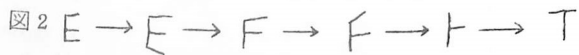
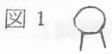
○ Cのような図形は閉曲線といわない。(ここでは、単一閉曲線に限った。)

<p>5. 図形の類別 (線のつながりかたに着目して)</p>	<p>○ 次の英文字を、線のつながりかたによって分類する。</p> <p>A C D E F I L M O R T W X Y</p>	<p>○ 線のつながりかたが同じであることの意味をしっかりとつかませて練習させる。</p> <p>{ A, R } → R { C, I, L, M, W } → I { D, O } → O { E, F, T, Y } → T { X } → X</p>
-------------------------------------	--	---

4 結果の考察

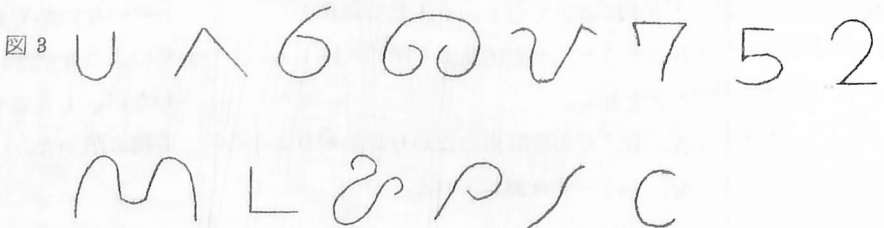
(1) 単元の指導計画と本時の指導との関連から

前述したように、本単元の導入として、変換のまとめ(2学年の移行段階では、合同・相似変換はかなりくわしく、アフィン変換は軽く扱ってきている)からスタートし、今までとちがった変換(ゴム膜上での変換——位相変換のモデル)を考えさせた。この変換で変わらない性質は何かを考えさせることから、点・線のつながりかたを浮きあがらせ、本時の線のつながりの指導に入った。ここで線のつながりかたとは何かを直観的にとらえさせ、その見方によって図形を類別させようとしたわけであるが、変換の導入によって、生徒は、今までの空間とちがう空間を意識したと思われる。以後の学習においてつながりかたが同じ図形であるかどうかを変換に立ちもどって考えさせると案外簡単に理解したようである。例えば、AとRが同じであることは、下図1のように変換されることから、また、E、F、Tが同じであることは、下図2のように変換されていく順から理解できる。

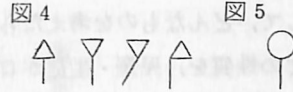


(2) 図形のつながりと生徒の直観的考察について

本時の指導の中では、生徒の直観的考察を大切にしようと考えた。予想したように、最初の10個の図形の類別はかなり簡単にできたし、 $A = \{ \text{①, ④, ⑤, ⑩} \}$ に属する図形を自由に作らせても、色々なものができた。その一例を図3にあげておいた。



このように、生徒はかなり自由で柔軟なものをもっている。しかし、次の図4の形については、同じであるとみられない生徒がかなりいたし、英文字の分類についても、 X を $\{T, Y, \dots\}$ のグループと同じであるとみている生徒があり、必ずしも直観だけでは図形のつながりかたを理解することができないことがわかった。今までの学習——角、直線と曲線などに固執した見方が中々ぬぐいきれず、既成概念を破ることの難かしさを痛感した。図4の図形がつながりかたの同じ図形であることは、ゴム膜上の変換を想起させ、図5と同相であることに気づかせることによって理解させることができた。他に、線の分割などを理解させることによって、もっとよく



(3) 図形の類別の観点と空間概念の育成について

図形の類別の観点を明確にとらえさせ、その観点を生徒自身につくらせることが、空間を認識させ、空間概念を育てることであると前に述べた。その点から考えると、本時の導入では観点を明確にするこのみにとらわれすぎ、生徒から出る自由な発想を引き出すことをしなかったことは失敗であった。そこで、最初に観点を与えずに、生徒に自由に観点をつくらせて類別させた方がよいかと考え、別のクラスでの授業で指導した。そのクラスでは、色々な観点はでてくるが、点・線のつながりに着目した類別はでてこなかった。——つながりを引き出すに適した図形を考える必要がある。

生徒が考えられる類別の観点としては、次のようなものがある。

- ① 点に集まる線の数
- ② 空間を分けている数(特に、閉じている線と開いている線の区別)
- ③ 一点から出発してもとにもどる(閉曲線、一筆がき)
- ④ 線が離れている、くっついている。
- ⑤ K_1 の値($K_1 = t - s$, t は点の数, s は線の数)——オイラーの標数
- ⑥ K_2 の値($K_2 = t - s + m$, t は点の数, s は線の数, m は面の数)——オイラーの標数
- ⑦ 線の分割点, 非分割点

特に、本時の指導に、曲線が空間を分ける数によって類別できることを生徒の中から引き出す必要があったのではないかと思う。それは、次時の閉曲線の内部・外部の理解につながることであり、それが、空間の広がりやを認識させるには、格好な教材であると考えられるからである。一つの観点をきめて、図形を色々な角度からながめることができるようになる指導については、不十分な指導であったので、今後の課題として残しておきたい。

(4) 位相変換の教具と空間概念について

位相変換は「1対1両連続な変換」ということから、その図形間の対応に留意した指導例が多い。この実践例もその考えに基づき、ゴムひもを使うなど、生徒に具体的なイメージを与えようとした。これは生徒の目を位相空間に向けようという意図で、前述のとおりである。しかし、図形が置かれている空間に依存することを生徒に明確にとらえさせるには、ゴムひもでなくゴム膜状のものが必要ではなかったか。空間それ自体が位相変換をするとき、置かれている図形の変化の様相をとらえるところに真の空間概念の育成がある。その点、今回の実践はじゅうぶんな配慮に欠けていたことを反省している。

IV お わ り に

われわれ研修員が、研究主題に取り組み、空間概念育成の図形教育における位置づけを考えるにあたり、最も協議に時間をついやしたことは、「空間」や「空間概念」をどう認識するかということ、これについての全員の共通理解に達することであった。そして、本主題に基づく研究を推進する第一段階の作業として、下記の2つの内容について論議をかわしあった。

- (1) 空間概念として、どんなものを考えたらよいか。
- (2) 図形についての性質を、児童・生徒が自分で見出し、図形の見方をつくっていくための空間概念の育成はどうあるべきか。

これらについての討議では、空間とは次元的な意味でなく、全体集合として受けとめるものや、空間は単位量によりうめつくされる性質(空間の充てん性)のものであるなど、はじめから意見が同じであったわけではなく、激しく論議されたうえ、空間概念育成の指導の意義で述べたような内容で共通理解を得たものである。今日の図形教育で、空間認識の必要性がいわれているが、現場では空間についての受けとめ方がまちまちで、今後の問題として残されている現状であるので、児童・生徒への空間概念育成のための実際指導において、この研究が、算数数学担当教師に対する大切な提案であると考えている。

このような空間認識についての共通理解に基づき、小・中一貫した指導系統を作成し、指導内容を系統的発展的に配置した指導計画を考え、各自分担した学年で研究授業を通し、検証し補正してきた。そして、その方法については、一人の研究授業者の授業について数人のグループで授業記録をとり、それを全体の協議の場で分析し、研究がすすめられた。

しかし、これらの研究作業は、時間的制限のため完全とは言えず、今後研究の余地を残している面が多い。しかし、研究主題に基づくわれわれのささやかな研究が、現場の算数数学担当教師の図形指導に役立つものをもっていると確信している。

この共同研究は、全員の共通な考えを確かめながらすすめてきたのであるが、研究内容については、主として次のように分担した。

小学校：1年(保坂)，2年(林)，3年(檜木)，4年(島田)，5年(片桐)，6年(関一夫)

中学校：1年(加茂川)，2年(本海)，3年(田中)

研究内容の構成など：(石塚，町田，関恵一)

文 献

明治図書：算数教育NO147,161

明治図書：数学教育NO141,142

金子書房：小学校算数教育現代化全書 川口 延ほか(1969)

金子書房：中学校数学教育現代化全書 大野清四郎ほか(1970)

近代新書：空間と図形 小高俊夫(1968)

明治図書：小学校新指導要領の指導事例 算数科編4 原弘道(1971)

明治図書：図形とその指導 日本数学教育会(1968)

次の各社の教科書を利用した。東京書籍，大日本図書，学校図書，教育出版，啓林館，大阪書籍