関数概念の形成に関する調査研究

目　　次

第一章　研究の構想

I　研究の趣旨

1.　問題の所在

数学教育の現代化が提唱され，これに関連して集合の考え方や関数の指導に関する計画や実践が多く発表されつつある。数学教育の現代化のめざすところは端的にいって，統一化，単純化，明確化の三点にあるといってよいであろう。いいかえるならば，むだ・むり・むらのないカリキュラムとそれの指導が要求されていると考えてもよいであろう。

このむだ・むり・むらのないカリキュラムとそれの指導の基底になるのは，発見的，創造的思考が授業の中心となることである。発見的・創造的思考が授業の中心となるためには，少なくとも児童生徒に数学的な見方・考え方を育成しておかなければならないと考えられる。

この数学的な見方・考え方とは具体的にはどんなことであり，またそれをどのようにすれば効果的に育成できるかの結論が出されていないのが現状ではないだろうか。

さてこの算数・数学の全領域に必要であり，また発見法を主体とする現代化の立場にたった算数・数学教育をささえる数学的な見方・考え方が，それぞれの立場の人によって意味規定の仕方が異っているのでこの意味規定をはっきりさせることにする。

まず学習指導要領小中学校算数・数学科編にのべられている「数学的な考え方や処理の仕方」や現今数学教育研究等に使われている「数学的な考え方」「数学的な見方・考え方」の三つのものを，意味の上では余り大きな違いがないものとして，この小論では区別しないで使用する。

次に数学的な考え方について，昭和３１年の高校指導要領数学編がのべている。それは数学的な考え方を中心概念ということばで説明しており，その中心概念の内容を

a　概念を記号で表わすこと　　b　概念・法則などを拡張すること

c　演えき的な推論によって知識を体系だてる　　d　対応・依存関係をとらえる

の4項目であるとしている。

また「数学的な考え方」とは何かという問いにたいして，「数学におけると同じように定義をしようとすることは数学的でない」とか「むしろ文章などで形式的に概念規定してしまうより内面的に発展していくものとした方がよいと考えられる」などといろいろな説が発表されている。

これらの説のなかで適切に意味規定をしているのは東京教育大学教授の小西勇雄氏である，それによると「数学的な概念・原理法則などを必要とし，それを生み出していく母体となると思われるような見方・考え方を数学的な考え方とする」である。

ところが小西氏の説によるとしても実際，指導にたずさわるものからすれば数学的な考え方のとらえ方はまだ具体的とはいえない，これを実際に現場の教師が指導教材のねらいとして重点的にとり入れや

すいようにもっと低次の段階で，数学的な見方・考え方の意味規定を適切に指摘しているのは，横浜国大の原弘道氏である。原氏によれば

「数学的な見方・考え方は学習指導要領に示されている領域のどれかに属するものではなく，どの領域とも関係があり，各学年にわたって一貫している数学独特な見方・考え方である」　これを分析すると次のような項目に大別できよう。

(1)　集合の考えを用いること。

(2)　関数的な見方・考え方を用いること。

(3)　関係概念を理解して用いること。

(4)　算数・数学の構造を理解して用いること。

(5)　抽象化・記号化すること。

これで数学的な見方・考え方が全部尽くされたわけでない。すなわち，概念・法則の拡張，解析的方法と図形的方法との関連においてものごとを考える，推測統計などをこの5項目のどれかに含めなければ全部が尽くされないと付記している。」

現代化が要求する発見的・創造的思考が中心となる学習指導が行なわれるためには，数学的な考え方が必要でありこの数学的な考え方の一分野を占める関数的な見方・考え方を育成することの教育上の意義は大きい。関数的な見方・考え方を児童生徒がじゅうぶん駆使できるためには，関数的な見方・考え方と表裏の関係にある関数概念が形成されていなければならない。したがってこの関数概念の形成の様態を知ることは，数量関係，関数教材の指導の改善の一資料として役立つものであると考える。

2.　関数概念にたいする基本的な考え

関数概念とは何か，これを一元的に定義づけたりとすることはむづかしい。しかしこの小論をすすめるために意味内容を規定しよう。

(1)　算数・数学学習の特徴は，概念的思考がその中心をなす

このことは，「算数・数学学習にとっては各種の概念が形成されていなければ学習効果が期待できないことを意味するとともに，さらに数学的な知識や技能を自由に使いこなすことができるためにもやはり概念が形成されていなければならないことをも意味する」* このような立場からすれば，数学についての概念形成を効果的にすることは，数学教育の目標の一つであるといってもよいであろう。

(2)　関数概念の形成は現代化へのねらいの一つである

現代化の視点で数学教育を展望すると，数・量・図形の三分野を通す概念として三つあげることができるといわれている。それは集合・構造・関数である，このうちの関数について変化・対応の概念を中心にそれに付随する各種の概念を形成することは現代化のねらいと一致することになろう。

(3)　関数概念の分類

算数・数学の関係は大部分は対応と依存の関係であって，これはまた変数間の対応や依存の関係と統計的な変量についての関係とに分けて考えなければならない。だから関数概念の形成は，2つの集合の

---

*　中等数学教育研究　大日本図書　page 95

要素および要素間にいかなる性質が存在するかをみぬくことによって可能になる。関数概念の領域は広いが，対応と変化の窓口より分類してゆけば関数概念という場合はおよそ次のようになろう。

a　変化の概念　　　　　　　　　b　対応の概念

c　増分の概念と変化率　　　　　d　関数関係の表・式化・グラフ化

3.　概念形成におけるストラテジー(strategy)について

『思考心理学においてストラテジーはつぎのように定義されている。ある概念が形成される過程は一連の決定(A series of decisions)とみることができる，たとえば「哺乳類」ということばに遭遇したときまず「哺乳類」という概念(Concept)を学習すべきか，「哺乳類」に属する動物をひとつひとつ暗記すべきかというような，いわば課題の性質についての決定をする必要がある。ここで概念を学習するということになれば次の段階として学習者の仮説(「哺乳類」という概念はa，b，c……の属性によって定義されるのではないかという)が実例に照らして試験され，その仮説が正しいらしい，誤っているらしいという決定がなされる。仮説が誤っていた場合には仮説の変更についての決定がなされなければいけない。もし仮説が正しいらしいということになっていれば，その仮説の一般性を検討するために次にどのような事例を要求するかの決定が行なわれたり，あるいはあたえられた事例のどの面を観察するかという点の決定がなされる。

このように連続する決定が，ある概念に到達するための段階になっているのであるが，先行する決定如何によって以後の可能性は制限をうける。したがって連続する決定の間にはある規則性や型がみられるであろう。決定遂行におけるこのような型(Pattern)をストラテジーとよぶ。

このような型(情報・獲得・利用・記憶などにおける)は，ある目的(objectives of strategy)に応じるものであって，その目的としてはたとえばつぎのようなものがあげられる。

a　もっとも少数の事例で概念に到達すること。

b　所要の事例は多くなってもよいから，確実に概念に達すること。

c　概念に到達するのに，推定とか記憶とかの負担を最少にすること。

d　概念に到達するまでに，誤ったカテゴリーを立てる回数を最少にすること。

このストラテジーはかならずしも情報の獲得，利用についての意識的な計画である必要はない。さて概念形成における学習者の側のストラテジーは上のように考えた上で，教授者の役割を考えると，それは学習者の概念形成過程における決定遂行の統御でなければならない。つまり学習者の情報の獲得，利用を教授者の側から事例の提示，仮説を発表させるなどの手段によって統御することが授業の内容でなければならない。* 』

学習者の概念形成のストラテジーの統御のためには，学習の出発時点における学習者の状態を知ることは欠かすことができない。学習者が「関数概念」について全く0の状態にあるならともかく，学習者はかなり先入見をもっているものである。

授業は一応この学習者(児童生徒)の先入見から出発しなければならない。したがって関数概念の形

---

*　国立教育研究所　紀要　第47集　page 2

成の様態をさぐるために，何年生までの先入見を知る必要があるのか，関数概念の領域・調査のための経費・担当研究員の数等から調査対象学年を（後述）決定しなければならない。

この調査では直接に概念の様態を調査できないので，教材にたいする学習者の応答から側面的に概念の様態をみることにした。そのねらうところは現在の数学教育が児童生徒に，どのように関数概念を形成させているかを明らかにすることである，つまり児童生徒の「関数概念」形成のストラテジーの統御がじゅうぶんに行なわれていないところを明らかにし，数学教育の指導法における改善の資料としたいのである。

4 研究のねらい

関数教材（数量関係）の指導は，多方面から研究されているが関係の概念それ自体が広い領域にわたっており，何を，いつ，どのようにして教えたら効果的な指導が行なわれるということが，はっきりしていないのが現状である。だから文献研究から関数概念の意味規定をするとともに概念形成が効果的になるための指導方法の条件をみつけたい。

関数の定義・対応と従属関係・変数の概念・変化と増減などを，教材・生徒・教師の３つの要素の関連から，どの教材で，どんなことを重点的におさえたら学習者（児童生徒）のストラテジーの統御がじゅうぶんに行なわれるかを実験的に明らかにしたい。

以上のねらいを達成するために，本年度はその事前段階として，児童生徒の概念形成のストラテジーの統御のために児童生徒の関数概念の様態を実態調査し，次の研究の仮設がたてられるかどうかを検討しようとしたものである。

第二章 研究の内容と方法

I 研究内容と方法の概要

学校教育がめざしているのは，言語化し伝達可能なまでに洗練された概念を正しく形成すること，ならびに形成するためのストラテジーを身につけさせることであると考えられるので，この研究では児童生徒がその水準にどの程度到達しているかを調査する。調査する内容は，前述したように変化の概念・対応の概念・グラフ化の概念などを中心にして，関数指導に必要な基本的な概念がどのように形成されているかを，指導された教材によって分析する。

調査研究は団体テスト形式をとり，補充調査を必要に応じて加えた。

調査問題は，関数教材（数量関係も含む）と関数概念の両面から検討をして，調査問題はＯ，Ｐ，Ｑ Ｒ，Ｓ，を作製した。このうち調査問題Ｏ，Ｐ，Ｒは小学校用であり，特にＲはＯ，Ｐの補充調査として作製したものである。さらに調査問題Ｑ，Ｓは中学校用で，ＳはＱの補充調査問題である。

調査結果の処理は，児童生徒の応答傾向を中心に検討し，概念形成の立場から考察することとし，特に中学校では，上中下位群によって概念形成の様態がどのように違うのか，などについても考察する。

Ⅱ　研究対象の決定

1.　調査対象校

調査対象校を選ぶにあたって考慮したおもなる条件は，小学校においては，

(1)　本県において，かなり学力が高いと考えられる。

(2)　数量関係の指導が研究的になされている。

(3)　数学を専攻した教員がいる。

の３点である。

中学校では，生徒の学力差が大きくなることから

(1)　能力別編成で数学を指導している学校とそうでない学校

(2)　(1)の学校が同一市町村にあって，一学年の生徒数が２００名以上であること。

の２点である。

上記の条件により，小学校は長岡（Ａ校），新津（Ｂ校），高田（Ｃ校）の３市より各一校ずつ選び，後でのべる調査問題Ｏを，Ａ，Ｂ校に，調査問題ＰをＣ校に，補充調査問題ＲをＡ校にそれぞれ実施した。中学校は柏崎市より２校を選び（Ｄ校，Ｅ校），調査問題ＱをＤ，Ｅ校に，補充調査問題ＳをＤ校に実施した。

2.　調査対象学年

研究のねらいからすれば，全学年にわたって調査すべきであるが，研究期間や研究担当者の人数および，とりあげようとする方法などから考えて，調査対象学年を小学校６年生より中学３年までとした。

調査問題および調査対象とした学年，学級数，児童生徒数を表示すると次のようになる。

（表１）

時　　期	学　校	学年・学級数・人数	調査問題群
1967. 10	Ａ小学校	６年生・３　・　１２０名	O_1，O_2，O_3，O_4
1968　2	Ａ小学校	６年生・３　・　１２０名	R_1，R_2，R'_1
1967. 10	Ｂ小学校	６年生・３　・　１０５名	O_1，O_2，O_3，O_4
1967. 10	Ｃ小学校	６年生・５　・　１９３名	P_1，P_2，P_3，P_4
1967. 10	Ｄ中学校	３年生・５　・　２２７名	Q_1，Q_2，Q_3，Q_4
1968　2	Ｄ中学校	１年生・１　・　４２名	R_1，R_2，R'_1
1968　2	Ｄ中学校	２年生・１　・　４１名	R_1，R_2，R'_1
1968　2	Ｄ中学校	３年生・５　・　２２７名	S_4，S_5，S_6，S_7
1967. 10	Ｅ中学校	３年生・６　・　２６８名	Q_1，Q_2，Q_3，Q_4

・Ｄ中学校の１年生のクラスをD^1，２年生をD^2，３年生をD^3とする。

・Ｄ中学校の３年生は，上・中・下位群に編成されている（知能偏差値と毎学期の学力点によって）。

3. 調査問題

調査問題はペーパーテスト形式をとり，いずれも数量関係，関数関係の指導後に調査をする目的で作ったものである。しかも概念形成の様態をさぐるのであるから，使用している教科書によって各学校間に有利・不利の条件が混入しないように，本県で使用されていない教科書を中心に問題をえらび，そのまま使用した問題もあるが，一部変更したものもある。（教育出版）

4. 調査問題のねらい

(1) 調査問題 O_1，P_1，Q_1，R_1，R'_1は比例概念（定義）の形成の様態をみる。

(2) 調査問題 O_2，P_2，Q_1の(3)は反比例概念（定義）の形成の様態をみる。

(3) 調査問題 O_3，P_3，Q_1の(1)は一次関数の概念形成の様態をみる。

(4) 調査問題 O_4，P_4，Q_4，O'_4，R_2，S_4は対応関係・変数の概念のグラフ化の様態をみる。

(5) 調査問題 Q_5，Q_6，Q_7，S_5，S_6は変化率と立式の概念形成の様態をみる。

(6) 調査問題 S_7は，児童生徒にどんな形式で問いかけたならば概念形成過程におけるストラテジーの統御をじゅうぶんに行なえるかをみつける。

5. 調査時期と方法

調査対象とした学校数，学級数が，かなり多いので調査の実施は，中学校では数学担当者，小学校では，各学級担任者に依頼した。それは同一時期に実施したかったからである。

調査時期は（表１）にあるように，１９６７年１０月と１９６８年２月である。

調査結果表にはどの対象に調査をいつ実施したかを，たとえば（Ａ：１９６７. １０. 小６：Ａ小学校６年生に１９６７年１０月に実施ずみ）のように表の上側に記載しておく。

調査の実施にあたっては，次のように各学校に依頼して条件をできるだけ規定した。

「この調査では，小学校・中学校の数量関係と関数関係の教材で，児童生徒がいかなる状態で関数概念を形成しているかを調べるものです。したがって学力調査ではありません。この調査は小学校３校中学校２校について行ないますが，できるだけ学校や学級ごとの比較等はさけるようにします。

(1) 調査用紙の枚数確認のうえ配布してください。

(2) 調査問題のはじめのところに注意がありますので，よませてください。

(3) 実施時間は小学校は４０分，中学校は４５分です。

(4) 調査問題は概念についてのものですから，よまないでください。なお問題は伝達可能なまでに言語化された状態の上での概念形成をみるものですから，文章も意識して焦点をぼかしてあるものもありますから質問などがあっても，それには指示をあたえないでください。

第三章　研究結果の概要

I　調査の結果とその考察

1.　調査結果の処理について

(1)　調査結果は，アチーブテスト形式は応答率（もしくは正答率）を，自由記述形式では，児童生徒の応答から応答類型をつくり，それの応答率をみた。

(2)　応答類型には一定の傾向がみられるか，学年と概念の連関，概念の変容について考察する。

(3)　できるだけ地域差や学校差学級差を無視して，児童生徒の応答傾向もしくは応答率から概念が形成されている・いない，を決定した。

(4)　統計的検定は必要と考えられたときだけ実施した。

(5)　調査問題を，分類した概念ごとに分（O，P，Q……）け，それぞれの概念ごとに考察した。

2.　比例概念について

(1)<調査問題O_1>

時速4Kmの速さで歩いている人がいます。この人があるいた時間ときょりの関係は，左の表のようになります。

時　間（時）	1	2	3	4	5
きょり（Km）	4	8	12	16	20

(1)　2時間をもとにして，時間が2倍4倍になるとそれぞれのきょりはどうなりますか。　答

(2)　歩いた時間が1時間ふえると，きょりは何Kmふえますか。　答　　Km

(3)　この人の歩いた時間ときょりはどんな関係にあるか，下の答えのなかからもっとも適当と思うのを一つえらび，番号に○をつけなさい。

ア　歩いた時間がふえるときょりもふえるので，きょりと時間は比例関係にある。

イ　歩いた時間が2倍，3倍・・・にふえるときょりもそれにつれて2倍，3倍・・・になるのできょりと時間は比例関係にある。

ウ　対応している時間ときょりのそれぞれの比を求めると，時間では2：3，きょりでも8：12＝2：3でいずれの量の比の値も2／3であるから，きょりと時間は比例関係にある。

エ　対応している時間ときょりのついの比（きょり）：（時間）の比の値はいつも4である。すなわち比の値が一定なので，きょりと時間は比例関係にある。

<調査問題O_1>の(1)にたいする応答類型と応答率

応答類型は，児童の解答を基準にして作った。

（表2）　A：1967.10　B：1967.11　小6

記号	類型　＼　クラス名	A1	A2	A3	B1	B2	B3	合計	%
a	2倍4倍になる	23	23	24	18	23	24	135	61.0
b	きょりも2倍4倍になる	8	7	4	3	5	7	34	15.0
c	2倍4倍	2	1	1	4	3	2	13	4.3
d	それにつれて2倍4倍になる	1	2	0	0	0	0	3	1.1
e	きょりも8Kmの2倍4倍になる	0	2	0	0	0	0	2	0.8
f	2倍になる	1	1	0	0	0	0	2	0.8
g	2　8	0	0	1	0	0	0	1	0.5
h	8Km　8－4＝4	0	0	1	0	0	0	1	0.5
i	その他	5	4	9	10	4	2	34	15.0

<調査問題 O_1 >の(2)にたいする応答類型と応答率

応答類型は，児童の解答を基準にして作った。

（表3）　A：1967．10　B：1967．11　小6

記号	類型＼クラス	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	合計	%
a	4 Km	36	36	37	31	31	33	204	90.6
b	2 Km	3	3	0	1	2	0	9	4.0
c	その他	1	1	3	3	2	2	12	5.4

<調査問題 O_1 >の(3)にたいする応答率

（表4）　A：1967．10　B：1967．11　小6

選択肢＼クラス	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	合計	%
関係理由ア．	1	1	2	1	0	1	6	2.6
関係理由イ．	16	22	31	20	23	27	139	61.7
関係理由ウ．	10	10	3	2	4	2	31	13.7
関係理由エ．	13	7	4	12	8	5	49	22.0

〔考察〕

・（表2）によれば，a～fまでの応答類型をとる児童が約80％いることを示している。したがって定義を言語表現するとすれば（表4）の関係理由イ．の形式をとる者が大部分である。これは比例関係の規則について注目していないことを現わす。

・(1)の問題での関係判断の理由が，（表4）の関係理由イ．に集中したのが，定義があたえられておって，それを選択することになった場合は関係理由イ．のみに集中しない。

これは関係理由イ．以外のウやエが，漠然と理解されていてもそれを言語表現ができない状態。すなわち比例の概念形成が確実ではないことがわかる。

（表3）のaが約90％の高率を示したことは，問いかけが概念を必要としない，いいかえるならば数学的な用語を使うことなしに（小学校6年生むけ用語のこと）発問されているために正答者が多くなったものと思われる。この調査問題で，◯×式の場合は，児童生徒の概念形成が確実でなくとも，あたえられている選択しによって，判断が多角的になってきてその傾向も一定にならぬことがいえるし，また自由記述形式の場合は，概念が言語化された状態にまでなっていなければ，児童生徒が応答できない。したがって応答は表現しやすい傾向のものに集中しやすいことがわかる。

<調査問題 O_1 >と同じ問題で自由記述形式を採用した<調査問題 P_1 >をC小学校に実施し，応答内容にA，B校と差があるかをみた。

<調査問題 P_1 >

時速4Kmで歩いている人がいます。この人が1時間，2時間，3時間・・・に歩いたきょりはどのようになりますか。

(1)　下の表をかんせいなさい。

時間（時）	1	2	3	4	5	6	…	10
きょり（Km）								

(2)　3時間に対応するきょりはいくらか。

答　　　　Km

(3)　16Kmのきょりに対応する時間は何時間か。

答　　　　時間

(4)　この人の歩いた時間ときょりは比例するといえますか。いえたらその理由をのべなさい。

(ア)　答

(イ)　理由

(5)　この人の歩いたきょりと時間の関係を式にあらわしなさい。

式

＜調査問題 P_1 ＞の(1)(2)(3)

(4)の(イ)にたいする正答率

（表５） C：1967．10　小６

クラス / 問題	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	合計	%
(1)	31	37	38	35	30	171	88.6
(2)	34	39	35	34	39	181	93.8
(3)	35	36	35	32	38	176	91.2
(4)のア	34	35	38	33	34	174	90.2

＜調査問題 P_1 ＞の(4)のイ．にたいする応答類型と応答率

（表６） C：1967．10　小６

	クラス / 類型	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5		%
a	時間が２倍３倍になるにつれて，きょりも２倍３倍になる。	18	25	26	28	14	111	56.0
b	時間ときょりが，同じ割合であがっていくから。	7	1	2	4	10	24	12.4
c	１時間ごとに４Kmずつ進むから。	6	6	9	0	1	22	11.4
d	その他（無答も含む）。	8	8	2	3	15	36	20.2

＜調査問題 P_1 ＞の(5)にたいする応答類型と応答率

（表７） C：1967．10　小６

	クラス / 式の類型	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	合計	%
a	時速×時間＝きょり	5	23	1	25	0	54	28.0
b	１：４＝２：８　or　４：１＝８：２	11	2	20	2	27	62	32.0
c	１：２＝４：８　or　１：２＝４：x	1	2	7	1	0	11	5.7
d	１÷４　or　４÷１，８÷２，………	5	0	3	0	2	10	5.1
e	その他	8	3	5	4	6	26	13.4
f	無　答	9	10	3	3	5	30	15.8

〔考察〕 ＜調査問題 O_1 ＞にたいして＜調査問題 P_1 ＞は，記述形式をとったために，特に(4)の応答傾向に注目すべきものがあろう。それはアで約９０％のものが正答をしているのに，比例の定義を文章表現（概念）する場合，正しく応答できた者が約６７％であった。したがって比例という関係をみぬく力はあっても，その関係を規則性に基いた表現ができない児童が２３％もいた事実は，＜調査問題 O_1＞の(3)にたいする応答が関係理由イ．に集中しなかったことの裏づけともいえよう。

特に(5)で２量の間の依存関係を式化できる（関係概念を比例概念とみる力）かをみた。概念形成の場合記号（ことばも含めて）があたえられないと進展しないといわれている。この観点から６年生としてはことばで２量の関係を式にできればよいと考えた。ところが（表７）が示すごとく，時速×時間＝きょりなる公式を応答できないのは，比例の定義が（表６）のａに集中していることから２量の対応関係の規則に注目した定義をとらないかぎりむしろ当然とも考えられる。

２量の対応関係に強く注目している者は（表７）のｃ，ｄが示すごとく約１０％である。式にあらわしなさいといった場合，ことばで表現すると式ではないというように感じさせるような何かを教師が，６年生を指導する間に児童にあたえていなければよいがと考えるのだが…………。

中学校段階では比例概念がどのように形成されているか＜調査問題 Q_1＞によってしらべた。この＜調査問題 Q_1＞は反比例・一次関数についても調査したもので，直接ここで関係はないが都合上全部のせる。

＜調査問題 Q_1 ＞

次の表や式は，２つの数量の関係を表わしています。２量の関係が比例のときは（比）反比例のときは（反）と，どちらでもないときは（×）を（　）のなかに記入し，関係の理由を下のわくのなかから一つえらんで $\square$ のなかにその記号を書き入れなさい。

(1)

x	1	2	3	4	5
y	12	11	10	9	8

x と y の関係（　　）　　その理由 $\square$

(2)

x	9	12	15	18
y	6	8	10	12

x と y の関係（　　）　　その理由 $\square$

(3)　$y=\frac{7}{x}$　　x と y の関係（　　）　　その理由 $\square$

(4)　$y=2\left(x+\frac{5}{2}\right)$　　$x+\frac{5}{2}$ と y の関係（　　）　　その理由 $\square$

ア　一方が２倍，３倍……になると，他方も２倍，３倍……になるから。
イ　一方が２倍，３倍……になると，他方が $\frac{1}{2}$ 倍，$\frac{1}{3}$ 倍……になるから。
ウ　対応する２つの数量の比が一定であるから。
エ　一方がふえると他方もふえるから。
オ　対応する２つの数量の差が一定であるから。
カ　一方がふえると他方がへるから。
キ　対応する２つの数量の和が一定であるから。
ク　対応する２つの数量の積が一定であるから。

＜調査問題 Q_1 ＞の(2)にたいする応答率

（表8）　D：1967．10　　E：1967．10　　中3

問題	応答＼クラス		D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	合計	%
(2)	関係	比例	21	25	34	36	44	39	37	36	36	39	35	382	77.1
	理由	ア	10	15	16	15	16	26	15	21	20	20	25	199	402
		ウ	10	9	21	22	26	11	15	10	8	11	5	148	29.9

＜調査問題 Q_1 ＞の(4)の応答率

（表9）　D：1967．10　　E：1967．10　　中3

問題	応答＼クラス		D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	合計	%
(4)	関係	比例	9	6	11	36	38	17	21	17	22	23	20	220	444
	理由	ア	3	1	4	9	14	2	10	9	4	7	9	72	14.5
		ウ	8	5	3	3	14	4	3	4	5	5	8	62	125

〔考察〕(表8)から，中学校3年生になっても比例関係の概念形成が，小学校6年生とあまり変っていないことがわかる。すると中学1年生で指導する比例教材は，小学校からのものを完成するためのものか，関数指導の前提となるものなのか問題点となる。ところがD校は上位群になるにつれて，理由としてウをとるものがアより多くなっている。このことは2量の関係をとらえるのに，2量の数の比が一定であるとすることは，その関係を式にあらわす場合に大きな威力を発揮することを理解していることである。すなわち理解がここまで深まるのはやはり上位群の生徒だけのように考える。

ところが(表9)では，$y=2x+5$を変形させ，関数の関数とみつけさせるのは(合成関数の立場)相当困難であることを示している。半数以下の生徒は，関数の関数とみる($x+\frac{5}{2}$がyに比例する)ような式変形，置換の概念が形成されていないと思われる。このことは数学教育において，式変形と置換を指導するときは，半数以上の生徒が指導後においても式変形・置換の概念形成をしていないことを前提にして，指導体系を考えねばならないことを示しているようである。

3ヶ月後に比例について，小学校6年，中学1年，2年に補充調査をした。これは学年によって比例の概念が変容しているかをみるためのものである。

<調査問題R_1>

<1> 1個15円のりんごの個数と代金の関係について考えてみよう。

りんごの個数と代金の関係はつぎのようになる

- りんご1個買うと　代金は15円
- りんご2個買うと　代金は30円
- りんご3個買うと　代金は45円
- りんご4個買うと　代金は60円

このことから新潟市のある小学校の6年生A組が討議してつぎのような結果を発表しました。

(1) りんごの数がませば，代金も増す。
(2) りんごの数がへれば，代金もへる。
(3) りんごの数をきめれば，代金もきまる。
(4) りんごの数がある個数の2倍3倍……になれば代金も2倍3倍……になる。
(5) りんご1.5個は買えない。

<2> また長岡市のある小学校6年生B組が，つぎのような学習をしました。

一辺の長さが□mの正方形がある，この正方形の一辺の長さとまわりの長さとは，どんな関係があるか。の問題について表を作っていろいろな結果を発表しました。

一辺の長さ(m)	1	2	3	4	5	……
周の長さ　(m)	4	8	12	16	20	……

(1) 一辺の長さが1mますごとに，周の長さは4mます。
(2) 一辺の長さが2倍3倍……になると，周の長さも2倍3倍……になる。
(3) 式では一辺の長さ×4＝周の長さ，になる。
(4) 一辺の長さがきまると，周の長さもきまる。
(5) (周の長さ)÷(一辺の長さ)＝一定。
(6) 一辺の長さは自由にきめられる。

上の問題＜１＞＜２＞で，共通にいえるのはなんでしょうか。という問いにあてはまる答えを次のことからえらび，その記号に○をつけなさい。

ア．りんごの数がきまると代金もきまったし，一辺の長さがきまるとまわりの長さもきまった。

イ．りんごの数が２倍３倍……になると代金も２倍３倍……になる，また一辺の長さも２倍３倍になるとまわりの長さも２倍３倍……になる。

ウ．（代金）÷（りんごの個数），（周の長さ）÷（一辺の長さ）のそれぞれの値は一定である。

エ．＜１＞＜２＞を比例かどうかと考えるとき，＜１＞は比例ではない。

オ．＜１＞＜２＞の問題の間には，共通なことはない。

＜調査問題R_1＞にたいする応答率

A：1968．2　小6

（表10）　D：1968．2　中1．2

共通理由＼学年・クラス	小6 A_1	小6 A_2	小6 A_3	%	中1 D_1^1	中2 D_1^2	%
共通理由　ア	24	17	21	51.5	41	38	95.1
共通理由　イ	34	31	37	85.0	36	33	83.1
共通理由　ウ	17	16	15	40.0	38	37	90.1
共通理由　エ	1	0	1	0.2	1	3	0.4
共通理由　オ	0	1	1	0.2	0	1	0.1

※　共通な理由を自由に選ばせたので，一人でいくつも選んだ者がいるので計が100％以上になる。

※　この調査は，小学校６年生から中学２年生までの比例に関する理解状況をみるための補充調査である。

〔考察〕

Ａ小学校では，共通理由イを８５％の児童が選び，共通理由アとウは約５０％しか選んでいない。このことは小学校の比例指導は２量の対応の規則をみぬくような指導がなされなければならないと叫ばれながらも，実際にはそこまでやられていないことをこの調査でも示した。

ところがＤ中学校の１・２年生の応答傾向は，共通理由としてイよりもアとウを選んだ率が高くなっている，関数指導のねらいの一つである対応の規則に注目させた指導が中学校では効果的に行なわれていると考えられる。とすると比例に対する指導の視点が小中学校の間に何かズレがあるのではないかとこの調査では考えさせられた。

小学校と中学校の比例指導の観点にズレがなければ，比例の概念形成の差は小学校６年生と中学１年生では，中学１年生での指導と生徒の成長との差（通過率にして10％〜20％）しかでないであろうとの推測から＜調査問題R_1'＞を追跡調査した。

＜調査問題R_1'＞

時速４Kmで歩いている人がいます。この人の歩いた時間ときょりの関係は左の表のとおりである。

時　間（時）	1	2	3	4	5	…
きょり（Km）	4	8	12	16	20	…

この表から時間ときょりは比例関係にあるといえます。

あなたはつぎの文のどれで比例関係にあるというか。一つだけえらんでその記号に○をつけなさい。

ア．歩いた時間が，２倍３倍になるとそれにつれて歩いたきょりも２倍３倍になるからである。

イ・対応するきょりと時間の比の値は，いずれも一定だからである。
ウ・歩いた時間が，1時間多くなると，歩いたきょりもやはり4㎞多くなるからである。

＜調査問題 R_1' ＞にたいする応答率（出現率）

A：1968. 2　D：中1，2

（表11）　D：1968. 2　A：小6

記号＼クラス＼学年	小6 A1	小6 A2	小6 A3	計 %	中1 D_1^1	中2 D_1^2	計 %
選んだ理由（ア）	20	22	24	54.9	34	5	47.0
〃（イ）	15	13	12	33.4	5	35	48.2
〃（ウ）	5	5	4	11.7	3	1	4.8

〔考察〕

この結果によれば，アと（イ＋ウ）の応答率における関係は，小学校においては

ア ＞（イ＋ウ）　中学校においては

ア ＜（イ＋ウ）　であり，｛中学校の応答率（イ＋ウ）｝－｛小学校の応答率（イ＋ウ）｝≒10（％）で，小中学校間の比例指導等の観点に大きなズレがなかったと断定してよいようだ。

3. 反比例の概念について

関数指導の立場からみれば（変数・順序・対応）反比例も比例と同じように指導されるべきである。反比例の関係にある2量の関係から，規則性（式化），変化，変域と値域，対応等の概念形成の様態をさぐってみる。

＜調査問題 O_2 ＞

面積36㎠の長方形があります。いまたての長さを1㎝，2㎝，3㎝，4㎝……にすると，よこの長さはどうなるかを下の表のようにまとめました。

たて	1	2	3	4	6	9	12……
よこ	36	18	12	9	6	4	3……

(1)　たての長さがきまりますと，よこの長さがどうしてもきまってしまいます。このような2つの量の関係をなんといいますか。

答

(2)　たてとよこの長さの関係が(1)でわかったら，その関係の理由を下の答えのらんから2つえらんで番号を○でかこみなさい。

（答）　(1)　たての長さがふえるとよこの長さがへるので反比例だ。

(2)　たての長さがふえるとよこの長さが$\frac{1}{2}$倍$\frac{1}{3}$倍……になるので反比例だ。

(3)　たてとよこの長さの比をみると，比の値がちがうので反比例だ。

(4)　たての長さが2倍3倍にふえるとよこの長さが$\frac{1}{2}$倍$\frac{1}{3}$倍になるので反比例だ。

(5)　たてとよこの長さの積はつねに，このばあい36になるので反比例だ。

〔考察〕　次頁の（表12）（表13）を参照

2量の関係を反比例と断定する力は，小学校6年生でほぼ定着しているといってよいであろう。（表12）したがって中学校では2つの集合間の対応関係を重点的にやればよいのではないだろうか。＜調査問題 O_2 ＞の(2)は反比例の関係にあると判断をした理由を2つ選ばせる問題なのだが，（4と5が正答）2つとも正答を選んだ者が約27％である。一つしか選ばなかった者もいて4か5のいずれか

を選んだ者が約３４％である。この２つの事実から約半数の児童は反比例の概念が形成しているように考えられるが，５を選ぶ者が全体の３０％しかいないことから比例と同様に，２量の対応関係の規則をみぬく力がない（対応概念が形成されていない）と考えてよいだろう。

＜調査問題O_2＞の(1)にたいする応答率

（表12）　A：1967. 10　　B：1967. 11　小6

組	比　例	反比例	その他	無　答
A_1	5	31	3	1
A_2	11	28	0	1
A_3	2	36	2	0
B_1	1	29	3	2
B_2	1	32	1	1
B_3	0	33	2	0
合計	20	189	11	5
％	8.8	84.0	4.9	2.3

＜調査問題O_2＞の(2)にたいする応答率

（表13）　A：1967. 10　　B：1967. 11　小6

	2量の関係を判断した理由の番号													
組	1	2	3	4	5	1,3	1,4	1,5	2,3	2,4	2,5	3,4	3,5	4,5
A_1	1	2	0	13	0	1	3	1	1	10	1	2	1	4
A_2	0	0	0	14	1	0	2	0	0	13	0	2	1	7
A_3	1	0	0	13	1	0	10	1	0	6	1	0	0	8
B_1	0	0	0	10	3	1	1	0	0	9	0	0	0	9
B_2	0	1	0	5	4	0	1	3	0	4	1	0	0	17
B_3	0	0	0	12	0	0	2	0	0	4	1	1	0	15
合計	2	3	0	67	9	2	19	5	1	46	4	5	2	60
％	0.9	1.3	0	29.8	4.0	0.9	8.5	2.2	0.5	20.4	1.8	2.2	0.9	26.6

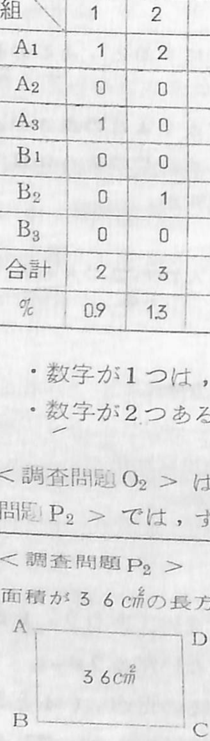
・数字が１つは，理由を一個えらんだことを示す。

・数字が２つあるのは，理由を二個えらんだことを示す。

＜調査問題O_2＞は○×形式で，反比例の定義や対応の概念を言語表現しないでもよかったから＜調査問題P_2＞では，すべて自由記述形式で反比例関係について調査した。

＜調査問題P_2＞

面積が３６cm^2の長方形があります。



(1)　いまたての長さを２倍３倍……にすると，よこの長さはどうなりますか。

答

(2)　このばあい，たてとよこの長さの間にどんな関係がありますか。

関係

(3)　(2)の関係を式にあらわしなさい。

式

＜調査問題 P_2 ＞ の(1)の応答類型と応答率

（表１４）　Ｃ：１９６７．１０　小６

類型 ＼ クラス		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	合計	%
a	$\frac{1}{2}$倍$\frac{1}{3}$倍になる	20	25	29	27	22	123	63.8
b	２倍３倍になる	11	12	7	7	12	49	25.3
c	かわらない	5	2	3	0	2	12	6.2
d	みじかくなる	1	0	0	1	0	2	1.3
e	無答（その他も含む）	2	1	0	0	4	7	3.5

(2)の応答類型と応答率

（表１５）　Ｃ：１９６７．１０　小６

類型 ＼ クラス		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	合計	%
a	反比例	22	22	24	22	8	98	50.8
b	正比例	6	8	12	8	15	49	25.3
c	その他	6	2	1	3	10	22	11.4
d	無　答	5	8	2	2	7	24	12.5

(3)の応答類型と応答率

（表１６）　Ｃ：１９６７．１０　小６

類型 ＼ クラス		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	合計	%
a	たて×よこ＝面積	16	19	5	26	2	68	35.2
b	ＡＢ×ＡＤ＝面積	1	6	3	0	7	17	8.8
c	その他	9	2	20	5	20	56	29.0
d	無　答	13	13	11	4	11	52	27.0

〔考察〕

（表１４）のａと（表１５）ａの関連をみよう。文章表現をしなければならない場合は，概念をうまく言語表現できるほどまでに概念形成が高まっていない結果が表われている。だから一方が２倍３倍……になると他方もそれに対応しながら$\frac{1}{2}$倍$\frac{1}{3}$倍になるという反比例の定義の記述が多くなっていること。

（表１４）のａの応答率と（表１５）のａの反比例と判定した応答率の差が１０％あったことと，（表１５）のｂが２５％もあったことにたいする追跡調査をしてみる必要がある。しかしはっきりいえるのは，自由記述形式をとるとはっきり理解されていなければ書けないということである。

＜調査問題 P_2 ＞ の(3)は(2)の関係を立式する問題であるから，２量の対応関係の規則をみつけねばならない。反比例の関係を式に表現するのは比例よりも，さらに悪くなる傾向が強いことがわかる。

さらに（表１６）から反比例関係を式にするとき，クラスによって応答傾向が違っていることに注目すべきであろう。たとえばC_3組とC_4組，C_5組では式をたてることにたいして差があることを示す。このことは同一のテキスト，同じ算数の指導時間数，同じカリキュラムで指導がなされていることからして，教師の数学教育にたいする指導観と教材研究の深浅がその一つの原因ではないのだろうか。

＜調査問題 Q_1 ＞ の(3)にたいする応答率

（表１７）　Ｄ：１９６７．１０　Ｅ：１９６７．１０　中３

		D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	合計	%
関　係	反比例	13	29	32	41	46	36	37	34	35	36	36	375	75.9
理　由	イ	3	18	16	24	17	19	28	18	18	23	26	210	42.5
	ク	8	9	4	16	28	8	7	9	8	11	4	112	22.6

〔考察〕

前の調査問題の比例教材にかぎって，小学校６年生よりも中学校の１・２年生の方が，対応の概念（速さ：時間のように）すなわち時間がきまれ

ば，歩いたきょりもきまるという一対一に対応する規則があることをみぬく力があると断定したがこの調査では反比例関係での対応の概念は，中学校３年生になってもあまり進歩していないことを示しているといえよう。

しかし，D校では，上位群になると反比例の関係を判断する対応の概念形成がよくなることを示している。このことから現在の反比例の指導は概念形成の立場からいうと小中学校ともに上位群の児童生徒にのみ適しており，他の群には適さない指導法であるといわざるを得ない。

いままでは主として比例・反比例に関する調査であったが，関数概念を調査することになれば

(1) 集合の意識があるか。　　(2) 変量の意識があるか。

(3) 対応の規則をみつけ得るか。　　(4) 対応関係を表，グラフ，式に表現し，処理できるか。

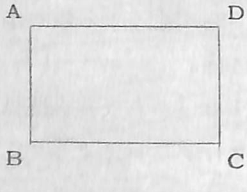
(5) 数式を変形できるか。　　(6) 公式を変量の関係とみれるか。

の細部にわたって調査を実施しなければならない。小学校での比例・反比例教材は割合の発展として指導されたであろうし，中学校での比例・反比例は関数教材の一部門として指導されるべきと考える。しかし，このことに関して関数指導上の幾多の提案がなされているが，それはそれとして関数指導といったら，２量の集合の関係である和一定・差一定・積が一定・商一定をいかにして発見させるかということであろう，この意味からすれば以下の調査問題こそ関数概念形成の様態をさぐる中核となるものであると考える。

4. 一次関数・二次関数について

＜調査問題O_8＞

まわりの長さが５２cmの長方形があります。いまたての長さを１cm，２cm，３cm，４cm……とふやすとよこの長さはどうなるか下の表のようにまとめました。



たての長さ	1	2	3	4	5	6	…	20	21	22	23	24	25
よこの長さ	25	24	23	22	21	20	…	6	5	4	3	2	1

(1) たての長さが２倍３倍………になったとき，よこの長さはどうなりましたか。

答

(2) たてとよこの長さの間にはどんな関係があるか，下の答えのらんから一つえらび番号に○をつけよ。

ア．たての長さがふえるとよこの長さがへるので反比例だ。

イ．たてとよこの長さが一定になるので比例でも反比例でもない。

ウ．たての長さが２倍３倍になるとよこの長さは$\frac{1}{2}$倍$\frac{1}{3}$倍になるので反比例だ。

エ．たてとよこの長さの和はつねに一定であるので，比例でも反比例でもない。

オ．たてとよこの長さの積はつねに一定であるので，比例でも反比例でもない。

＜調査問題O_3＞の(1)の応答類型と応答率

（表１８）　A：1967．10　B：1967．10　小６

	類型＼クラス	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	合計	%
a	$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$になった	10	9	7	12	9	6	53	23.5
b	１cmずつへった	17	14	17	10	15	17	90	40.0
c	$\frac{1}{2}$倍$\frac{1}{3}$倍$\frac{1}{4}$倍になった	2	5	4	1	0	3	15	6.6
d	へっていった	2	4	4	3	1	2	16	7.1
e	$\frac{24}{25}$，$\frac{23}{25}$，$\frac{22}{25}$とへった	1	3	3	2	1	2	12	5.3
f	$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$にならない	2	2	1	1	0	0	6	2.6
g	その他	6	3	4	6	9	5	35	15.9

〔考察〕

２量の対応関係の規則をみぬく力があるならば，（表１８）のような表現は少なくなるはずである。

たてが１cmずつふえるとよこの長さがへっているから反比例だと考えた者，よこの長さが１cmずつへっていると判定したものが６３％もいることは，２つの集合の対応関係の指導がじゅうぶんでないことを示すものとしたい。（概念形成がよくない）

＜調査問題O_3＞の(2)の応答率

（表１９）

A：1967．10
B：1967．10
小６

	選んだ理由番号				
	ア	イ	ウ	エ	オ
A_1	3	4	10	16	7
A_2	5	6	9	16	4
A_3	5	4	12	17	2
B_1	1	5	13	13	3
B_2	1	5	10	15	4
B_3	1	5	11	14	4
合計	16	29	65	91	24
%	7.1	12.9	28.9	40.4	10.7

ところが（表１８）では対応関係の指導がじゅうぶんでないといったが，（表１９）によれば２量の関係としてエをえらんだ児童が４０％にのぼることから，漠然とはしているが対応関係の規則をみぬく力は６年生でもつけることができるとみてよいようだ。

＜調査問題O_3＞の(2)は○×形式の調査であったので，概念を文章表現せずにすみ，応答率も高くなったと思われる。

＜調査問題P_3＞では自由記述形式をとり，概念形成が言語表現まで高まっているかどうかを調べた。

＜調査問題P_3＞

まわりの長さが５２cmの長方形があります。

(1)　いまたての長さを１cmからじゅんに１cmずつふやしていくとき，よこの長さはどのように変わるか，左の表をかんせいしなさい。

たての長さ	1	2	3	4	5	…	21	22	23	24	25
よこの長さ	25										

(2)　たての長さが２倍３倍……になるとき，よこの長さはどうなりますか。　答

(3)　たてとよこの長さの間にどんな関係があるか。

答

＜調査問題P_3＞の(2)にたいする応答類型と応答率

（表２０）　Ｃ：１９６７．１０　小６

	類型 ＼ クラス	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	合計	%
a	$\frac{1}{2}$倍，$\frac{1}{3}$倍，$\frac{1}{4}$倍になる	19	8	17	14	19	77	39.8
b	２倍３倍になる	11	7	3	5	9	35	18.1
c	１cmずつへっていく（へる）	6	10	11	10	1	38	19.6
d	その他	2	5	4	1	2	14	7.2
e	無　答	1	10	5	5	9	30	153

＜調査問題P_3＞の(3)にたいする応答類型と応答率

（表２１）　Ｃ：１９６７．１０　小６

	類型 ＼ クラス	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	合計	%
a	反比例の関係にある	22	12	21	11	16	82	424
b	比例の関係にある	7	4	4	4	5	24	124
c	比例でも反比例でもない，１cm増減する	1	10	7	11	3	32	165
d	たてとよこの和が２６cmとなる	2	2	0	1	1	6	3.1
e	その他	2	3	1	2	6	14	7.2
f	無　答	5	9	7	6	9	36	18.4

＜調査問題Q_1＞の(1)にたいする応答率

（表２２）　Ｄ：１９６７．１０　　Ｅ：１９６７．１０　中３

応答 ＼ クラス		D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	合計	%
関係	×	19	14	28	30	38	17	19	26	22	23	21	257	51.9
理由	キ	3	10	27	30	33	24	26	23	19	23	24	242	48.9
	カ	23	15	6	12	10	11	8	10	20	16	11	142	282

〔考察〕

＜調査問題O_3＞の(1)と＜調査問題P_3＞の(2)とを比較すると，

よこの長さがへっているから反比例だと応答した者がＡ，Ｂ校とＣ校が，ほぼ応答率が同じ（表１８のａとｃ，表２０のａ）

やはり対応関係をみぬく力が不足している。

けれども（表２１）で比例でも反比例でもない，としたものとたてとよこの和が２６cmになると応答した者が約２０％いたことに注意しなければならない。

すなわち和一定や差一定の関係をみぬく力はきわめて悪いといわざるを得ない。

中学生は和一定の関係をみぬける力があるかを＜調査問題Q_1＞の(1)でみた。

〔考察〕

中学校３年生になると，比例でも反比例でもないと判定したものが５１％で，和一定の関係にあるとした者が約４９％である。（表１９）エや（表２１）のｃ，ｄと比較してみると，中学１・２年の指導効果がわずかであるが現われているといえるが，小学校とくらべて進歩の度合が悪い。問題の妥当性を考えると必ずしも出題の内容が妥当とはいえない，むしろ「xがきまるとそれに対してyがただ一つきまる関係にあるから関数だ」というような表現形式をとったら中学校３年生の応答傾向が変化したかも知れないからである。

つぎに対応関係を表，式，グラフに表現し，処理できるかの観点で対応概念を調査してみよう。

5.　対応関係の式化とグラフ化について

＜調査問題 R_2 ＞

封書とはがき，あわせて１０通だすのに１１８円かかった。それぞれ何通ずつ出したか。この問題を３人の人にやってもらったら，みな途中まででやめてしまいました。みなさんの考えに近いとき方を始めている人の解答を一つえらんで，かんぜんな解答にしてください。

（Ａの人）

封書の数を x 通，はがきの数が y 枚だったとして式をたて，その式（方程式）をとけばよいようだから，まず方程式をたてよう。………

（Ｂの人）

１０通ぜんぶ，封書を出したものと考えてみよう。とすると代金は１１８円より多くなる。この多くなった代金をもとにして封書とはがきの数をだせばよいようだから

１５×１０＝１５０，　１５０ — ……………

（Ｃの人）

封書とはがきの数の出し方を考えると封書１０通出せば，はがきは何も出せないし，代金も１５０円になる，封書を９通出せば，はがきはどうなり代金はどうなるかを，じゅんに考えてみるとよいようだから

封書の数	10	9	8	7	6	……
はがきの数	0					
ねだんの合計	150					

のような表を作ればかんたんにわかる。

＜調査問題 R_2 ＞にたいする応答傾向と応答率（出現率）

Ａ：1968．2　　Ｃ：1968．2

（表２３）　小6，中1，中2，

	学年 / クラス / 解答内容	小 6			%	中1	中2	%
		A_1	A_2	A_3		D_1^1	D_1^2	
1	$x+y=10$　$15x+7y=118$	2	1	3	5.0	1	30	37.4
2	$150-118=32$　$32\div(15-7)=4$　$10-4=6$	5	4	9	15.1	6	1	8.4
3	対応表完成　正答したもの	23	20	22	54.1	32	9	49.4
4	無　答	10	15	6	25.8	3	1	4.8

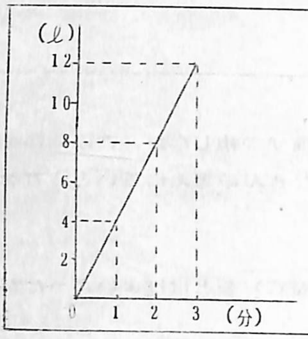
〔考察〕

文章題の２量の関係の規則をみつけるのにどのような応答傾向をたどるかをみた。

・小学校では，対応表を完成し対応表から封書とはがきの枚数を出したものが半数いる。

中学１年生も同傾向であるが２年生になると２量を変数とみないで，未知数として立式するものが７３％になったことは注目に値する。２量の対応関係の規則を式表現する場合は，方程式の学習後は，これによる方が生徒にとって立式しやすいといえよう。

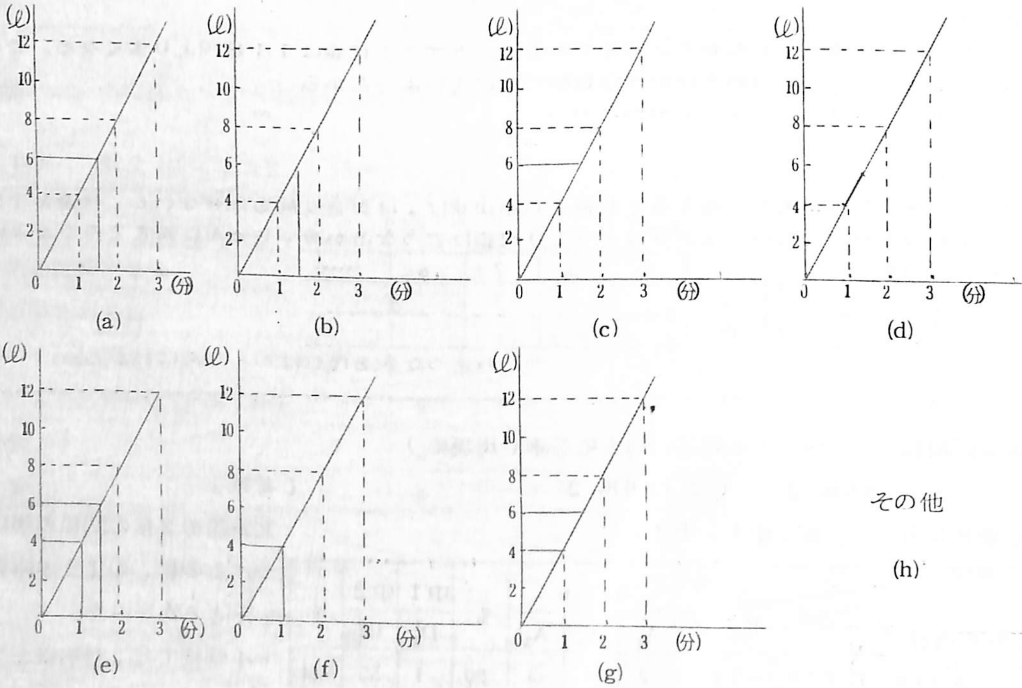
つぎに対応関係をグラフ化する力（グラフによって対応概念の形成を強める）についての実態をみることにしよう。



＜調査問題O_4 ＞

左のグラフは，水道のじゃぐちからでる水の量（ℓ）と時間（分）との関係をあらわしています。

１分から１分３０秒までの間に出た水の量は，このグラフのどこにあらわれているでしょうか。あらわれているところに鉛筆で線をひきなさい。



その他

(h)

上のグラフを（図表１）とする。＜調査問題O_4 ＞の応答類型である。

A：1967. 10　　B：1967. 10　　小６

＜調査問題O_4 ＞の応答率

（表２４）　　A：1967. 10　　B：1967. 10　　小６

	組	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	合計	%
1	（図表１）の（ａ）	24	14	17	17	22	27	121	53.9
2	（図表１）の（ｂ）	5	6	7	5	2	1	26	11.5
3	（図表１）の（ｃ）	2	3	4	3	1	0	13	5.7
4	（図表１）の（ｄ）	1	3	0	2	2	1	9	4.0
5	（図表１）の（ｌ）	2	2	5	0	2	0	11	4.9
6	（図表１）の（ｆ）	0	1	0	0	1	0	2	0.9
7	（図表１）の（ｇ）	0	1	1	0	0	0	2	0.9
8	その他	6	10	6	8	5	6	41	18.2

〔考察〕

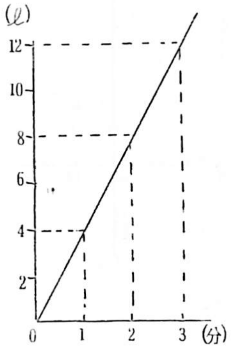
時間が３０秒増加するのに対応して，水の量が何ℓ増加したか。という問題とおなじ内容なのだがこれをグラフ化するところに意義がある。

時間の増分（独立変数）はたて軸に表わすことの理解が悪い。

(a)の型は，時間の増分と水の増

分の両方を表わすものだが，これが５３％もあることは，変化と対応の概念が明確でないことを示しているものといえよう。

グラフの機能まで理解していることを要求したこの調査とグラフをみて答えればよいという問題によって比較してみることにした。



＜調査問題 P_4 ＞

左のグラフは，水道のじゃぐちからでる水の量（ℓ）と時間（分）との関係をあらわしています。

(1)　１分３０秒までに何ℓ水がでたか。　答

(2)　２分から５分までの間に水は何ℓでましたか。　答

(3)　この水道からでる水の量と時間との間にどんな関係がありますか。

答

＜調査問題 P_4 ＞をＡ，Ｂ校に実施しなかったのは，グラフ上に鉛筆で線をひくヒントをあたえてはいけないと考えたからである。

＜調査問題 P_4 ＞の(1)(2)(3)の正答率

（表２５）　Ｃ：１９６７．１０　小６

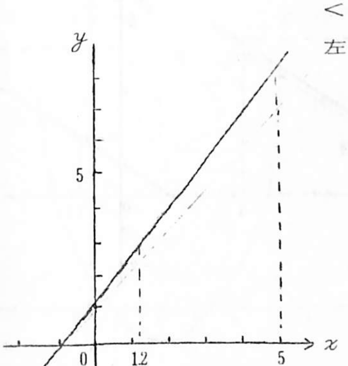
	組	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	合計	%
(1)	正答数	32	37	37	32	30	168	87.0
(2)	正答数	26	28	29	18	21	122	63.1
(3)	正答数	31	35	34	34	29	163	84.5

〔考察〕

＜調査問題 O_4 ＞の正答である(b)より，この調査問題の(1)(2)とも正答率が高い。

これはグラフから時間とか水の増分をよみとる力は小学校でもじゅうぶんあるからである。

ところが，グラフは本来２量の変化の状態を静止した状態ではあるが座標平面上に示すものである。これの理解が悪いので＜調査問題 O_4 ＞の応答率が悪いのだと考えたい。



＜調査問題 Q_4 ＞

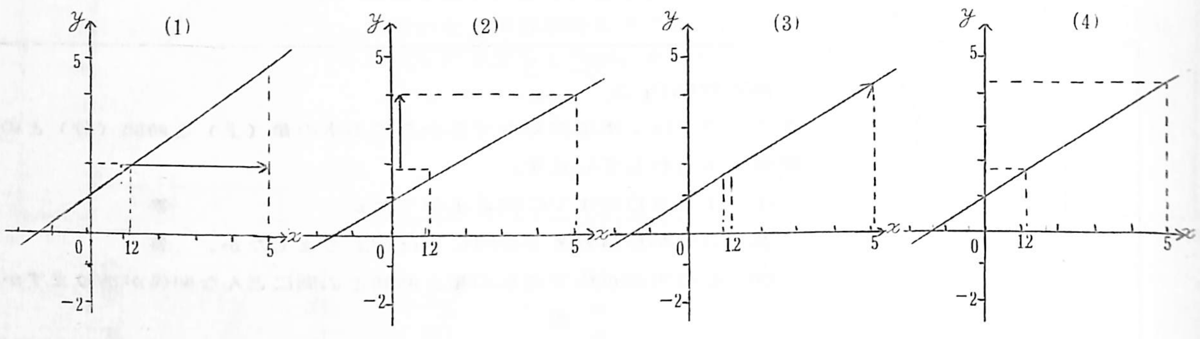
左のグラフは，$y=1.5x+1$ のグラフである。

(1)　x の値が，1.２〜５まで変化した量は座標平面上ではどの部分か座標平面上にその長さを矢線にて示せ。

(2)　x が 1.２〜５まで変化したときの y の変化した量も，座標平面上に矢線にて示せ。

＜調査問題 Q_4 ＞の(1)の応答類型と応答率

（図表２）　Ｄ：１９６７．１０　　Ｅ：１９６７．１０　　中３



無答，その他

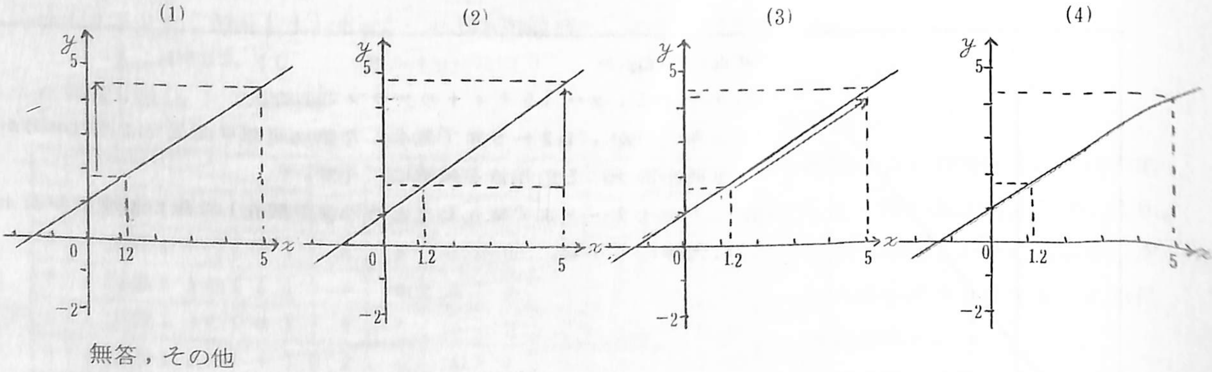
(5)

（表２６）　応答率

類型 ＼ クラス	D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	合計	%
（図表２）の（１）	10	30	27	38	42	23	20	22	19	17	24	272	54.9
（図表２）の（２）	4	1	0	3	0	0	0	0	3	2	2	15	3.3
（図表２）の（３）	5	1	7	3	2	9	6	6	0	5	4	48	9.7
（図表２）の（４）	2	3	3	1	1	7	4	5	8	6	4	44	8.9
（図表２）の（５）	23	7	10	2	2	6	14	11	15	15	11	116	23.2

＜調査問題 Q_4 ＞の(2)の応答類型と応答率

（図表３）　Ｄ：１９６７．１０　　Ｅ：１９６７．１０　　中３



無答，その他

(5)

（表２７）　　応答率

クラス / 類型	D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	合計	%
（図表３）の（１）	5	29	25	32	42	17	12	11	18	21	18	230	46.5
（図表３）の（２）	0	2	1	7	2	5	3	4	6	3	3	36	7.3
（図表３）の（３）	8	0	2	2	0	8	10	6	7	6	7	56	11.3
（図表３）の（４）	7	2	4	2	2	7	8	14	7	6	8	67	13.5
（図表３）の（５）	24	9	15	4	1	8	11	9	7	9	9	106	21.4

〔考察〕

この調査は傾きにたいする諸概念の様態をみるためのものである。傾きの実態は別の項でのべるので割愛するが，傾きが一次関数で指導されるのであるから，一次関数の変化の特性を認識する手がかりになるものでなければならない。そこで関数の変化を考えるとき，増分の概念は重要である。増分の概念には“ x の値に対応する y の値 ”の２つの順序対（ x_1 ， y_1 ）（ x_2 ， y_2 ）の認識が先行する。「傾き」の背景には，x 軸方向，y 軸方向の成分，つまり x の増分それに対応する y の増分が必要である。そしてその基礎には x が $x_1 \to x_2$ に変化するときそれに対応して y が $y_1 \to y_2$ になる変化と左図のような，

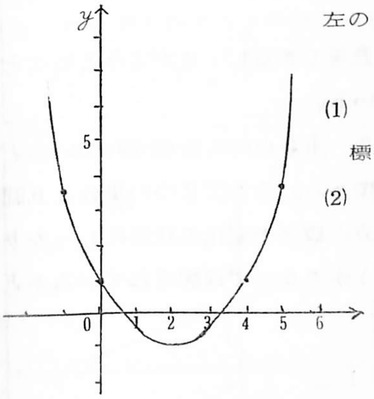
$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r, "\text{変化}"] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{対応}"] & x_2 \arrow[d, Leftrightarrow] \\ y_1 \arrow[r] & y_2 \end{tikzcd}$$

対応も内在している。この変化と対応の基本的な概念をみるために実施したのが前記調査である。

調査結果によれば，x の増分もそれに対応する y の増分も，グラフそのものの機能がしっかり理解されておれば，x 軸，y 軸上に矢線で示されるはずである。x の増分も y の増分も約５０％しか表示されていない。加えて(1)(2)ともに（図表２）の(3)と（図表３）の(3)が１０％位ずつ応答者がいることは，変化の状態を x 軸・y 軸方向に分けて考えることのできない生徒がいる（概念形成が悪い）ことを示す。

このことから傾きの指導にたいする指導体系をどのようにすればよいか一つの課題となる。つぎに二次関数での x の増分に対する y の増分の認識を調査した。

＜調査問題 Q'_4 ＞



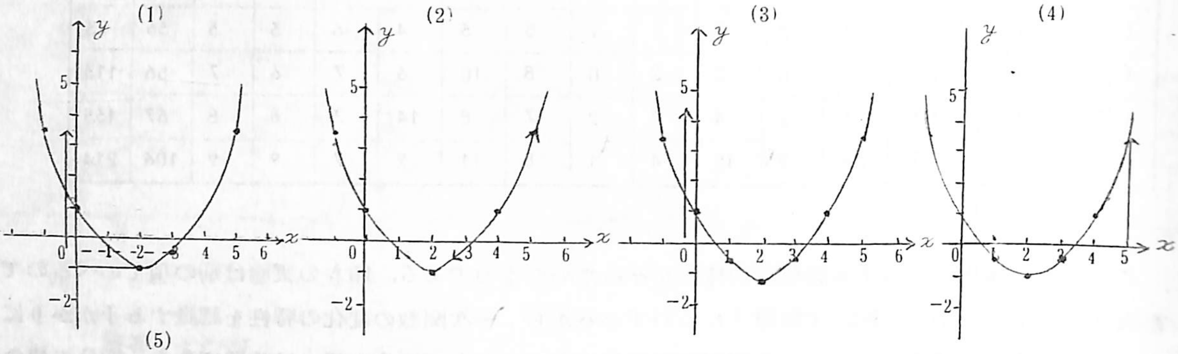
左の $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ のグラフについて次の問いに答えよ。

(1)　x の値が３から５まで増加するときの y の増加はどれだけか。座標平面上に線で図示しなさい。

(2)　x の値が－２から１だけ増加するとき y の値はどれだけ変わるか。

＜調査問題Q_4'＞の(1)にたいする応答類型と応答率

（図表４）　D：1967．10　E：1967．10　中3



(5)
無答　その他

（表２８）　応答率

類型 ＼ クラス	D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	合計	%
（図表４）の（１）	2	8	7	24	41	15	11	10	11	8	14	151	30.6
（図表４）の（２）	3	1	3	1	0	3	8	4	3	5	4	35	7.1
（図表４）の（３）	1	3	1	9	2	2	1	1	1	1	1	23	4.6
（図表４）の（４）	5	10	8	3	2	4	2	3	5	11	3	56	11.2
（図表４）の（５）	33	20	28	10	2	21	22	26	25	20	23	230	46.5

(2)の問題に対する正答率はD校が５２％，E校が４８％であって５％の危険率で有意な差がない。

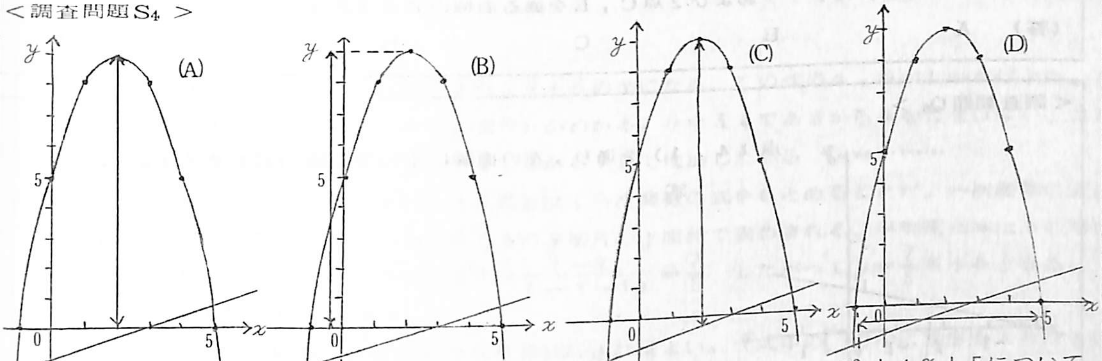
〔考察〕

二次関数になるとxの増分にたいするyの増分は必ずしも増加だけでない。(1)のように図示した者が３０％あることから二次関数ではxの増分にたいするyの増分の認識は一次関数よりさらに悪いことを示している。二次関数のグラフ指導は，いろいろ問題点をもっているといわれてはいるが，この調査結果をもとにして分析すると次のようなことがいえそうだ。

(イ)　グラフはかける　　(ロ)　自変数と従属変数の関係をグラフに表現できるし，またよみとることもできるまでには，まだ対応・変化（変域・値域）の理解が不足している。

いずれにしても，変化率（傾き）にたいする諸概念の形成は，現在一番重点的に指導されていると考えられるグラフにおいてさえも，前記調査結果が示すように悪いのである。そこで２つの集合ＡＢ間の対応について，視覚化したのがグラフであるから，このグラフで増分の概念や変化の状態にしっかり指導しなければならない。それでは本当に変化の状態（この場合値域）がグラフで理解されているかどうかを次に調査した。

<調査問題 S_4 >



上のグラフは $y=\frac{1}{3}x-1$ と $y=-x^2+4x+5$ である。このうち $y=-x^2+4x+5$ について，x が -1 から 5 まで変化（増加）するとき，y の値はどのように変化するか，A，B，C，Dの4君が上の図のように矢線で示しました。あなたはどれが正しいと思いますか正しいと思うものの記号に○をつけなさい。

<調査問題 S_4 > にたいする応答率（出現率）

（表29）　D：1968．2　　中3

記号＼組	D^3_1	D^3_2	D^3_3	D^3_4	D^3_5	合計	%
（A）	4	1	3	2	0	10	5.2
（B）	10	23	32	37	46	148	76.9
（C）	13	4	3	1	0	21	10.8
（D）	10	9	8	5	0	33	17.1

〔考察〕

D校3年生に実施したが（B）と応答した者が約77％もあることから，座標平面上に x の増加分に対応する y の増加分が座標平面上のどこに表われるか大部分は理解されているといえよう。（この形式の調査で）これはテスト形式の違いによって応答率が高まったともいえるし，前の Q_4 の調査でも多少いえたのだが，D中学校の指導効果が影響したのかもしれない。

6. 変化率と立式について

<調査問題 Q_7 >

(1)　点（3，2）を通って，傾き $\frac{3}{5}$ の直線の式を求めよ。

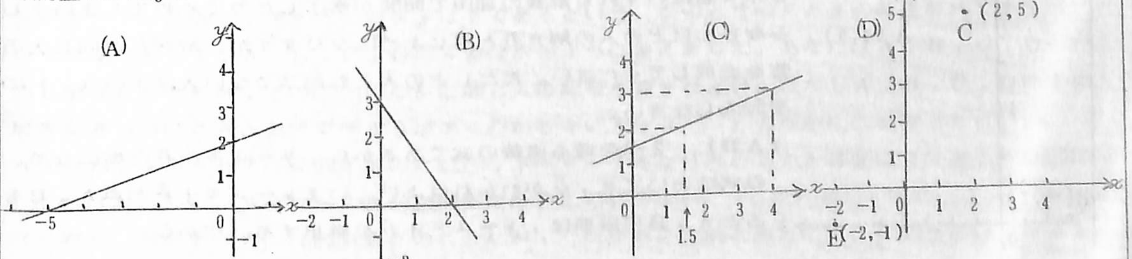
(2)　点（3，4）（-2，-2）を通る直線の式を求めよ。

(3)　点（-2，2）を通り y 軸に平行な直線の式を求めよ。

(4)　次の表から x と y の関係式を作れ。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-2	0	2	4	6	8	10	12

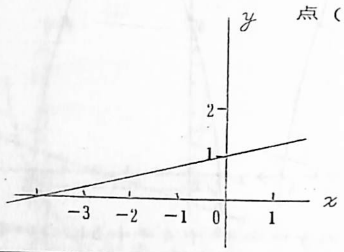
<調査問題 Q_5 >



上の（A）〜（C）のグラフおよび２点C，Eを通る直線の式を求めよ。

（答）　A　　　　B　　　　C　　　　D

＜調査問題 Q_6 ＞



点（４，１）を通り，左の直線に平行な直線の式を求めよ。

式

＜調査問題 Q_7 ＞の(1) (2) (3) (4)
＜調査問題 Q_5 ＞のA，B，C，D
＜調査問題 Q_6 ＞
の正答率

（表３０）　D：1967．10　E：1967．10　中３

問題番号＼クラス		D^3_1	D^3_2	D^3_3	D^3_4	D^3_5	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	合計	%
Q_5	(A)	9	23	33	36	45	26	31	21	28	25	31	308	62.1
	(B)	21	19	34	45	46	26	27	21	26	23	31	319	64.1
	(C)	0	5	11	24	38	6	6	10	15	11	11	137	27.7
	(D)	0	12	23	37	45	18	16	16	23	16	21	227	45.6
Q_6		0	4	12	25	46	16	11	12	17	14	18	175	35.3
Q_7	(1)	1	13	20	31	44	16	16	16	18	17	20	212	42.6
	(2)	1	10	17	31	42	16	17	11	13	11	19	188	38.0
	(3)	4	15	21	19	39	12	10	12	11	17	17	177	35.8
	(4)	7	11	18	33	42	15	16	11	21	16	20	210	42.3

〔考察〕

＜調査問題 Q_5 ＞の(C)と(D)は同じ構造をもった問題であるが，かなり正答率に差がある。

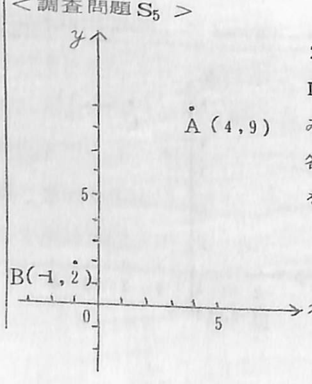
＜調査問題 Q_5 ＞の(C)の x 座標 y 座標がどこに表われているかの理解が悪い。

＜調査問題 Q_5 Q_6 Q_7 ＞ともに正答率が悪い。

三つの調査問題とも成績が悪いのは，立式に必要な条件がわからないのか，解析幾何的な要素が多く入っているから理解できないのか，等の問題点を究明しなければならない。

それでは，本当に立式能力がないのかどうかをみることにした。

＜調査問題 S_5 ＞



２点A，Bを通る直線の式を求めよ。という問題にたいしてA，B，C，Dの４君はいずれも解答の途中で時間が修了したのでやめてしまいました。みなさんはどの人の解き方と同じようになりますか。解き方が同じ人の解答を完成してください。ただしどの人とも同じでない人は下の（　）に○を記入しなさい。

（A君）　２点を通る直線の式であるから，$y = ax + b$ の型になる。この式において a，b がわかればよい。いま $y = ax + b$ が点A，Bを通るとA，Bの座標は，$y = ax + b$ を満足する。だから

$$\begin{cases} a = 4a + b \\ 2 = \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

（B君）　2点を通る直線の式だから$y = ax + b$の型になる。この式のa，bがわかればよい。だから図でA，Bを直線で結ぶとb（y切片）がわかる。$b \fallingdotseq 3.4$であるからaをだせばよい。xが−1から4まで増加したときのyの値は，2から9まで増加したから　$a = \cdots\cdots\cdots$

（C君）　2点を通る直線の式をもとめることは，一次関数の式をもとめることだ。一次関数の式の特徴は，平均変化率aとグラフ化したときのy切片のy座標で表わされる。平均変化率はxの増加にたいするyの増加であるから変化率$a = \dfrac{9-2}{4-(-1)} = \dfrac{7}{5}$　したがって$y = \dfrac{7}{5}x + b$となる。このの$y = \dfrac{7}{5}x + b$の式は………

（D君）　2点を通る直線の式を求めるなら公式によればよい。（式中の□の中に文字を入れなさい）

公式は，$y - y_1 = a\ (x - x)$　　$a = \dfrac{\square - y_2}{x_1 - x_2}$　によってもとめると……

その他（　　　　　）

＜調査問題S_5＞の応答率（出現率）

（表31）　D：1968．2　中3

応答番号＼クラス	D^3_1	D^3_2	D^3_3	D^3_4	D^3_5	%
A	6	17	37	38	10	47.6
B	0	0	1	0	0	0.4
C	0	3	3	1	32	17.2
D	0	0	2	1	4	3.1
解答不能	38	22	4	7	1	31.7

〔考察〕

＜調査問題Q_5＞の(C)と(D)，＜調査問題Q_7＞の(2)，(3)などが正答率が低い。だからこの調査はこれらと同じ構造をもった問題にたいして，どのように応答するかをみた。

ところが解答不能の者が30％も出たので，この問題にたいする解答がこれだけのもので，この程度のヒントでよいのだろうかという疑問と，やはり2点を通る直線の式を求めることは生徒にとってむつかしいのだと考えることもできる。

つぎに$y = ax + b$のa，bを求めるのに連立方程式による者が約50％もある。ところが（表31）をみると上位群（D^3_5）は，a，bを求めるのに変化率の考え方を中心としたCの型で求めている。このことから上位群には，変化率と集合の考え方から式を求めさせた方がよいし，中位群（D^3_4，D^3_3）下位群（D^3_2）では連立方程式で式を求めさせた方が理解しやすいといえるようだ，もう一組の下位群（D^3_1）にたいする指導法はこの調査ではわからない。

さらに合成関数の立式の概念がどう形成されているかをみた。

＜調査問題S_6＞

yが$x-7$に比例し，xが5のときyは8であるという。このときのxとyの関係を式であらわせという問題に対して，A，B，C，Dの4君は次のように答えました。あなたはA，B，C，Dの誰と同じ解き方をするか，下の□のなかに同じ人の記号を書きなさい。ただしA，B，C，Dの4君と解答が違っている人と自分で解き方がよくわからない人は（　　）のなかに○を書きなさい。

（A君）：yが$x-7$に比例するのだから，$y = x - 7$となりxが5のときyは8であるというが，それはおかしい。$y = x - 7$は一次関数だからこの式でよい。

（B君）　yが$x-7$に比例するとのことだが，一次関数を比例とみたのだ。比例ならば$y = ax$の

型になる。xが5のときyは8であるから　$8=5a$となり$a=\frac{8}{5}$　もとめる式は$y=\frac{8}{5}x$である。

（C君）　yが$x-7$に比例するとのことだが，一次関数を比例とみたのだ。比例ならば$y=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$の型となる。だから，$y$が$x-7$に比例するのだから$y=a(x-7)$となる。

xが5のときyが8であるから$8=a(5-7)$ $\therefore a=-4$　したがって$y=-4(x-7)=-4x+28$　となる。

（D君）　yが$x-7$に比例するとのことだが，一次関数を比例とみたのだ。比例ならば$y=ax$となる。だからxにあたるのが$x-7$　したがって　$y=ax-7$となる，xが5のときyは8であるから$8=5a-7$ $\therefore a=\frac{1}{5}$　したがって$y=\frac{1}{5}x-7$である。

（イ）わたくしは[　　]君と同じ解き方です。

（ロ）（　　　　）

＜調査問題S_6＞の応答率（出現率）

（表32）　D：1968.2　中3

応答番号＼クラス	D^3_1	D^3_2	D^3_3	D^3_4	D^3_5	%
A	6	5	6	5	1	10.1
B	10	6	6	7	0	12.8
C	18	21	22	10	9	35.2
D	9	7	10	20	35	35.7
そ　の　他	1	3	3	5	2	6.2

〔考察〕

一次関数・二次関数の一般式が理解されていないと立式は不可能に近い。これは二次方程式や乗法公式などとも関連して，公式とよばれるものにたいする概念形成をいかにしたらよいかを考えねばならない。これに対して一次関数式$y=ax+b$の概念がじゅうぶんに形成され，式中の文字，変数と定数が互に対立した概念でとらえられているかどうかを＜調査問題S_6＞で調べた。

ところが解答形式CとDがほぼ同じ出現率である，これはこの命題は一次関数式そのものを求めるのか，一次関数ではあるが合成関数の形式で求めていくのかの構造について判断できる者とできない者が等しいことを表わしている。この判断の基準に$y=ax+b \rightarrow y=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$の変形がなければならない。この式の概念がじゅうぶんなときは，当然Cの出現率が大になるはずである。しかし，合成関係にたいする理解は中学生にとってむつかしいことかも知れないのである。

いままでの調査問題は，いずれも順序・変数・対応の概念を中心にして作ったものである。これらの概念の共通な基底となるものは，集合の概念である。実際には伴って変わる２量の集合ＡＢから，対応する元をみつけ，２つの変数x，yは変域Ｍ，値域Ｎに属していることなどから規則をみつけ集合Ｘ，集合Ｙからｆをみつけること，あるいは公式を変量の関係とみたり，数式を変形したりする能力などが形成されているかを教科書の問題で調査したのである。それは概念形成におけるストラテジー統御のためには，学習の出発時点における学習者の関数概念形成の状態を知るためのものでもあった。一方数学を担当する教師は学習者の概念形成過程の決定遂行を統御しなければならない。すなわち学習者の情報の獲得・利用を教師の側から事例の呈示や仮説を発表させることによって統御することが授業の内容となる。これがためには，関数教材で児童生徒が集合・順序・変数・対応などの概念を形成し，それを利用しようとするとき，問題や例題を提示し，いろいろな考え方を発問や助言によって発表させこれらの

概念の形成過程の決定遂行を統御してやる必要がある。

この教師の側からの統御のための問題や例題の提示についての内容や形式を知ることは大切である。また発問の仕方によって児童生徒の思考傾向が多岐にわたるか，それとも一定の傾向をとるかなどについて知ることは，概念形成の決定遂行の統御のために必要であるとの観点から次の調査を試みた。

＜調査問題 S_7 ＞

これからやってもらう問題は答え方が幾通りもあるものとそうでないものがあるかも知れません，いずれにしても解答してください。ただし答え方が多いときは，考えついた順に書いてください。

(1)　$y=2x-2$ のグラフは，点（2，7）（−2，−6）（6，5）を通りますか。

答　(ア)
　　(イ)
　　(ウ)
　　(エ)
以下の問題では(ア)〜(エ)を省略

(2)　$y=2x-2$ のグラフは，点A（−1，−2）点B（2，2）点C（5，8）を通りますか。

答

(3)　$y=2x-2$ のグラフは，つぎの3点A（−8，−18）B（5，8）C（0，3）のどれを通りますか。　答

(4)　$y=2x-1$ の式を満足するのは，つぎの点のうちどれか。

A（−3，−7）　B（$\frac{3}{2}$，2）　C（0，0）　答

＜調査問題 S_7 ＞(A)，(B)，(C)，(D)の応答類型と応答率

（表33）　D：1968．2　中3

(1) 応答類型＼クラス	D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	%
(ア) 点（−2，−6）は通るが点（3，7）（6，5）は通らない。	0	2	3	13	29	20.6
(イ) 点（−2，−6）を通る。	8	22	35	22	31	52.0
(ウ) 点（3，7）（6，5）は通らない。	1	0	8	9	20	16.7
(エ) 通らない。	28	11	21	27	18	46.1

（表34）

(2) 応答類型＼クラス	D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	%
(ア) 点B，Cは通るが，点Aは通らない。	0	3	4	17	31	24.2
(イ) 点B，Cを通る。	2	9	15	17	30	32.1
(ウ) 点Aは通らない。	4	9	24	17	30	37.0
(エ) その他	23	12	28	22	11	42.2

（表35）

(3) 応答類型＼クラス	D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	%
(ア) 点A，Bは通るが点Cは通らない。	0	0	4	2	9	6.6
(イ) 点A，Bを通る。	3	10	15	40	42	48.6
(ウ) 点Cは通らない。	4	3	7	3	8	11.0
(エ) その他	20	16	30	9	6	35.6

〔考察〕

＜調査問題 S_7 ＞の(1)の問題提示は，生徒をして考え方に混乱をおこさせるものといえる。このような焦点のぼやけた発問による問題の提示は厳につつしむべきである。

それでは(2)をみてみよう。発問の形式からみると答えが多岐にわたらぬように感ぜられるが，応答傾向は(1)〜(4)までだいたい同じ率で応答されている。

するとこの発問形式の問題ではやはり思考を混乱させ概念形成過程の決定遂行の統御にはならぬ。

（表３６）

(4) 応答類型 ＼ クラス	D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	%
(ア) 点Ａ，Ｂは満足し点Ｃはない。	0	1	3	1	9	6.1
(イ) 点Ａ，Ｂを満足する。	1	8	14	37	44	45.7
(ウ) 点Ｃは満足しない。	0	1	6	4	8	8.3
(エ) その他	10	11	21	11	4	25.0

＜調査問題 S_7 ＞の(3)と(4)をみてみよう。

(3)の(イ)と(4)の(イ)に応答傾向が集中はしてきたが決定的なものではない。しかし，思考の自由性からいって解答は多岐にわたる方が望ましいと考える立場もあるから，応答の仕方が多くなったとしても大きな問題にはならない。発問形式をととのえて応答が一定になるように問題を構成したと思っても(4)のように，(エ)その他が２５％もあるのはどう解釈したらよいか問題として残る。

Ⅱ　結論および討論

以上＜調査問題Ｏ，Ｐ，Ｑ，Ｒ，Ｓ＞の一連によって，関数関係の集合・順序・変数・対応の概念について調査した。それをまとめると，

1. 比例関係では，２量の依存関係が６年生にじゅうぶんに理解されていない。すなわち 一方の量が２倍３倍になると他方の量もそれに対して２倍３倍になるという順序にもとづく増加の概念はほぼ完成されている。ところが一つの集合の元に対して他の集合の元が，ある規則にもとづいて対応していることをみぬく，またはその関係に気づく６年生は少ない。すなわち対応の概念形成が悪い。

特に反比例から一次関数になると２つの集合Ａ，Ｂがあって集合Ａの一つの元に対して，集合Ｂの元がただ一つきまる規則を関数ということの基本的な概念の欠如が著しいことがわかる。

2. ２量の関係を式にあらわすのに，ことばでそれを表現する力が意外にないことがわかったが，公式をどう理解させ応用させたらよいか。との問題とともに小学校での大きな課題となった。

3. 和一定の関係のように一次関数は，対応の規則がわからなければ２量の関係はつかめないのである。小学校６年生が比例・反比例を２つの集合Ａ，Ｂの一対一の対応関係にあり，その規則はこうであろうと児童が考えるような指導がまだじゅうぶん行なわれているとはいえないようだ。

4. 対応関係を表や式・グラフに表わし処理する能力についてはいろいろなことがいえそうだ。

・二点を通る直線の式はたてにくい。この二点を通る直線の式を指導するとすれば方程式によるのが生徒に理解されやすい。文章題から小学校６年生が立式するときは，数量関係であれば変数の関係を表にすることが容易になれば，これによる者が多くなるといえる。

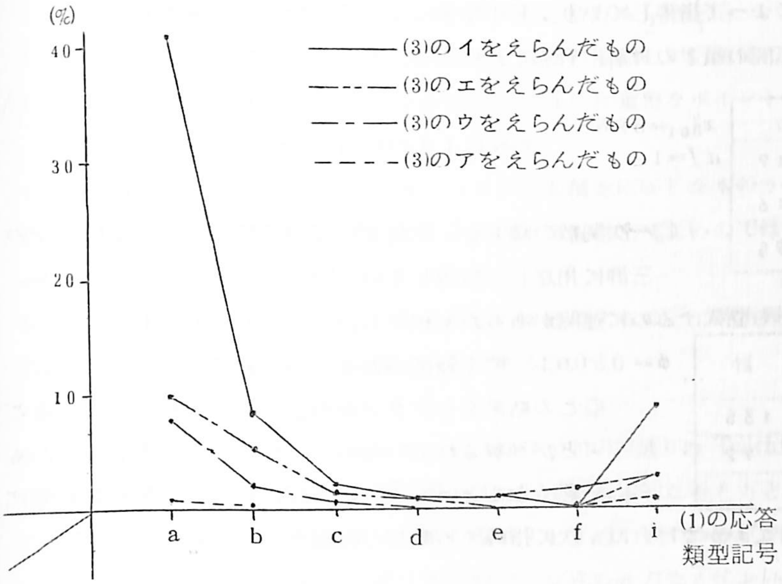
・グラフでは x の増加分に対応して y の増加分が座標平面のどこにあらわれるか（表わすか）についての理解は変化率の概念とともによくない。

・対応関係の規則の立式は，グラフから立式するよりも文章題より立式する方が悪い。

関数概念をより効果的に形成するためには，どのような指導条件があるか，来年度の研究の仮説をよ

り確かなものにするために，調査問題間の検定やその他のことについても分析してみた。まず＜調査問題 O_1 ＞ の(1)と(3)の応答関係について分析してみよう。

（図表５）

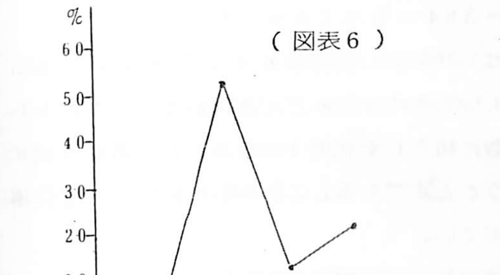


（表２）でａ～ｅまでの応答類型をとった子どもで，関係理由イを選んだものが約４７％に達する。

関係理由ウを選んだものが約１７％であること

・小学校６年生では，２量の関係をみつけるのに，半数の子どもは一方が２倍３倍になれば，それに対して２倍３倍になるとしかみないから，関係を立式させた方がよい。何故ならば，ついの対応関係に注目するからである。

（図表６）



・比例の定義が強く定着しているから，それをくり返さずに対応表を作っては，たての対応に注意をむけさせることが小学校の６年生では必要である。

・比例関係の理解がよくできる者はまた一次関数の理解もよくできる傾向にあるものかどうか，すなわち，比例の定義と一次関数の定義の理解の間に有意な連関があるかを検定した。

$\phi = 0.1092$ で殆んど連関なし。（K_1 参照）

・和一定の関係をみぬく力は，学校によって異るかを検定帰無仮説として「学校間における比は皆等しい」を採用

（K_1）	和一定の関係がわかる。	和一定の関係がわからぬ。	計
比例の定義がわかる。	90	124	214
比例の定義がわからぬ。	2	9	11
計	92	133	225

（K_1は検定１を表わす。）

（K_2）	A	B	C	計
和一定の関係がわかる。	49	42	68	159
和一定の関係がわからぬ。	71	63	125	259
計	120	105	193	418

$x^2 = 1.212$

$df = 2$

◎Ａ，Ｂ，Ｃ小学校間に有意な差がない。環境・学習条件の違いは概念形成において学校間に差をつくるものではない。

・Ｄ中学校は数学を能力別編成によって指導しており，Ｅ中学校はそうでない一斉指導をしている。この両校間にグラフの傾きや二点間の傾きの理解に有意な差があるかをみた。

(K_3)	Ｄ校	Ｅ校	計
正答	１３０	１１９	２４９
誤答	９７	１４９	２４６
計	２２７	２６８	４９５

$\chi^2_{0.01}=6.866$　$df=1$　両校に１％の危険率で差がある。

◎一次関数の傾きを，変化率の立場で指導案を上，中，下の三群に用意して指導しているＤ校の理解がよいといえる。

・グラフから立式するのと命題から立式するのに連関があるかを検定した。

(K_4)		Q_7 正答数	誤答数	計
Q_5	正答	９６	３９	１３５
	誤答	１８	７４	９２
計		１１４	１１３	

$\phi=0.5061$　やや連関があるといえる。

◎この結果からグラフから $y=ax+b$ を立式することが理解されていないと，命題から立式することも悪くなるといえる。いずれにしてもどちらかを先に指導するとき，徹底的に理解させておかなければ，次に指導する教材の理解がよくならない。

・二次関数になっての変化率の概念形成は学校によって異るか。

$\chi^2 > \chi^2_{0.05}=3.84$　５％で有意な差がある。

	Ｄ校	Ｅ校	計
(変化率)傾きあり	５０	３６	８６
(変化率)傾きなし	１７７	２３２	４０９
計	２２７	２６８	４９５

◎Ｄ校とＥ校では二次関数の指導の重点に多少の違いがあるのか，それとも他の条件が入りこんだためなのか，わからないが二次関数に傾き（変化率）があるとした者がＤ校に多かったということができる。二次関数においても変化率の理解はＤ校がよい。

<調査問題 O_3> の(2)にたいする正答率は，Ａ・Ｂ小学校で異るかを検定した。

ＣＲ≒0.1526　　有意な差はない。

<調査問題 Q_5> の正答率がＤ，Ｅ中学校において異るかを検定

ＣＲ≒0.3844 で有意な差がない。

以上の検定結果なども考慮にいれて，それぞれの考察で問題点とした事がらなどを中心に関数指導を効果的にするための条件をのべてみたい。

1. <調査問題 P_1> の問題点として，２量の関係の規則を式化するとき，小学校段階では記号があたえられていないから，ことばで式を表現する指導を関係概念が形成されたことが認められるまでやった方がよい。

2. <調査問題 Q_1> では比例関係の理解は，中学１年で比例教材の指導が終っても小学校と余り変わりがない。ところが中学２年生の一次関数で比例を取り扱った後の比例の理解は，定義におけるように

２量の比が一定とみる生徒が多くなる。だから中学校１年生の比例関係の教材の指導体系についてどうすればよいのか具体案を作らなければならない。

3. 反比例の定義が一方が２倍３倍……になると他方も$\frac{1}{2}$倍$\frac{1}{3}$倍……になる２量の関係にとどまっているのが（表１４）よくわかる。小中学校とも異種の量間の対応関係によく注目させて，その間の規則性をみぬけるようにさせる指導こそ関数教材に一貫した重要なポイントのようだ。

4. （表１６）によれば子どもはＡＢ×ＡＤ＝面積を応答したものが約１０％いることから，概念形成を高めるために記号の指導について小学校段階でも考えてよいのではなかろうか。

5. グラフ指導は，変化と対応の概念形成のためにするのと，解析幾何的な取り扱いのためのとを意識的にどちらかを強調しながら指導すべきであろう。

6. Ｄ校は能力別学級編成をやっていて,上中下位群の三通りの Teaching plan があり，関数教材の指導目標に関数概念の育成をとりあげ，概念にたいする基本的な考え方として，対応のきまり，変数としての文字，変化の状態（変化率），変域（値域）をきめこまやかなプランに基いて指導している。

検定によれば，変数の概念，変化率の概念，立式の能力などにおいてＤ校がすぐれていることが証明されたので，Ｄ校の授業分析をしてみる必要がありそうだ。

7. 比例，反比例，一次関数・二次関数の指導は，それぞれが徹底して理解されたことが判定されてから，はじめて相互関係やら比較をすべきである。

おわりに

この研究は，研究内容と方法でのべた計画によって実施した。実態調査は学習指導上特に留意しなければならない点を発見したり改めて問題点を確認するためのものである。だから次の点が明らかにされていない。

① 調査回数，調査時間，経費，などに制限があるので関数教材のすべてにわたって調査してないから，数量関係，関数関係の指導，全体にわたって解明されていない。

② 小学校での割合概念についてはふれてない。調査校の数量教材，関数教材の授業を分析して結果を論じていない。児童生徒との個人面接もできなかった。かような状態で結果を考察しているので，結論は客観化されたものであるかどうか判定ができかねる。

③ 調査問題の妥当性，信頼性については枚数の関係上のべられなかった。

この研究を進めるにあたって，特に度々御協力いただいた協力校の職員ならびに児童生徒に厚く感謝の意を表するものですが，ペーパーテストによる調査結果には正答率などがはっきり表われているので協力校名をのせることを省略させていただくことにする。

この研究を担当執筆したのは，漆間信高である。

参考文献

この研究に直接参考にしたのは次の通りである。

メンチンスカヤ	柴田義松他訳　算数教育の心理	明治図書
長妻克亘	数学教育現代化プラン　中学校編	明治図書
文部省	中学校数学指導事例集　関数関係の指導	教育図書
原弘道	小学校算数科基本的事項の指導	明治図書
日本数学教育会編	関数とその指導　中学校編	明治図書
〃	〃　小学校編	明治図書
横地・菊地共著	小中学校における関数の現代化	明治図書
佐藤良一郎他	数学教育現代化へのアプローチ	学校教育研究所
戸田・和田監修	数量関係の指導	金子書房
数学教育研究会	関数関係の新しい指導	明治図書
黒沢誠	算数・数学学習指導の原理と実践方法	東洋館出版
鍋島・時田編	中等数学教育研究	大日本図書
横須賀教育研究所	中学校数学科関数に関する調査と考察	紀要４集
新田・永野共著	児童・生徒における「重さ」概念の実態	国立研究所　４７集
岩原信九郎	教育と心理のための推計学	日本文化科学社
肥田野他２名	心理教育統計学	培風館
四方・一谷共著	教育統計法入門	日本文化科学社
河口・原・吉田監修	標準算数	教育出版
〃	中学数学	〃