

数 学

第3学年の「数量関係」について

目 次

I 研究の目的	97
II 研究の内容と方法	97
1. 分析的研究の対象にした全国学力調査問題	97
(1) とりあげた分野・領域と調査問題のねらい	97
(2) 調査問題	97
(3) 数量関係の調査問題をとりあげた理由	99
2. 研究の方法	99
(1) 研究の手順	99
(2) 分析的問題を作る方法	100
(3) 分析的問題のねらい	101
(4) 分析的問題	101
III 研究の結果とその考察	107
1. 点の座標を読みとる能力 調査問題 6	107
(1) 調査問題 6 の応答調査	107
(2) 調査問題 6 の分析的問題による調査結果の分析	108
(3) 調査問題 6 の分析的問題による面接調査	110
(4) 調査問題 6 の分析的研究のまとめ	111
2. 一次の関係についての理解 調査問題 7	112
(1) 調査問題 7 の応答調査	112
(2) 調査問題 7 の分析的問題による調査結果の分析	112
(3) 調査問題 7 の分析的問題による面接調査	115
(4) 調査問題 7 の分析的研究のまとめ	116
3. 具体的な事からによる一次の関係についての理解 調査問題 8	117
(1) 調査問題 8 の応答調査	117
(2) 調査問題 8 の分析的問題による調査結果の分析	118
(3) 調査問題 8 , ならびにその分析的問題による面接調査	125

(4) 調査問題 [8] の分析的研究のまとめ	126
4. 一次の関係の基礎的知識・理解	調査問題 [6], [7], [8] 127
(1) 調査問題 [6], [7], [8] の応答調査による共通の問題点	127
(2) 調査問題 [6], [7], [8] の基礎的知識・理解をみる分析的問題による 調査結果の分析	128
(3) 調査問題 [6], [7], [8] の基礎的知識・理解をみる分析的問題による面接調査	133
(4) 調査問題 [6], [7], [8] の基礎的知識・理解をみる分析的研究のまとめ	133
III ま と め	135
1. 点の座標を読みとる能力について	135
2. 一次の関係の理解について	136
3. 具体的な事からによる一次の関係の理解について	137

I 研究の目的

第3学年「数量関係」に関する調査結果を分析的に考察し、数量関係の基礎的な知識・理解の実態や、つまづきの様態をとらえ、関数指導を改善する資料にする。

II 研究の内容と方法

1 分析的研究の対象にした全国学力調査問題

(1) とりあげた分野・領域と調査問題のねらい—全国学力調査問題を以下調査問題という—

① とりあげた分野・領域

中学校第3学年の数量関係

② 調査問題のねらい

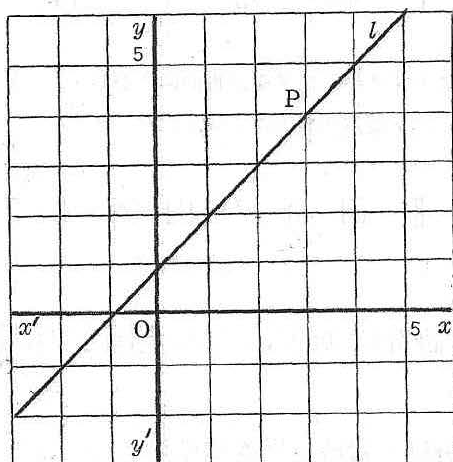
大問の番号	分野領域等	ね ら い	小問の番号	小 問 の ね ら い
⑥	数量関係 座 標	○ 点の座標を読みとる能力	1	⑰ グラフ上の点の座標を読み取る能力
			2	⑱ 直線のグラフと x 軸との交点の座標を読み取る能力
⑦	数量関係 一次の関係	○ 一次の関係についての理解	1	⑲ 一次の関係で変数 x の変化に対応する変数 y の変化と x の係数の意味についての理解
			2	⑳ 一次の関係で対応する変数の値の変化についての理解
⑧	数量関係 一次の関係	○ 具体的な事からによる一次の関係についての理解		㉑ 時間の変化に伴う長方形の面積を一次関数で表わす能力
				㉒ 時間の変化に伴う長方形の面積が時間と一次の関係にあることについての理解

(2) 調査問題

この研究の構想をたてたころには、本県・全国の正答率は不明であったが、ここではそれを付記する。

- ⑥ 右の図について、次の 1, 2 の問いの答えを、解答用紙に書きなさい。

- 1 直線 ℓ 上の点 P の座標を求めよ。
- 2 直線 ℓ が、 x 軸と交わる点の座標を求めよ。

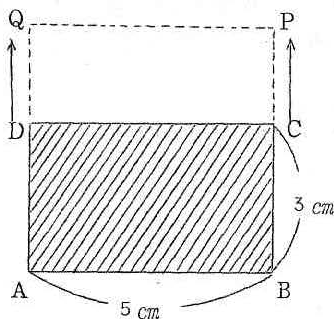


- ⑦ 一次関数 $y = \frac{2}{3}x + 5$ について、次の 1, 2 の問いの答えを、解答用紙に書きなさい。

- 1 変数 x の値が 1 ずつ増すと、変数 y の値はいくらずつ増すか。
- 2 変数 x の値が 3 からその 2 倍の 6 になったとき、そのときの変数 y の値は、 x の値が 3 であったときの y の値の何倍になるか。

- ⑧ 横 5 cm、たて 3 cm の長方形 ABCD があります。いま、この長方形の横をそのままにして、たての長さを右の図の矢じるし^アの方向に毎秒 1 cm の速さでのばしたとき、 x 秒後の長方形 ABPQ の面積を $y \text{ cm}^2$ とします。

次の 1, 2 の問いに答えなさい。



- 1 x と y との関係を表式で表わし、答えを解答用紙に書け。（ y を、 x を用いた式で表わせ。）
- 2 次のア、イ、ウ、エ、オは、上の x と y との関係について述べたものである。これらの中には正しいものが二つある。それらを選んで、解答用紙のその記号を○で囲め。

- ア y は x に比例する。
 イ y は x^2 に比例する。
 ウ $y - 15$ は x に比例する。
 エ y は、 x に比例する数と 15 との和である。
 オ y は x に反比例する。

⑪

本県	67.0
全国	69.9

⑫

本県	40.3
全国	45.0

⑬

本県	26.5
全国	35.5

⑭

本県	16.7
全国	24.8

⑮

本県	20.4
全国	27.7

⑯

本県	13.4
全国	17.9

(3) 数量関係の調査問題を取りあげた理由

- ① 中学校における全国学力調査に関する分析的研究においては、これまで数量関係の調査問題を取り上げたことがなかった。

全国中学校学力調査に関する分析的研究は、本研究所においては第3年次である。第1年次の昭和38年度は図形の調査問題を、第2年次の昭和39年度は、式の調査問題を取り上げた。したがって、これまでの中学校の調査問題の分析的研究においては、数量関係の調査問題を取り上げたことがなかったもので、本年度はこの領域についての研究を試みることにした。

- ② 数量関係は、中学校の数学においては、最も重要な領域の一つである。

数学教育は関数思想の養成を中核としなければならないという教育理論もあるように、数量関係の領域は、算数、数学教育にとっては重要な教材である。中学校においては、一次関数に関する基礎的な知識を身につけさせることによって、二次関数なども容易に理解させることができると思われる。数量関係の領域の調査問題は、一次関数を中心にした問題であるので、この領域の調査問題の分析的研究を行なって、関数、特に一次関数に関する基礎的な知識、理解・能力の問題点をさぐり、関数指導改善の参考資料にする。

- ③ これまでの全国学力調査の結果においては、数量関係は正答率の低い領域であった。したがって、学習指導上、問題点の多い領域と思われる。

これまでの学力調査における中学校第3学年数学の各領域別の正答率を次にかかげる。ただし、昭和40年度のものは、この研究の頭初は不明ではあったが、その後判明したので参考のためにかかげることにした。

領 域	昭和36年度		昭和37年度		昭和38年度		昭和39年度		昭和40年度	
	本 県	全 国	本 県	全 国	本 県	全 国	本 県	全 国	本 県	全 国
数	52.8	58.3	40.6	45.5	46.9	53.0	44.2	52.0	55.3	56.6
式	52.4	58.8	41.4	48.6	41.7	48.9	30.2	37.7	48.4	53.4
数量関係	44.9	50.7	29.7	33.8	30.6	34.6	40.2	44.5	30.7	36.8
計 量	54.8	60.2	34.0	38.2	34.1	38.4	／	／	／	／
図 形	54.0	59.0	32.0	35.9	42.6	45.7	36.0	40.0	42.0	47.2

上の表に示したとおり、昭和39年度を除くと、各領域の正答率は、数量関係が最も低い。したがって、学習指導上の問題点の多い領域と思われるので、取り上げて研究の対象にした。

2 研究の方法

(1) 研究の手順

① 研究の領域を決める。

この研究は、まず、全国学力調査の実施直後、調査問題を検討し、さきに述べた理由によって、数量関係の領域を取り上げることに決める。

② 調査対象の生徒を決める。

次に、抽出校の中から選ばれた3か校の第3学年1学級ずつ計3学級の生徒を無作為抽出して100人を調査対象とする。

③ 応答調査による結果の考察

抽出された100人の生徒について、調査問題に対する応答の分析、考察(以下、これを応答調査という。)を行なう。

④ 分析的問題を作る方法を決める。

応答調査によって、分析的問題を作る方法を決める。

⑤ 分析的問題を作る。

⑥ 分析的問題による調査を行なう。

⑦ 調査対象の生徒の順位と記号を決める。

この研究のための調査問題と分析的問題の全部の正答数によって、調査対象100人の生徒の成績順位を決め、第1位の生徒を P_1 、第2位の生徒を P_2 のように、以下これにならう。最下位の生徒を P_{100} とする。なお、 P_1 から P_{33} を上位群、 P_{34} から P_{66} を中位群、 P_{67} から P_{100} を下位群とする。

⑧ 分析的問題による調査の結果の考察

分析的問題による調査の結果の考察は、さきに抽出した100人の生徒についてだけ行なう。

なおこの研究においては、正答率の差の検定には臨界比(C, R)を用い、危険率1%で有無差のあるときは、「 $\times\times$ 」の記号を、危険率5%で有意差のあるときは、「 \times 」の記号を、危険率5%で有意差の認められないときは、「 o 」の記号を用いる。

⑨ 面接調査を行なう。

およそ調査対象20人の生徒に面接調査を行なう。20人の生徒は、3等分して三校がおよそ同数になるようにする。

(2) 分析的問題を作る方法

① 調査の問題を解くに必要な知識・理解を要素に分析する。

② 調査問題を解く思考過程を分節化する。

③ 調査問題の形式や素材を変える。

(3) 分析的問題のねらい

分析的問題1（以下分1のように表わす。）

各象限や各軸上における点の座標を読みとる能力と、その能力の差をみる。

分2 各小問の応答を比較して一次の関係の理解をみる。

分2① 一次の関係で変数 x の変化に対応する変数 y の変化と x の係数の意味についての理解をみる。

分2② 一次の関係で対応する変数の値の変化についての理解をみる。

分3 直線のグラフから一次の関係の理解をみる。

分3① 直線のグラフから、一次の関係で変数 x の変化に対応する変数 y の変化と x の係数の意味についての理解をみる。

分3② 直線のグラフから、一次の関係で対応する変数の値の変化についての理解をみる。

分4 文章で表わされた二つの数量の関係の例を、式で表わす能力をみる。

分5 直線の傾き（こうばい）についての基礎的知識・理解をみる。

分6 一次の関係の式からグラフをかく能力をみる。

分7 具体的な事からによる一次の関係について、変数を定数に置き換えたとき、一次の関係を式で表わす能力をみる。

分8 比例の関係についての理解をみる。

分8① 表から比例の関係を見だして式に表わす能力をみる。

分8② 比例の関係で対応する値を求める能力をみる。

分8③ 比例の関係で対応する値の変化についての理解をみる。

分9 式から二つの数量の関係を見いだす能力をみる。

分10 式から二つの数量の関係を文章で書き表わす能力をみる。

分11①、②、③、④

点の座標を分析して、 x 座標または y 座標を読みとる能力をみる。

分11⑤、⑥、⑦、⑧

x 軸、または y 軸から一定の距離にある直線を見いだす能力をみる。

分12 式と表から、表にあてはまる数を求める能力をみる。

分13 表、グラフ、式から比例、反比例の関係をみいだす能力をみる。

分13① 表、グラフ、式から比例の関係をみいだす能力をみる。

分13② 表、グラフ、式から反比例の関係をみいだす能力をみる。

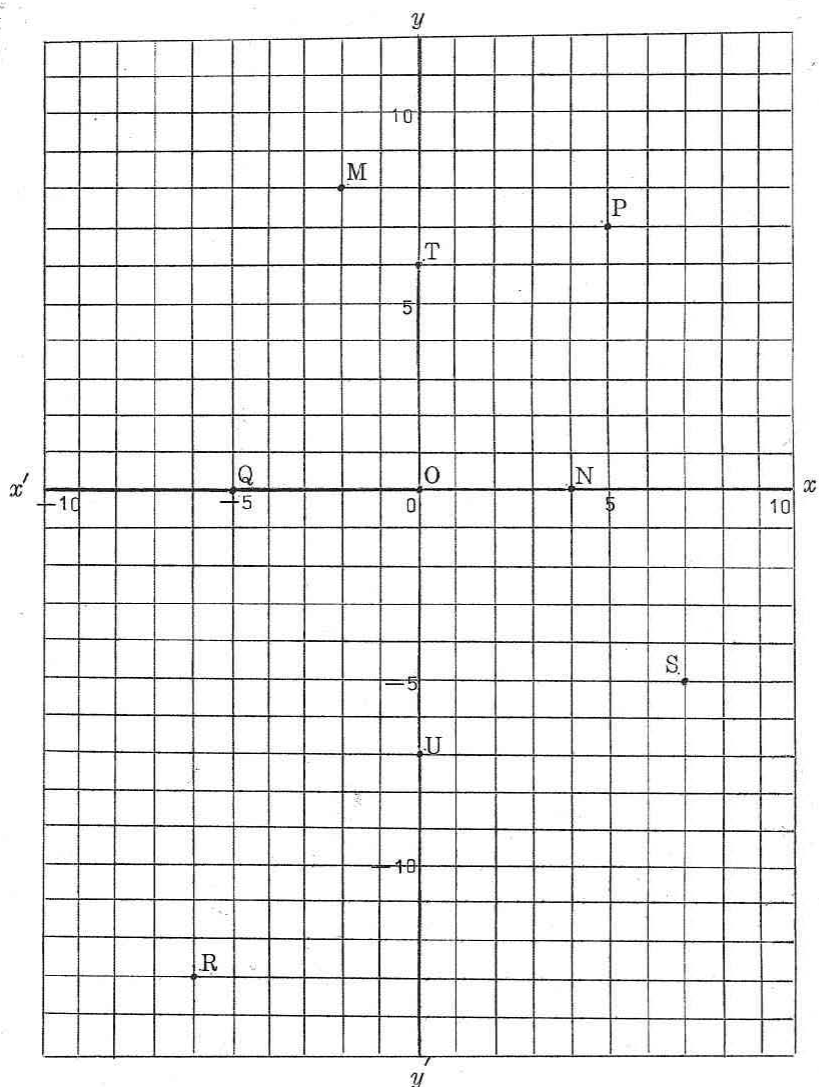
(4) 分析的問題

上述の方法によって作った分析的問題を次に記載する。この調査は学力調査の3か月後に実施したもので、結果はⅢで考察するが、わかりやすくするために、調査対象の100人の正答率もあわせて記載した。

1 下の図について、次の各点の座標を、その右のかっこの中を書きなさい。

- ① 点 M (,)
- ② 点 N (,)
- ③ 点 O (,)
- ④ 点 P (,)
- ⑤ 点 Q (,)
- ⑥ 点 R (,)
- ⑦ 点 S (,)
- ⑧ 点 T (,)
- ⑨ 点 U (,)

①	7.3
②	7.6
③	8.7
④	8.2
⑤	7.6
⑥	7.4
⑦	7.2
⑧	7.9
⑨	7.3



2 下の表の五つの一次関数について、次の①、②の問いの答えを、それぞれの右の空らんには書きなさい。

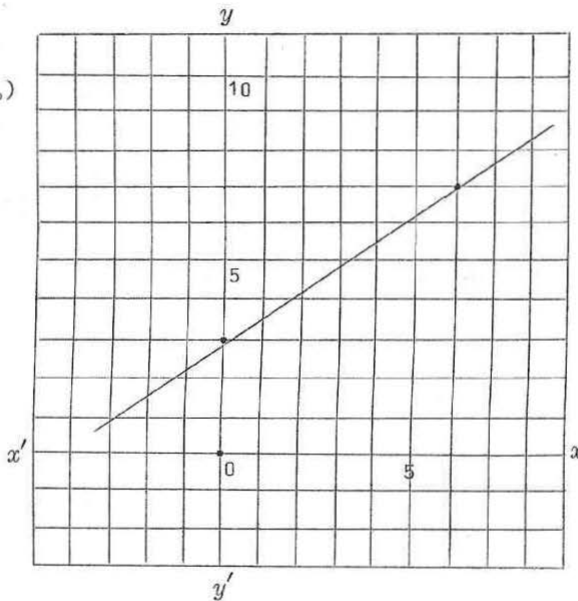
- ① 変数 x の値が1ずつ増すと、変数 y の値はいくらずつ増すか。
 ② 変数 x の値が3からその2倍の6になったとき、そのときの変数 y の値は、 x の値が3であったときの y の値の何倍になるか。

	一次関数	①の答え	②の答え
ア	$y = 2x$		
イ	$y = \frac{2}{3}x$		
ウ	$y = 2x + 3$		
エ	$y = \frac{2}{3}x + 5$		

	①	②
ア	57	58
イ	48	41
ウ	40	21
エ	35	20

3 右の直線のグラフについて、次の問いに答えなさい。(分数で正確に答えをだしなさい。)

- ① 変数 x の値が1ずつ増すと、変数 y の値はいくらずつ増すか。
 (答え)
 ② 変数 x の値が4からその2倍の8になったとき、そのときの変数 y の値は、 x の値が4であったときの y の値の何倍になるか。
 (答え)



①	39
---	----

②	8
---	---

4 次の文章にあてはまる式を一つだけ書きなさい。

- ① y は x に比例する。(式)
 ② y は x^2 に比例する。(式)
 ③ $y - 1.5$ は x に比例する。(式)
 ④ y は、 x に比例する数と1.5との和である。(式)
 ⑤ y は、 x に反比例する。(式)

①	68
②	58
③	45
④	43
⑤	25

5 次の□にあてはまる数やことばを、□の中には書きなさい。

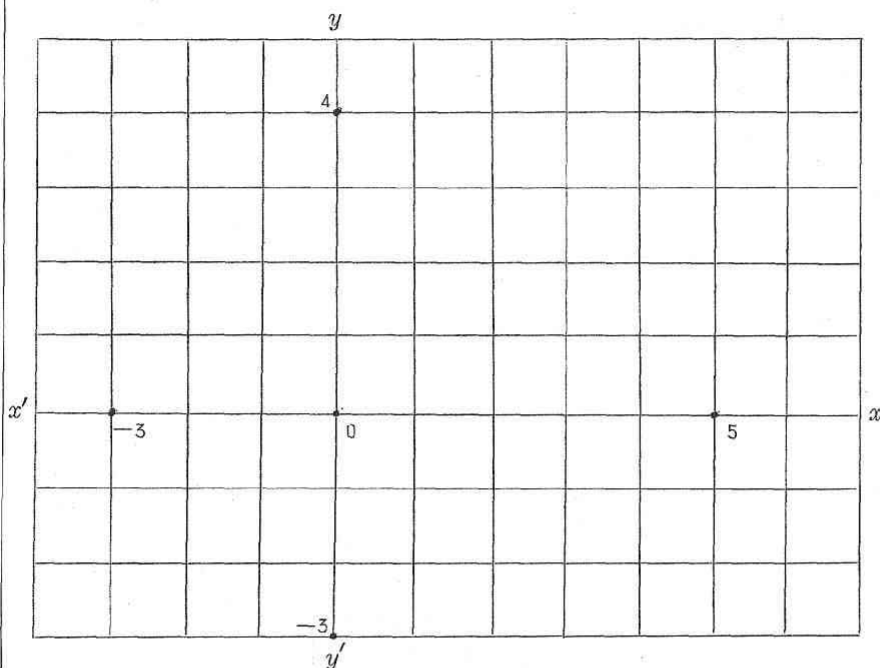
- ① $y = 2x + 5$ のグラフは、直線 $y = \square x$ に平行である。
 ② $y = -x + 4$ のグラフは、直線 $y = \square x$ に平行である。

①	63
②	41

③ $y = 3x - 1$ の表わす直線の傾き（こうばい）は□である。

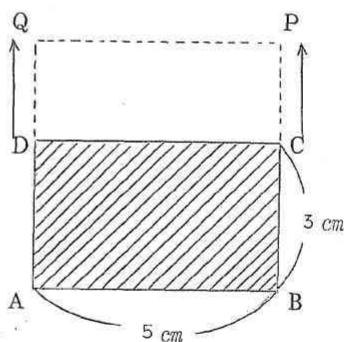
③ 40

6 次の座標平面に、 $y = \frac{3}{5}x - 1$ のグラフをかきなさい。



6 53

7 横 5 cm ，たて 3 cm の長方形 $ABCD$ があります。いま、この長方形の横をそのままにして、たての長さを右の図の矢じるし方向に $x\text{ cm}$ のびしたとき、長方形 $ABPQ$ の面積を $y\text{ cm}^2$ とします。 x と y の関係を式で表わしなさい。（ y を、 x を用いた式で表わせ。）



（式）

7 41

8 ともなって変わる二つの量 x と y とがあって、その対応する値は、下の表で示されています。

x	5	6	7	8	9	10
y	$\frac{10}{3}$	4	$\frac{14}{3}$	$\frac{16}{3}$	6	$\frac{20}{3}$

次の①, ②, ③の問いに答えなさい。

- ① 二つの量 x と y との関係を表わす式を求めよ。(y を, x を用いた式で表わせ。)

(式)

- ② x の値が 24 のとき, これに対応する y の値を求めよ。

(答え)

- ③ x の値が 12 のときの y の値は, x の値が 5 のときの y の値の何倍であるか。

(答え)

- 9 次のア, イ, ウ, エ, オは, 一次関数 $y = 5x + 15$ の x と y との関係について述べたものである。これらの中には正しいものが二つある。それらを選んで, その記号を○で囲みなさい。

ア y は x に比例する。

イ y は x^2 に比例する。

ウ $y - 15$ は x に比例する。

エ y は, x に比例する数と 15 との和である。

オ y は x に反比例する。

- 10 一次関数 $y = 3x + 5$ において, x と y はどんな関係にありますか。知っているだけを文章で, 次に書きなさい。

①

②

③

。

。

。

- 11 右のグラフについて, 次の問いに答えなさい。

① 点 P の x 座標

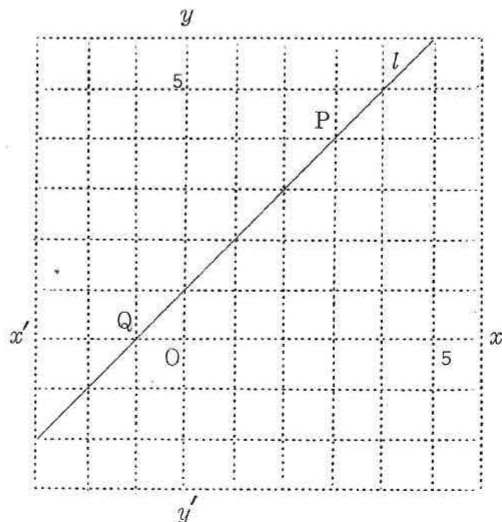
(答え) ()

② 点 Q の x 座標

(答え) ()

③ 点 P の y 座標

(答え) ()



① 32

② 59

③ 44

9 17

① 77

② 76

③ 79

④ 点Qのy座標

(答え) ()

⑤ y軸より+2の距離にある点線を実線になおせ。(あてはまるその点線を鉛筆で黒くぬれ。なお、その実線に⑤のようにその問題の番号をつけよ。

⑥、⑦、⑧ も同じようにせよ。)

⑥ y軸より-5の距離にある点線を実線になおせ。

⑦ x軸より-1の距離にある点線を実線になおせ。

⑧ x軸より0の距離にある点線を実線になおせ。

12 次の四つの一次関数についてのそれぞれの表の中の□の中に、あてはまる数を書きなさい。

① $y = 2x$

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	□	8	□	12

② $y = \frac{2}{3}x$

x	0	1	2	3	4	5
y	0	$\frac{2}{3}$	□	2	□	$3\frac{1}{3}$

③ $y = 2x + 5$

x	0	1	2	3	4	5
y	□	5	7	□	11	13

④ $y = \frac{2}{3}x + 5$

x	2	3	4	5	6	7
y	$6\frac{1}{3}$	7	□	$8\frac{1}{3}$	□	$9\frac{2}{3}$

13 次のA群(表)、B群(グラフ)およびC群(式)の中のA～シまでのものは、いずれもともなって変わる二つの量x、yについての関係を示したものです。

次の①、②の問いに答えなさい。

① xとyとが比例の関係にあるものを、A群、B群およびC群の中から、それぞれ一つずつ選んで、その記号を○で囲め。

② xとyとが反比例の関係にあるものを、A群、B群およびC群の中から、それぞれ一つずつ選んで、その記号を◎で囲め。

A群(表)

ア

x	2	3	4	5	6
y	30	20	15	12	10

ウ

x	3	4	5	6	7
y	9	12	15	18	21

イ

x	5	6	7	8	9
y	7	6	5	4	3

エ

x	5	6	7	8	9
y	3	4	5	6	7

④ 72

⑤ 39

⑥ 40

⑦ 41

⑧ 44

① 93

② 73

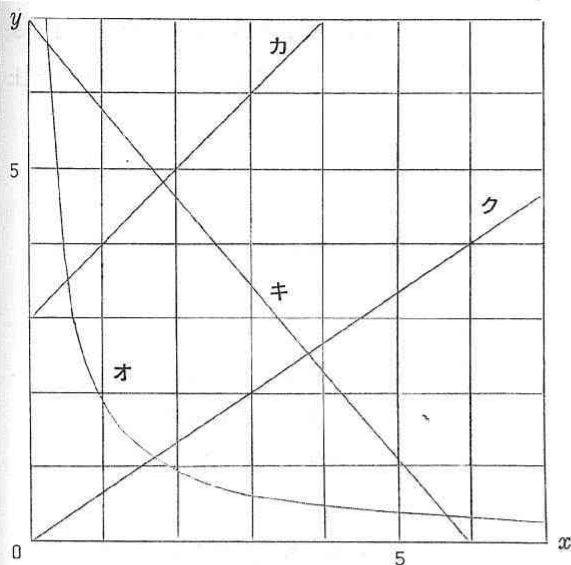
③ 80

④ 52

① 38

② 46

B群(グラフ)



C群(式)

ケ $y = \frac{x}{4}$

コ $y = \frac{5}{x}$

サ $x + y = 3$

シ $x - y = 2$

(5) 調査の実施期日と調査方法

① 分析的問題による調査の実施期日は、9月22日および9月28日の第5校時50分、第6校時50分(いずれも午後)と、10月1日の第3校時50分、第4校時50分(いずれも午前)である。

② 調査方法は、第3校時または第5校時に分析的問題1～7、第4校時または第6校時に分析的問題8～13による調査を実施した。

Ⅱ 研究の結果とその考察

1 点の座標を読みとる能力

調査問題⑥

(1) 調査問題⑥の応答調査

調査問題⑥の応答分析

		調査問題⑥ 2			
		正答	誤答	無答	計
調査問題⑥ 1	正答	32	37	3	72
	誤答	3	18	3	24
	無答	0	0	4	4
	計	35	55	10	100

調⑥のねらいは、「点の座標を読みとる能力」をみることである。調⑥1は、「グラフ上の点の座標を読み取る能力」を、調⑥2は、「直線のグラフとx軸との交点の座標を読み取る能力」をみるのがねらいである。

調⑥について、調査対象100人の生徒の応答分析を行なってみると左の表ようになる。

この表のとおり、調⑥1の正答率は72%(正答者72人)で、調⑥2の正答率は35%である。調⑥1、2とも正答のものは32人で、調⑥1、2とも誤答か無答のものは25人である。

次に、調④1、2の誤答例を示す。

—— 誤答例にある P_{28} , P_{85} とは、生徒の記号であって、その数字は、この研究のための調査問題と分析的問題の全部の正答数によって決めた調査対象100人の生徒の成績順位が、28番目または85番目であったことを表わす。なお、 P_{28} , P_{85} は、そのような誤答をした中で、この成績順位が最も上位であった生徒である。以下このような表わし方をする。——

調査問題④1の誤答例

- a. グラフの目もりを読み間違えているもの。
- b. x 座標と y 座標とをとり間違えているもの。

正 答 (3 , 4)

P_{28} (4 , 4) 5人

P_{85} (4 , 3) 3人

- c. 点の座標を読みとる能力があるとは思われないもの。

P_{66} (0 , 1)

P_{74} (0 , 4)

P_{81} ($3x$, $4y$)

P_{94} ($\frac{5}{x}$, $\frac{4}{y}$)

調査問題④2の誤答例

- a. グラフの目もりを読み間違えているもの。
- b. x 座標と y 座標とをとり間違えているもの。
- c. 座標の正負が誤っているもの。

正 答 (-1 , 0)

P_{2} (1 , 0) 7人

P_{7} (0 , 1) 3人

P_{30} (0 , -1) 4人

P_{55} (1 , 1) 5人

P_{37} (-1 , 1) 9人

- d. その他 $P_{28}(4, 5)$, $P_{83}(9, 5)$, $P_{81}(5x, 4y)$, $P_{71}(-0, -0)$

(2) 調査問題④の分析的問題による調査結果の分析

① 分析的問題1による調査結果の分析

分1は、「各象限や各軸上における点の座標を読みとる能力と、その能力の差をみる」ことをねらいにした問題である。分1の各小問の調査の結果を、正答率の高い順に示すと次のようになる。

順位	小問の(点の位置) 番 号	正答率 (%)	下位群(34人) の正答者の人数	
1	③ (原点)	87	21	} 全小問正答 42人 全小問誤答か無答 7人 ④と⑤に正答 71人 ④と⑤に誤答か無答 12人
2	④ (第1象限)	82	20	
3	⑧ (y 軸の正)	79	15	
4	② (x 軸の正)	76	14	
5	⑤ (x 軸の負)	76	15	
6	⑥ (第3象限)	74	15	
7	① (第2象限)	73	16	
8	⑨ (y 軸の負)	73	13	
9	⑦ (第4象限)	72	13	

この表によると、正答率の最高は、③（原点の座標）で、最低は、⑦（第4象限の座標）である。

分1の小問の正答率相互の差の検定を行なうと、危険率1%もしくは5%で有意差のあるものは次の六つである。その他の小問の正答率相互には危険率5%で有意差が認められない。

③（原点）と⑦（第4象限）	××	③（原点）と⑥（第3象限）	×
③（原点）と⑨（ y 軸の負）	×	③（原点）と⑤（ x 軸の負）	×
③（原点）と①（第2象限）	×	③（原点）と②（ x 軸の正）	×

つまり、小問③（原点の座標）と小問⑦（第4象限の点の座標）の正答率には、危険率1%で、有意差があり、小問③と小問⑨（ y 軸の負の点の座標）、①（第2象限の点の座標）、⑥（第3象限の点の座標）、⑤（ x 軸の負の点の座標）、②（ x 軸の正の点の座標）の正答率には、危険率5%で有意差がある。

なお、小問④（第1象限の点の座標）と小問⑤（ x 軸の負の点の座標）の正答率には、危険率5%で有意差が認められなかった。

先の表には、下位群だけの正答したものの数もかかっている。この下位群だけの小問の正答率の差の検定も行なってみたが、いずれも危険率5%で有意差が認められなかった。

以上のことから、原点を除いては、点の位置が変わっても、点の座標を読みとる能力には差が認められない。

分1の小問の全部に正答したものは、42人で、正答の一つもなかったものは7人であった。

次に、この問題の誤答例を示す。

	正 答	誤 答 例
a. グラフの目もりを読み間違えているもの。	(-2, 8) P26	(-2, 7) (4, 0) P43
b. x 座標と y 座標とをとり間違えているもの。	(4, 0) P49	(0, 4) (-5, 0) P64
c. 座標の正負が誤っているもの。	(0, -7) P22	(0, 7) (-6, -14) P5

② 分析的問題 1 ①, ②, ③, ④による調査結果の分析

分1の①, ②, ③, ④は、「点の座標を分析して、 x 座標または y 座標を読みとる能力をみる」ことをねらいにした問題である。この問題の正答率は次のとおりである。

— かつこの中は、小問の内容の概略である。—

①（点Pの x 座標）	77	}	全小問正答	62人(分1④と⑤に正答	71人)
②（点Qの x 座標）	76				
③（点Pの y 座標）	79				
④（点Qの y 座標）	72				
①と③（点Pの座標）	71……	}	82(分1④の正答率)	76(分1⑤の正答率)	
②と④（点Qの座標）	66……				

①と③をともに正答した正答率71%と、②と④をともに正答した正答率66%には、危険率5%で有意差が認められない。

次に、この問題の誤答例を示す。

	小問①	小問②	小問③	小問④
P 9 4 の誤答	($\frac{3}{5}$)	($\frac{1}{6}$)	($-\frac{3}{6}$)	($-\frac{1}{6}$)
P 8 4 の誤答	(3 , 4)	(0 , -1)	(3 , 4)	(-1 , 0)
P 9 5 の誤答	(4 x)	(5 x)	(4 y)	(5 y)

③ 分析的問題 1, 1 1 による調査結果の比較

ここでは、分 1 ④、⑤と分 1 1 による調査結果を比較して検討してみる。

分 1 ④は、第 1 象限にある点 P の座標を、分 1 ⑤は、 x 軸の負の上にある点 Q の座標を読みとる能力をみる問題である。

分 1 1 は、点の座標を分析して、 x 座標または y 座標を読みとる能力をみる問題である。分 1 1 ①、③は、第 1 象限にある点 P の x 座標、 y 座標を、分 1 1 ②、④は、 x 軸の負の上にある点 Q の x 座標、 y 座標を読みとる能力をみる問題である。したがって、分 1 1 ①、③の二つに正答したものは、点 P の座標を分析して正しく読みとったことになり、分 1 1 ②、④の二つに正答したものは、点 Q の座標を分析して正しく読みとったことになる。

そこで、これらの正答率を次のようにまとめて示す。

{ 分 1 1 ①と③の二つとも正答したもの（点 P の座標）	7 1 人	0
{ 分 1 1 ②と④の二つとも正答したもの（点 Q の座標）	6 6 人	0
{ 分 1 ④（点 P の座標）の正答率	8 2	0
{ 分 1 ⑤（点 Q の座標）の正答率	7 6	0

分 1 1 ①と③の正答率 7 1 % と、分 1 ④の正答率 8 2 % とには、危険率 5 % で有意差が認められない。

また、分 1 1 ②と④の正答率 6 6 % と、分 1 ⑤の正答率 7 6 % とにも、危険率 5 % で有意差が認められない。したがって、点 P、または点 Q の座標を、分析して読みとる能力と、総合して読みとる（点 5, 7 のように）能力については差があるとは思われない。

(3) 調査問題 ④の分析的問題による面接調査

1 2 月に、分 1 1 ①、②、③、④について、面接調査を行なった。次にその概略を示す。

P 7 2 は、分析的問題による調査においては、分 1 1 ①、②、③、④の全小問に誤答であった。その誤答は、次のとおりである。

① (4 , 3) ② (0 , -1) ③ (3 , 4) ④ (-1 , 0)

つまり、点の x 座標、または y 座標だけを答えとして要求しているのであるが、 x 座標と y 座標の二つを答えている。

面接調査を行なってみると、分析的問題による調査のときと同じ誤りをした。問題の文章をていねいに読まない。問題の文章をていねいに読ませると、点の座標を分析して正しく読みとることができた。

P 7 4 は、分析的問題による調査においては、分 1 1 ①、②、③、④の全小問に誤答であった。その誤答は次のとおりである。

①(4) ②(0) ③(3) ④(1)

つまり、 x 座標と y 座標をとり違えている。しかも④は、負の記号をつけていない。

面接調査によると、最初の応答は、 x 座標と y 座標の二つを答える。問題の文章を再び読みかえさせると誤りに気づく。そして正しく答えることができる。ただし、グラフの目もりを正しく読みとらせる指導が必要であった。

P79は、分析的問題による調査においては、分11①、②、③、④の全小問に誤答であった。その誤答は次のとおりである。

①($\div + 1$) ②($-1, 0$) ③(無答) ④($1, 0$)

面接調査によるとP79は、 x 軸を数直線と考えている。点の読みとりは、最初はずまずが、一つ一つ指示して読みとらせると、正しく読みとるようになる。

(4) 調査問題⑥の分析的研究のまとめ

—— 点の座標を読みとる能力をみる。——

調査問題⑥

① 各象限や各軸上における点の座標を読みとる能力と、その能力の差をみる。

分1の調査の結果の分析によって次のことがいえる。

分析的問題1

各象限や各軸上における点の座標を読みとる能力については、

- a. 40%の生徒は、その能力がじゅうぶんに身についている。
- b. 30%、もしくは35%の生徒は、その能力がおよそ身についている。
- c. 20%の生徒は、その能力が不じゅうぶんである。
- d. 10%の生徒は、その能力をまったくもっていない。

各象限や各軸上における点の座標を読みとる能力の差については、

原点の座標を読みとる能力を除いては、座標平面における点の位置が変わっても点の座標を読みとる能力には差があるとは思われない。したがって、第1象限の点の座標を読みとる能力と、 x 軸上の負の位置にある点の座標を読みとる能力にも差があるとは思われない。

そこで、調⑥1は、第1象限にある点の座標を読みとる能力をみる問題であり、調⑥2は、 x 軸上の負の位置にある点の座標を読みとる能力をみる問題であるが、この二つの小問において、正答率に大きな差異のあるのは、読みとらせる点の位置が異なるからではなく、その他に大きな理由があるのではないと思われる。

② 点の座標を分析して、 x 座標または y 座標を読みとる能力をみる。

分析的問題11①、②、③、④

分1ならびに、分11①、②、③、④の調査の結果を比較してみると、「点の座標を読みとる能力」と、「点の座標を分析して、 x 座標または y 座標を読みとる能力」とには、差があるとは思われない。

また、点の座標を分析して読みとらせてみても、点の座標を読みとる能力については、その点が第1象限であっても、 x 軸の負にあっても差があるとは思われない。そこで、分1の調査の結果の分析によっても考察したことと同じことがいえる。つまり、調⑥1と調⑥2において正答率に大きな差のあるのは、読みとらせる点の位置が異なるからではなく、その他に大きな理由があるのではないと思われる。

③ 面接調査のまとめ

面接調査によると、点の座標を読みとる能力のふじゅうぶんの生徒であっても、わずかの暗示で、正しく点の座標を読みとるようである。このような生徒の多くは、思考の転換がむずかしい、つまり、思考がかたいからではなからうか。

2 一次の関係についての理解

調査問題 7

(1) 調査問題 7 の応答調査

調査問題 7 の応答調査

		調査問題 7 2			
		正答	誤答	無答	計
調査問題 7 1	正答	8	13	2	23
	誤答	4	39	6	49
	無答	1	14	13	28
	計	13	66	21	100

調 7 のねらいは、「一次の関係についての理解」をみることである。調 7 1 は、「一次の関係で変数 x の変化に対応する変数 y の変化と x の係数の意味についての理解」を、調 7 2 は、「一次の関係で対応する変数の値の変化についての理解」をみるのがねらいである。

調 7 について、調査対象 100 人の生徒の応答分析の結果は、左の表のようになる。この表のとおり、調 7 1 の正答率は 23% で、調 7 2 の正答率は 13% である。調 7 1, 2 ともに正答したものは 8 人で、調 7 1, 2 ともに誤答か無答のものは 72 人である。

次に、調 7 1, 2 の誤答例を示す。

調査問題 7 1 の誤答例

(正答 $\frac{2}{3}$)

P 3 1 19 人

P 2 2 2 9 人

P 4 3 $\frac{1}{3}$ 3 人

調査問題 7 2 の誤答例

(正答 $1\frac{2}{7}$)

P 9 2 14 人

P 3 7 3 14 人

P 1 6 4 7 人

P 8 5 6 3 人

P 1 5 $\frac{7}{9}$ (正答の逆数) 1 人

(2) 調査問題 7 の分析的問題による調査結果の分析

① 分析的問題 2 による調査結果の分析

分 2 は、調 8 を要素に分析したり、 x の係数の分数を整数になおしたりして、「各小問の応答を比較して一次の関係の理解をみる。」ことをねらいにしている。分 2 ① は、「一次の関係で変数 x の変化に対応する変数 y の変化と x の係数の意味についての理解をみる」ことを、分 2 ② は、「一次の関係で対応する変数の値の変化についての理解をみる」ことをねらいにしている。

分 2 ①, ② の正答率は次のとおりである。

一 次 関 数		① の 正 答 率	② の 正 答 率	①, ②ともに正答
ア	$y = 2x$	57	58	41
イ	$y = \frac{2}{3}x$	48	41	32
ウ	$y = 2x + 3$	40	21	19
エ	$y = \frac{2}{3}x + 5$	35	20	17

分析的問題2①, ②のア, イとウ, エの正答率とその有意差の検定

一 次 関 数		①の正答率	②の正答率
ア	$y = 2x$	57	58
イ	$y = \frac{2}{3}x$	48	41
アとイの差		○	×

一 次 関 数		①の正答率	②の正答率
ウ	$y = 2x + 3$	40	21
エ	$y = \frac{2}{3}x + 5$	35	20
ウとエの差		○	○

上の表の説明 この調査は, x の係数が, 分数のときと, 整数のときとの正答率の差をみたものである。

比例の関係の式においては,

①のときは, アとイの正答率に危険率5%で有意差が認められない。つまり, x の係数が分数であっても, x の係数が整数のときと比較して難易の差は認められない。

②のときは, アとイで危険率5%で有意差がある。これは x の係数が, 分数であるときと, 整数であるときでは難易に差があることになる。このことは②の操作を代入計算によって行なうからであろう。比例関係の理解がじゅうぶんであると, アとイには差がないものと思われる。

一次の関係の式においては,

①のときも, ②のときも, ウとエの正答率に危険率5%で有意差が認められない。

分析的問題2①, ②の正答率とその有意差の検定

左の表の説明

一 次 関 数		①	②	①と②の差
ア	$y = 2x$	57	58	○
イ	$y = \frac{2}{3}x$	48	41	○
ウ	$y = 2x + 3$	40	21	××
エ	$y = \frac{2}{3}x + 5$	35	20	×

ア, イについては, ①と②の正答率に危険率5%で有意差が認められない。

ウ, エについては, ①と②の正答率に危険率1%もしくは5%で有意差がある。これは②の代入計算が複雑であったり, 対応変化の理解が不じゅうぶんであるからであろう。

分析的問題 2 ①, ②のアとウ, イとエの正答率とその有意差の検定

一 次 関 数		①	②
ア	$y = 2x$	5 7	5 8
ウ	$y = 2x + 3$	4 0	2 1
ア と ウ の 差		×	××

一 次 関 数		①	②
イ	$y = \frac{2}{3}x$	4 8	4 1
エ	$y = \frac{2}{3}x + 5$	3 5	2 0
イ と エ の 差		○	××

上の表の説明 ア, イは定数項がなく, ウ, エは定数項のある問題である。

①について,

①は, x の係数の意味を理解している生徒にとっては, アよりもウが, イよりもエがむずかしいということはないと思われる。けれども,

アとウの正答率に危険率 5% で有意差のあるのは, x の係数の意味の理解がじゅうぶんでないので, 多くの生徒は, 代入計算によって求答したことや, また, 定数項の意味の理解の不じゅうぶんのこともあるからであろう。

イとエの正答率には危険率 5% で有意差が認められない。

②について,

②においては, アとウ, イとエの正答率に危険率 1% で有意差がある。

代入計算によると, ア, イよりも, ウ, エは計算が複雑になり, また, 定数項の意味の理解の不じゅうぶんもあって, それらの正答率に危険率 1% で有意差があることになろう。

分 2 ①, ②の誤答例

分 2 ①の誤答例

①アの誤答例 (正答 2) P 3 8	1	1 1 人
P 2 2	$\frac{1}{2}$	7 人
①イの誤答例 (正答 $\frac{2}{3}$) P 3 6	$\frac{1}{3}$	8 人
①ウの誤答例 (正答 2) P 1 5	5	7 人
P 3 6	$\frac{1}{2}$	3 人
①エの誤答例 (正答 $\frac{2}{3}$) P 1 5	$5\frac{2}{3}$	5 人
$P 15 \left\{ \begin{array}{l} 2 + 3 = 5 \\ \frac{2}{3} + 5 = 5\frac{2}{3} \end{array} \right\} 5 \text{ 人}$		

分 2 ②の誤答例

②アの誤答例 (正答 2) P 4 3	3	6 人
②イの誤答例 (正答 2) P 7 0	3	4 人
P 1 1	$\frac{2}{3}$	6 人
②ウの誤答例 (正答 $1\frac{2}{3}$) P 1 2	$\frac{3}{5}$ (逆数)	6 人
P 1 4	2	1 5 人
P 4 3	3	6 人
②エの誤答例 (正答 $1\frac{2}{7}$) P 1 4	2	9 人
P 1 2	$\frac{7}{9}$ (逆数)	6 人
P 6 4	3	3 人
$P 12 \text{ (逆数)} \quad 4 \text{ 人}$		

② 分析的問題 1 2 による調査結果の分析

分 1 2 は、「式と表から、表にあてはまる数を求める能力をみる」ことをねらいにした問題である。

分 1 2 の正答率は次のとおりである。—— 2 小問を正答したものだけを正答とする。——

① ($y = 2x$)	$\begin{Bmatrix} 9 & 3 \\ 9 & 6 \end{Bmatrix}$	9 3	} ①, ②, ③, ④とも正答 3 9 人 ①, ②, ③, ④とも誤答か無答 2 人
② ($y = \frac{2}{3}x$)	$\begin{Bmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \end{Bmatrix}$	7 3	
③ ($y = 2x + 3$)	$\begin{Bmatrix} 8 & 0 \\ 8 & 2 \end{Bmatrix}$	8 0	
④ ($y = \frac{2}{3}x + 5$)	$\begin{Bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 1 \end{Bmatrix}$	5 2	

③ 分析的問題 2 ①, 1 2 による調査結果の比較

分 2 は、「各小問の応答を比較して一次の関係の理解をみる。」ことを、分 2 ①は、「一次の関係で、変数 x の変化に対応する変数 y の変化と x の係数の意味についての理解をみる。」ことをねらいにしている。分 1 2 は、「式と表から、表にあてはまる数を求める能力をみる。」ことをねらいにしている。

そこで、分 2 ①と分 1 2 の正答率を、次の表のように、対応する小問ごとに比較して、その正答率の有意差の検定を行なった。

分 2 ①と分 1 2 との正答率の有意差の検定

一 次 関 数	分 2 ①	分 1 2	有 意 差
$y = 2x$	ア 5 7	① 9 3	× ×
$y = \frac{2}{3}x$	イ 4 8	② 7 3	× ×
$y = 2x + 3$	ウ 4 0	③ 8 0	× ×
$y = \frac{2}{3}x + 5$	エ 3 5	④ 5 2	×

上の表によると、分 2 ①と分 1 2 とには、各小問とも危険率 1 % または 5 % で有意差がある。これは、分 1 2 は、表が示されているからであろう。

(3) 調査問題 7 の分析的問題による面接調査

分 2 について面接調査を行なった概略次に述べる。

P 2 は、分析的問題による調査においては、分 2 の全小問を正答した生徒である。けれども、面接調査によると、ア、イの小問（比例の関係）をみて、ただちに、 x の係数の意味から考えて応答しない。代入計算によって、答えを求めている。

P 1 7 は、分析的問題による調査においては、分 2 ①は全小問を正答し、分 2 ②は全小問を誤答している。面接調査においては、表 ($\frac{x}{y} \begin{Bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{Bmatrix}$) を作るようにヒントを与えると、ただちに表を作って分

2②に正答した。

P 2 1 は、分析的問題による調査においては、分 2 の全小問を正答した生徒である。面接調査においては、代入計算をしたり、 x の係数の意味から判断したりして応答する。

P 4 8 は、分析的問題による調査においては、分 2 の全小問を誤答している。面接調査においては、
表 $\left(\begin{array}{c|c} x & 1, 2, 3, 4 \\ \hline y & 5\frac{2}{3}, 5\frac{4}{3}, 7, 5\frac{8}{3} \end{array} , \begin{array}{c|c} x & 3, 6 \\ \hline y & 7, 9 \end{array} \text{ など} \right)$ も書くことができる。表を書くことによって
正答することができる。

P 5 1, P 7 7 は、分析的問題による調査においては、分 2 の全小問を誤答か無答である。面接調査によると、分数の計算技能が未熟である。たとえば、整数、仮分数、帯分数の相互の計算を能率的な方法で行なうことができない。また、分数の計算にも誤りが多い。表を作らせて正答させることができる。

(4) 調査問題 7 の分析的研究のまとめ

—— 一次の関係についての理解をみる。 ——

調査問題 7

① 各小問の応答を比較して一次の関係の理解をみる。 分析的問題 2

○ 一次の関係で変数 x の変化に対応する変数 y の変化と x の係数の意味についての理解をみる。

分析的問題 2 ①

x の係数の意味をじゅうぶん理解している生徒にとっては、一次の関係の式が、分析的問題 2 のように多少複雑になっても、関数の増す値を求める操作は、むずかしくならないと思われる。

ところで、分析的研究によると、式が多少複雑になると正答率に有意差が認められることがあった。これは、代入計算によるために、式が複雑になると計算技能の未熟のこともあって正答率に有意差が認められたのであろう。

その他の場合においては、正答率に危険率 5 % で有意差が認められなかったが、これだけの比較検討では、その理由は解明できない。

○ 一次の関係で対応する整数の値の変化についての理解をみる。

分析的問題 2 ②

分 2 ② のアとイ、アとウ、イとエの正答率には危険率 1 % または 5 % で有意差がある。これは代入計算によるために、式が複雑になると、計算技能の未熟のこともあって、正答率が下がるものと思われる。

② 式と表から、表にあてはまる数を求める能力をみる 分析的問題 1 2

さきの分 2 ① と分 1 2 の正答率の比較において、それぞれ対応する小問の正答率に危険率 1 % もしくは 5 % で有意差のあることがわかった。これは当然のことであるが重要なことである。というのは、一次の関係の式から対応変化の値を求めるには、表を作って考えさせると正答率がたしかに高まることを意味するからである。

③ 面接調査のまとめ

分 2 による面接調査の結果を次のようにまとめる。

一次の関係で、変数の変化に対応する関数の変化を求めるときは、多くの生徒は x の係数の意味から

推理しないで、代入計算によって求答する。

一次の関係の表は、ほとんどの生徒が書くことができる。表からは、大部分の生徒は対応・変化の値を求めることができる。

3 具体的な事からによる一次の関係についての理解

調査問題⑧

(1) 調査問題⑧の応答調査

調⑧は、「具体的な事からによる一次の関係についての理解」をみることがねらいである。調⑧1は、「時間の変化に伴う長方形の面積を一次関数で表わす能力」を、調⑧2は、「時間の変化に伴う長方形の面積が時間と一次の関係にあることについての理解」をみることがねらいである。

調⑧の応答調査の結果は次のとおりである。

調⑧1の正答は、「 $y = 5(3 + x)$ 」または、「 $y = 15 + 5x$ 」で、この正答率は13%である。

調⑧2の正答は、選択肢のウとエの二つを選択したもので、この正答率は13%である。

調⑧1に正答した13人は、調⑧2では、次のように選択肢を選んでいる。

8人は、ウとエの二つを正しく選んでいる。(調⑧2も正答)

2人は、ウの一つを正しく選んでいる。他の選択肢を選んでいない。(調⑧2は誤答)

1人は、エの一つを正しく選んでいる。他の選択肢を選んでいない。(調⑧2は誤答)

2人は、ウの一つは正しく、アの一つを誤って選んでいる。(調⑧2は誤答)

このように、調⑧1に正答した13人の中では、調⑧2に正答したものは8人で、誤答したものは、5人である。この5人の中でも、正しい選択肢の一つだけ選んだ3人は、正しい選択肢の一つと、誤って選択肢ア(y は x に比例する。)も選んだ2人よりは、比例関係の理解が深いように思われる。

調⑧2の応答分布は、

選択肢	ア	y は x に比例する。	37人	} ⑦と⑤をともに選択したもの 13人(正答)
	イ	y は x^2 に比例する。	25人	
	⑦	$y - 15$ は x に比例する。	32人	
	⑤	y は、 x に比例する数と 15との和である。	48人	
	オ	y は x に反比例する。	17人	
	無 答		41	

調⑧2で正答した13人は、調⑧1では次のように応答している。

- 8人は、「 $y = 5(3 + x)$ 」または「 $y = 15 + 5x$ 」と正しく応答している。
- 2人は、「 $y = 15 + x$ 」と誤って応答している。
- 1人は、「 $y = 5\text{cm}$ 」と誤って応答している。
- 2人は、無答である。

このように、aの8人の生徒は、 x と y の関係を正しく判断していることはいうまでもないことであるが、bの2人の生徒も、調⑧1では誤答をしているが、その誤答が「 $y = 15 + x$ 」であったために、調⑧2の応答は、 x と y の関係を正しく判断しての結果であるといえる。

cの1人の生徒、つまりP71の応答は、偶然の正答であろう。dの2人、つまりP24とP62もおそらく偶然の正答であろう。

したがって、調82においては、 x と y の関係を正しく判断して選択肢②と④を選んだものは、おそらく10人であろう。

調82で、ウ、エの選択肢を選んだもので、調81ではどのように応答しているかを分析してみると次のようになる。

調82で選択肢ウを選んだものは32人で、内訳は、

8人は、調81で、「 $y = 15 + 5x$ 」と応答し、調82では、選択肢エも選ぶ。

4人は、調81で、「 $y = 15 + 5x$ 」と応答し、調82では、選択肢エ以外を選ぶ。

4人は、調81で、「 $y = x + 15$ 」と応答

19人は、調81で、「 $y = 15 + 5x$ 」, 「 $y = x + 15$ 」以外の応答

7人は、調81で無答

調82で選択肢エを選んだものは48人で、内訳は、

8人は、調81で、「 $y = 15 + 5x$ 」と応答し、調82では、選択肢ウも選ぶ。

1人は、調81で、「 $y = 15 + 5x$ 」と応答し、調82では、選択肢ウ以外を選ぶ。

3人は、調81で、「 $y = x + 15$ 」と応答

1人は、調81で、「 $y = cx + 15$ 」と応答

24人は、調81で、「 $y = 15 + 5x$ 」, 「 $y = x + 15$ 」, 「 $y = cx + 15$ 」以外の応答

11人は、調81で、無答

以上のように、調82においては、その選択肢を正しく選んだ生徒であっても、 x と y の関係を正しく判断しているものは少ない。

「 y は x に比例する。」の選択肢アを選んだ37人の中には、「 y は x に反比例する。」の選択肢オを選んだ生徒は1人もいなかったことは、比例と反比例の区別は正しく理解しているからであると思われる。けれども、この37人の中の29人は、他の選択肢も選んでいる。

したがって、多くの生徒は、調82の選択肢の文章の意味の理解がじゅうぶんでないといえる。

調査問題81の誤答例 (正答 $y = 15 + 5x$)

A x 型			A $x + B$ 型			x^2 型		
P3	15 x	11人	P9	$x + 15$	8人	P35	x^2	3人
P8	5 x	2人	P29	5 $x + 3$	2人			
P64	8 x	1人	P47	$cx + 15$	1人			
P16	ax	1人	P83	$x + 8$	1人			

(2) 調査問題8の分析的問題による調査結果の分析

① 分析的問題7による調査結果の分析

分7は、調81の思考過程を分節化し、調81の変数 x を定数 x に置き換えたものである。そして分7は、「具体的な事からによる一次の関係について、変数を定数に置き換えたとき、一次の関係を式で

表わす能力をみる」ことをねらいにしている。

分7の正答率は41%である。

この正答率は、調81の正答率13%と比較するとたいそう高まっている。この高まった理由については、こまかく分析しなければならないが、その要因の大きなものは、分7は調81の変数を定数に置き換えた問題であるからであろう。

次に、分7の誤答例を示す。

(正答は、 $y = 5x + 15$ または、 $y = 5(3 + x)$)

P 2 3	$y = 3x \times 5$	4人	P 4 8	$y = 5 \times 3 + x$	1人
P 3 0	$y = 15x$	2人	P 4 6	$y = 5x + 3$	1人
P 2 6	$y = 5x$	3人	P 5 9	$y = \frac{3}{5}x$	2人
P 4 0	$y = 3x + 5$	3人			
P 3 5	y cm (白紙答案にちかいものや、文字を用いて立式することが困難と思われるもの) 13人				
P 5 2	無 答	16人			

② 分析的問題4による調査結果の分析

分4は、「文章で表わされた二つの数量の関係の例を、式で表わす能力をみる」ことをねらいにしている。

分4の正答の例と正答率

① y は x に比例する。	$y = ax$	68	全小問正答 13人 全小問誤答 か無答 28人
② y は x^2 に比例する。	$y = ax^2$	58	
③ $y - 15$ は x に比例する。	$y - 15 = ax$	45	
④ y は、 x に比例する数と15との和である。	$y = ax + 15$	43	
⑤ y は、 x に反比例する。	$y = \frac{a}{x}$	25	

③ 分析的問題9による調査結果の分析

分9は、調82に、一次関数 $y = 5x + 15$ の式を付け加えた問題で、「式から二つの数量の関係を見いだす能力をみる」ことをねらいにしている。

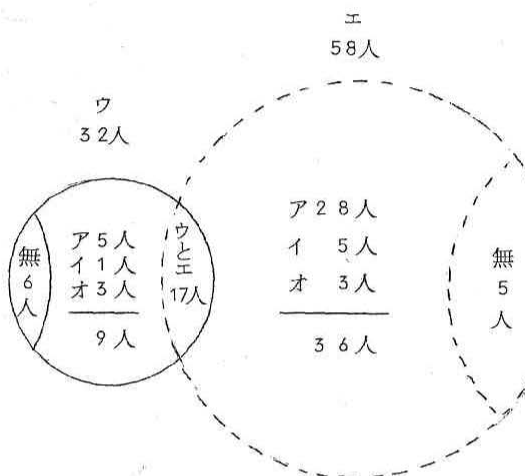
分9は、選択肢ウ、エの二つを選んだものが正答で、その正答率は17%である。

選択肢	ア y は x に比例する。	57人	⑦と⑧をともに選択したもの 17人(正答)
	イ y は x^2 に比例する。	9人	
	⑦ $y - 15$ は x に比例する。	32人	
	⑧ y は、 x に比例する数と15との和である。	58人	
	オ y は x に反比例する。	29人	
	無 答	15	

選択肢ウを選んだ32人は、選択肢エを選んだ58人は、他の選択肢を次のように選んでいる。

選択肢ウを選んだ32人は、	ア	5人	選択肢エを選んだ58人は、	ア	28人
	イ	1人		イ	5人
	ウ	／		ウ	17人
	エ	17人		エ	／
	オ	3人		オ	3人
	無	6人		無	5人

上の表によると、選択肢ウを選んだ32人の中で、選択肢ア、イ、オを選んだ9人と、選択肢エを選んだ58人の中で、選択肢ア、イ、オを選んだ36人は、それぞれ意味の矛盾した選択肢を選んでいることになる。つまり、9人+36人=45人の生徒は、一つの選択肢を正しく選んで、これと矛盾する他の選択肢も選んでいる。一つの選択肢を正しく選んで、他の選択肢を選ばなかった（一つは無答）、6人+5人=11人の生徒は、矛盾した選択肢を選ぶ誤りをおかさなかったことになる。



これらの関係を示したものが、左の図である。その他、矛盾した選択肢を選んだものが多い。選択肢の文章の意味をじゅうぶんに理解していないことが、このように、矛盾した選択肢を選ぶ大きな原因と思われる。

なお、選択肢アとオの二つを選んだ生徒は1人もいない。これは、比例と反比例の区別については明瞭に理解しているからであろう。

④ 分析的問題10による調査結果の分析

分10は、「式から二つの数量の関係を文章で書き表わす能力をみる」ことをねらいとした問題である。分10に、一つ以上を正答したものは45人で、一つも正答していなかったもの、つまり、誤答か無答であったものは55人であった。

分10に正答したものは、

正答数が6のもの	1人 (P ₁)	} 一つ以上を正答したものは45人である。
" 4	1人 (P ₂)	
" 2	11人	
" 1	32人	

正答数が六つの生徒はP₁であるが、P₁の応答を次に示す。

$y-5$ は x に比例する。 $y-5$ は $3x$ に等しい。

y は x の3倍に5を増したものである。 y の値は x の値が増せば増すほど増す。

x が1増すごとに y は3増す。 y は x に比例する数と5の和である。

分10の正答を、正答したものの多い順から示すと次のようになる。

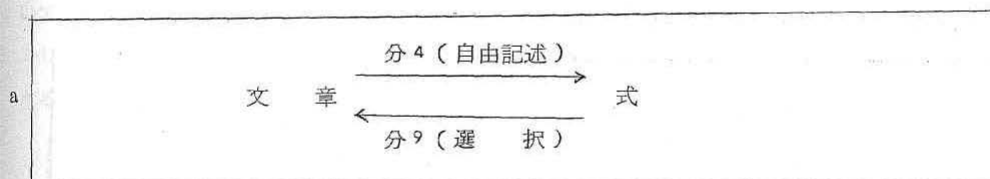
y は x に比例する数と5の和である。	34人	この二つを記述したもの10人
$y-5$ は x に比例する。	15人	
x が1増すごとに y は3増す。	7人	
y は x の3倍に5を増したものである。	3人	
$y-5$ は3 x に等しい。	2人	
y の価は x の値が増せば増すほど増す。	1人	
y から5をひいたものは3 x に等しい。	1人	
$y-3x$ と5は=でむすばれる。	1人	

分10の誤答で最も多いのは、「 y は x に比例する。」で、37人の生徒がこのように答えている。この37人の中の22人は、また、「 y は x に比例する数と5の和である。」と正答もしている。これを逆にいうと、「 y は x に比例する数と5の和である。」と正答した34人の中の22人は、「 y は x に比例する。」と誤答もしている。このように比例の関係と一次の関係($y=ax+b$)を同じと思っている生徒が多い。

⑤ 分析的問題4, 9, 10による調査結果の比較

分4③, ④と分9ウ, エの調査結果の比較

分4は、「文章で表わされた二つの数量の関係の例を、式で表わす能力をみる」ことをねらいにしており、自由記述の形式を用いている。分9は、「式から二つの数量の関係を見いだす能力をみる」ことをねらいにしており、選択法を用いている。そこで、文章や式の意味を表現する方向を次のような図式で表わすことができる。



この図式によって、分4③と、分4③に対応する分9ウを正答したものを表わすと次のとおりになる。

b

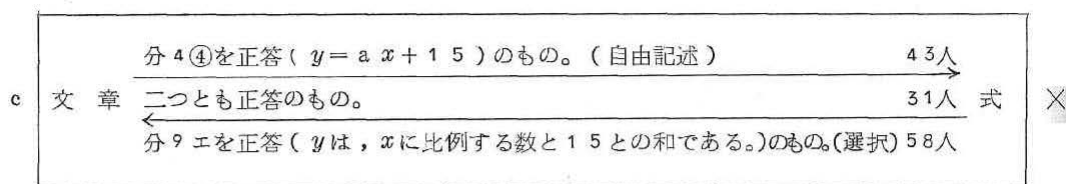
文章	$\xrightarrow{\text{分4③を正答(}y-15=ax\text{)のもの。(自由記述)}}$ $\xleftarrow{\text{分9ウを正答(}y-15\text{は}x\text{に比例する)のもの。(選択)}}$	式
	二つとも正答のもの。	
		○

分4③の正答率45%と、分9ウの正答率32%とは危険率5%で有意差が認められない。有意差についてはわくの右側に○, ×, ××のように示す。以下これにならう。したがって、この問題においては、文章から自由記述によって式を表わす能力と、式から、式の意味を表わした選択肢を正しく選択する能力には差がないと思われる。

分4③と分9ウの二つとも正答したものは16人である。それは、分4③に正答した45人のおよそ三分の一の16人は分9ウにも正答し、分9ウに正答した32人のおよそ二分の一の16人は、分4

③にも正答したことになる。

また、分4④と、分4④に対応する分9エを正答したものを、次のように図式で表わす。



分4④の正答率43%と、分9エの正答率58%とには、危険率5%で有意差がある。

したがって、この問題においては、文章から自由記述によって式を表わす能力と、式から式の意味を表わした選択肢を正しく選択する能力に差があると思われる。つまり、分4④が分9エよりもむずかしいと思われる。

bとcとでは、有意差があったり、なかったりするもので、意味を表現する方向が、aのように変わっても、どちらの方向がよりむずかしいということはいえないようである。問題によって、意味を表現する方向のむずかしさが違うように思われる。

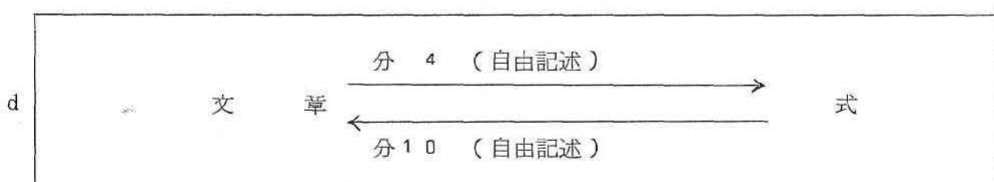
分4④と分9エの二つとも正答したものは、31人である。

分4④を正答した43人のおよそ7割の31人は、分9エにも正答し、分9エに正答した58人のおよそ二分の一の31人は分4④にも正答している。

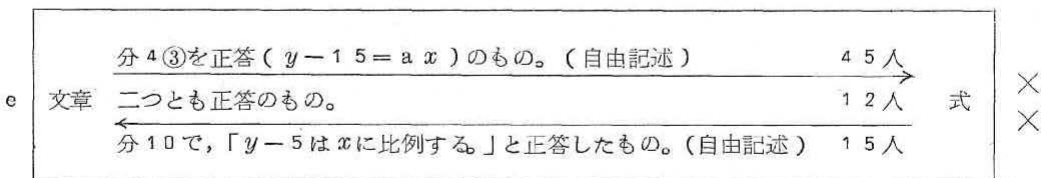
分4③、④と分10の調査結果の比較

分4は、「文章で表わされた二つの数量の関係の例を、式で表わす能力をみる」ことがねらいで、自由記述の形式を用いている。分10は、「式から二つの数量の関係を文章で書き表わす能力をみる」ことがねらいで自由記述の形式である。

そこで、意味を表現する方向を次のように図式で表わす。



分10で、「 $y - 5$ は x に比例する。」と正答したものと、これに対応する分4③に正答したものとを関連をdの図式で表わすと次のようになる。



分4③の正答率45%と、分10の正答率15%とには、危険率1%で有意差がある。

したがって、この問題においては、文章の意味の例を式で表わす能力と、式の意味を自由記述によって文章で表わす能力には差があり、後者がむずかしいと思われる。

分4③と分10の二つに正答したものは12人である。

分4③に正答したおよそ3割の12人は分10にも正答し、分10に正答したおよそ8割の12人が分4③にも正答している。

また、分10で、「 y は、 x に比例する数と5の和である。」と正答したものと、これに対応する分4④を正答したものを、次のように図式で表わす。

f	分4④を正答($y = ax + 15$)のもの。(自由記述)		43人	○
	文章	二つとも正答のもの。	23人	
	分10で、「 y は、 x に比例する数と5の和である。」と正答したもの(自由記述)		34人	

分4④の正答率43%と、分10の正答率34%とには、危険率5%で有意差が認められない。

したがって、この問題においては、文章の意味の例を式で表わす能力と、式の意味を自由記述によって文章で表わす能力には差のないことがわかる。

eとfとでは、有意差があったり、なかったりするもので、自由記述においても、意味を表現する方向が、dのように変わっても、どちらの方向がよりむずかしいということはいえないようである。それは、問題の内容によって、意味を表現する方向のむずかしさが違うように思われる。

分4④と分10の二つとも正答したものは23人である。

分4④を正答した43人のおよそ5割の23人は、分10でも正答し、分10で正答した34人のおよそ7割の23人が分10にも正答している。

分9と分10の調査結果の比較

分9は、「式から二つの数量の関係を見いだす能力をみる」ことをねらいにしており、選択法を用いている。分10は、「式から二つの数量の関係を文章で書き表わす能力をみる」ことをねらいにしており、自由記述の形式を用いている。そこで、意味を表現する方向を次のように図式で表わすことができる。

g	文 章	← 分 9 (選 択)	式
		←	
		← 分 10 (自由記述)	

そこで、分10で、「 $y - 15$ は x に比例する。」と正答したものと、これに対応する分9ウに正答したものとを、さきの図式で表わすと次のようになる。

h	文 章	← 分9ウを正答($y - 15$ は x に比例する。)のもの。(選 択)	32人	× ×
		← 二つとも正答のもの。	10人	
		← 分10で、「 $y - 5$ は x に比例する。」と正答したもの。(自由記述)	15人	

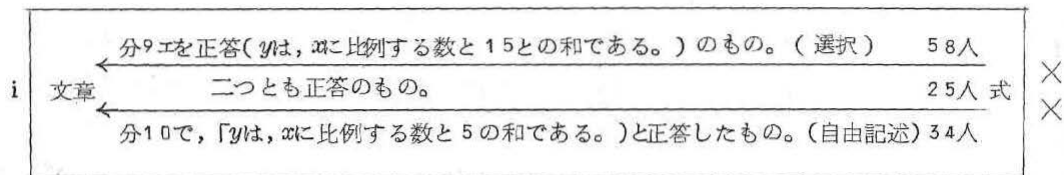
分9ウの正答率32%と、分10の正答率15%とには、危険率1%で有意差がある。

したがって、この問題においては、式から、式の意味を表わした選択肢を正しく選択する能力と、式

から式の意味を自由に記述する能力には差があり、後者がむずかしいことになる。

分9ウに正答した32人のおよそ三分の一の10人が分10にも正答し、分10で正答した15人の三分の二の10人が分9ウにも正答している。

また、分10で、「 y は、 x に比例する数と5の和である。」と正答したものと、これに対応する分9エに正答したものの関係もこの図式で表わすと次のようになる。



分9エの正答率58%と、分10の正答率34%とには、危険率1%で有意差がある。

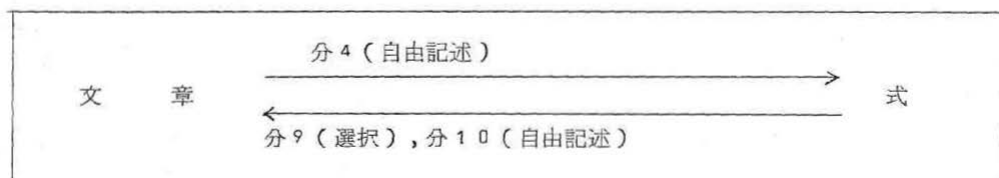
したがって、この問題においても、式から式の意味を表わした選択肢を正しく選択する能力と、式から、式の意味を自由に記述する能力には差があり、後者がむずかしいことになる。

hとiでは同じ結果がでている。したがって、式から式の意味を表わした選択肢を正しく選択することよりも、式から式の意味を自由に記述することがむずかしいといえる。これは一般に認められていることであろう。

分9エに正答した58人のおよそ4割の25人が分10にも正答し、分10で正答した34人のおよそ7割の25人が分9エにも正答している。

分析的問題4, 9, 10による調査結果の比較のまとめ

この比較は、意味を表現する方向の難易を調査したものである。つまり、文章からその文章の意味を式で表わす能力と、式からその式の意味を文章で表わしたり、式の意味を文章で表わした選択肢を選択する能力を比較研究したものである。この文章や式の意味を表現する方向を図式でまとめると次のようになる。



この比較した結果をまとめると次のようになる。

文章から文章の意味を式で表わす方向と、式から式の意味を文章で表わす方向は、

どちらの方向も自由記述の形式であるときは、どちらの方向がむずかしいとはいえない。問題の内容によるものと思われる。

文章から式の方向が自由記述の形式で、式から文章の方向が選択法であるときは、このときも、どちらの方向がむずかしいとはいえない。問題の内容によるものと思われる。

式から式の意味を文章で表わす方向では、

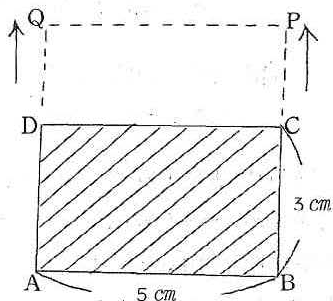
自由記述の形式が、選択法よりもむずかしい。

(3) 調査問題 ⑧，ならびにその分析的問題による面接調査

① 分 7 について面接調査を行なった概略を次に述べる。

P 19 は分析的問題による調査においては， $y = 3(x + 3)$ ， $y = 3x + 9$ として誤答しているが，面接調査では，ていねいに問題を読ませて応答させると， $y = 5(3 + x)$ と正しく応答した。

P 36 は，分析的問題による調査においては， $y = 3 \times 5 \times x$ ， $y = 15x$ として誤答した。面接調査で応答させると，「 $y = 5x(3 + x)$ 」と誤答する。「なぜ？」とたずねると，また考えて，「 $y = 5 - x(3 + x)$ 」と誤答を繰り返す。また，立式の理由をたずねると，考えて，「 $y = 5(3 + x)$ 」と正答した。その式が成立つ理由をたずねても答えられない。数字や文字で，自分でも意味のわからない操作をしているのである。



図を示して，「BP の長さを 5 cm とすると $\square ABPQ$ の面積は，いくらになりますか？」とたずねると，正しく立式して正答，「PC の長さを 4 cm とすると？」の問いには，「 $y = 5(3 + 4)$ 」と正答，「PC の長さを x cm とすると？」とたずねると，「 $y = 5(3 + x)$ 」と正しく立式する。

P 77 は，分析的問題による調査においては，無答である。

面接調査で，問題の文章を読ませて，質問を受けると，問題の文章の中の「関係」ということばの意味がわからないという。そこで，問題の文章の「 y cm」とします。 x と y の関係を式で表わしなさい。（ y を， x を用いた式で表わしなさい。）を削除して，「求めなさい。」を付け加える。つまり，問題を変形してみた。応答させると，「 $3x \times 5$ 」とする。そこで，「 x cm」を，「7 cm」と置き換えて，P 36 のように考えさせる。「 $10 \times 5 = 50$ 」と応答。「10 は？」，「 $7 + 3 = 10$ 」。「一本の式では？」「 $50 = (7 + 3) \times 5$ 」と応答。「7 が x であると？」「 $50 = (x + 3) \times 5$ 」と応答。7 cm を 2 cm と変えて同じように指導し，「 $y = (3 + x) \times 5$ 」の立式ができるようにした。

P 48 は，分析的問題による調査においては，「 $y = 5 \times 3 + x$ 」と誤答している。

面接調査では，問題の文章の中の「 x 」を「4」と書きなおして解答させたところ，「 $y = 5 \times (3 + 4)$ 」と正答した。そこで，その「4」をまた，書きなおして「 x 」として，考えさせると，「あ，そうか」と思わず声を出して，「 $y = 5 \times (3 + x)$ 」と正しく立式した。

② 調 ⑧ について面接調査を行なった概略を次に述べる。

P 1 は，応答調査ならびに分析的問題による調査においては，最高の成績であった生徒である。分 10 には，正答を最高の六つも書いている。P 1 に面接して，「 $y - 15$ は x に比例する。」と，「 y は， x に比例する数と 15 の和である。」の意味を，図やグラフで説明できるかどうかを調査してみた。ところが，二つとも，図やグラフでうまく説明することができなかった。

「 $y = 5x + 15$ 」の式を，ことばだけで説明できても，正しく理解しているとはいえない。

P 2 も，分析的問題による調査においては，「 $y - 15$ は x に比例する。」，「 y は， x に比例する数と 15 との和である。」と正しく記述しているが，面接調査によると図やグラフによって正しく説明

できない。

P 1 も P 2 も，図やグラフによって説明してやると，なるほどとなぜしている。

(4) 調査問題 ⑧ の分析的研究のまとめ

— 具体的な事からによる一次の関係についての理解をみる。 —

調査問題⑧

- ① 具体的な事からによる一次の関係について，変数を定数に置き換えたとき，一次の関係を式で表わす能力をみる。 分析的問題 7

分 7 は，調⑧ 1 の思考過程を分節化し，調⑧ 1 の変数 x を定数 x に置き換えたものである。調⑧ 1 は，正答率が 13% であった。分 7 は，分析的問題による調査ではあるが，正答率は 41% に高まっている。誤答例を分析すると，文字を使って面積を求める立式が困難のものが多くいようである。無答もしくは，無答に近いものは 31 人である。

- ② 文章で表わされた二つの数量の関係の例を，式で表わす能力をみる。 分析的問題 4

意味を表現する方向としては，「文章→式」で，問題は自由記述の形式である。全小問正答は 13 人で，全小問誤答か無答は 28 人である。

- ③ 式から二つの数量の関係を見いだす能力をみる。 分析的問題 9

分 9 は，調⑧ 2 に，一次関数 $y = 5x + 15$ の式を付け加えた問題で，意味を表現する方向としては，「式→文章」で，選択法を用いている。正答したものは 17 人である。この 17 人は正しい選択肢を二つ選んだものであるが，一つだけ正しい選択肢を選んでも，他の一つを誤った選択肢を選んでいるものが多い。矛盾した選択肢を選んでいるわけである。これは選択肢の意味をじゅうぶんに理解していないからであろう。とくに，比例の関係と一次の関係の区別のつかない生徒が多いと思われる。

- ④ 式から二つの関係を文章で書き表わす能力をみる。 分析的問題 10

分 10 は，一次関数 $y = 3x + 5$ を示して，この式の x と y の関係を自由記述させる問題であり，式の意味を文章で表わす能力をみることがねらいである。これを図式で表わすと「式→文章」となる。

分 10 に一つ以上を正答したものは 45 人で，正答の一つもなかったものは 55 人である。

- ⑤ 式の意味を文章で表わす能力と，文章の意味を式で表わす能力の差をみる。

分析的問題 4，9，10 の比較

分 9 と分 10 は，式の意味を文章で表わす能力をみることをねらいにした問題で，その意味を表現する方向を図式で，「式→文章」のように表わすことができる。問題の形式は，分 9 は選択法を用いており，分 10 は自由記述である。分 4 は，文章の意味を式で表わす能力をみることをねらいにした問題で，その意味を表現する方向を図式で，「文章→式」のように表わすことができる。問題の形式は，分 10 は自由記述である。

分 4，9，10 を比較検討することによって次のことがいえると思われる。

式の意味を文章で表わす能力と，文章の意味を式で表わす能力は，問題の内容によっても違い，問題

の形式によっても違う。

「式→文章」と「文章→式」のどちらも自由記述の問題形式である場合は、どちらの方向がむずかしいとはいえない。どちらの方向がむずかしかは、問題の内容によるものと思われる。

「文章→式」の方向が自由記述の形式で、「式→文章」の方向が選択法である場合も、どちらがむずかしいとはいえない。問題の内容によるものと思われる。

「式→文章」の方向では、自由記述の形式が選択法よりもむずかしい。

⑥ 面接調査のまとめ

○ 具体的な事がらからの立式

具体的な事がらを図によって説明することがむずかしい。

具体的な事がらを図によって説明できても、文字を用いて立式することがむずかしい。

文字を数字に置き換えるとほとんどの生徒が立式することができる。

数字によって立式ができると、文字による立式は容易になる。

○ 文章を、図やグラフによって説明することは、上位群の生徒でもむずかしい。

4 一次の関係の基礎的知識・理解

調査問題⑥，⑦，⑧

(1) 調査問題⑥，⑦，⑧の応答調査による共通の問題点

調⑥，⑦，⑧のそれぞれの応答調査の結果による共通の問題点は、一次の関係の基礎的知識・理解がじゅうぶんでないことであった。そこで、調⑥，⑦，⑧のそれぞれの基礎的知識・理解や、共通した基礎的知識・理解をみる分析的問題を作成して調査分析することにした。

(2) 調査問題⑥，⑦，⑧の基礎的知識，理解をみる分析的問題による調査結果の分析

① 分析的問題11，⑤，⑥，⑦，⑧による調査結果の分析

分11⑤，⑥，⑦，⑧は、「 x 軸，または y 軸から一定の距離にある直線を見いだす能力をみる」ことをねらいにした問題である。

点の座標を明確に読みとるには、座標平面におけるたて線，横線の意味をじゅうぶんに理解していることがたいせつであると思われる。点の座標を読みとれない生徒は、このたて線，横線の意味を理解していないのではなかろうか。また、調⑥2のように、問題がやや複雑になると点の座標を正しく読みとれなくなるのは、このたて線，横線の意味の理解が不じゅうぶんであることもあると思われる。つまりこのたて線，横線の知識・理解は点の座標を読みとる能力の基礎的知識・理解と考えて、分11⑤，⑥⑦，⑧を作成した。

この問題の正答率は次のとおりである。 — かつこの中は、小問題の内容の概略である。

⑤ ($y + 2$)	3 9	} 全小問正答 3 7 人 全小問誤答 4 6 人 全小問無答 8 人
⑥ ($y - 3$)	4 0	
⑦ ($x - 1$)	4 1	
⑧ ($x + 0$)	4 4	

以上の分析の結果によると、分11⑤、⑥、⑦、⑧の四つの小問に全部正答であったものは37人で、全部誤答か、無答であったものは54人である。分1の小問九つに全部正答であったものは42人で、全部を誤答か無答でのものは7人である。

この分11⑤、⑥、⑦、⑧と、分1の九つの小問、計13の小問全部に正答したものは23人である。またこの23人の中の20人は、11①、②、③、④の全小問にも正答している。

次に、この分11⑤、⑥、⑦、⑧の誤答例を示す。

a. x 軸と y 軸とをとり違えているもの。 17人

(全部の小問で、 x 軸と y 軸とをとり違えているもの 10人
一部の小問で、 x 軸と y 軸とをとり違えているもの 7人

この17人の中の12人は、分11①、②、③、④では、点の座標を正しく読みとっている。

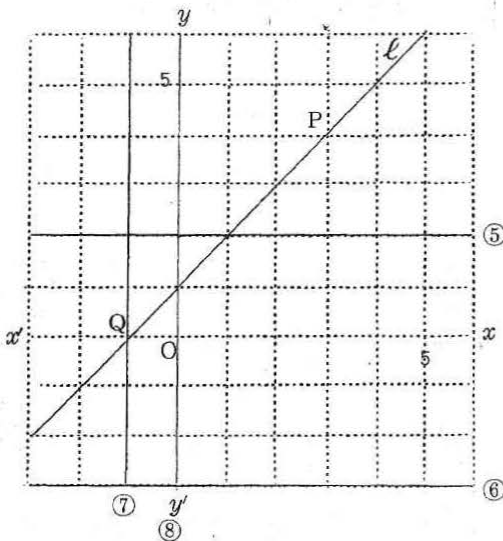
b. y 軸上において、原点または、 y 軸と直線 ℓ の交点から、所定の距離にあって、直線 ℓ に平行な直線のことであると思っているもの。または、これに類するもの。 11人

c. 指定された軸上において、原点から所定の距離までの直線のことであると思っているもの。または、これに類するもの。 16人

d. 指定された軸上において、原点から所定の距離にある点のことであると思っているもの。 4人

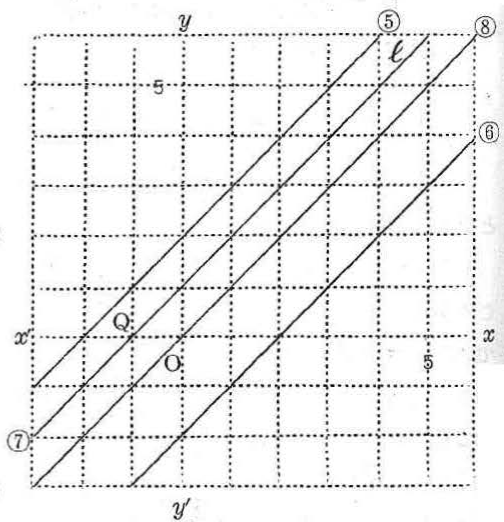
次に、この問題の誤答例をグラフによって示す。

aの誤答例のグラフ



P 7 9 17人

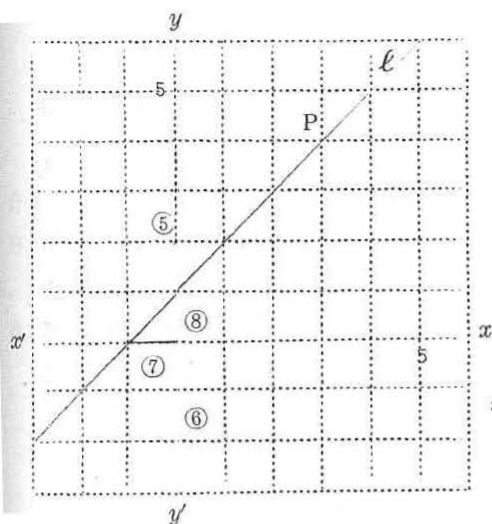
bの誤答例のグラフ



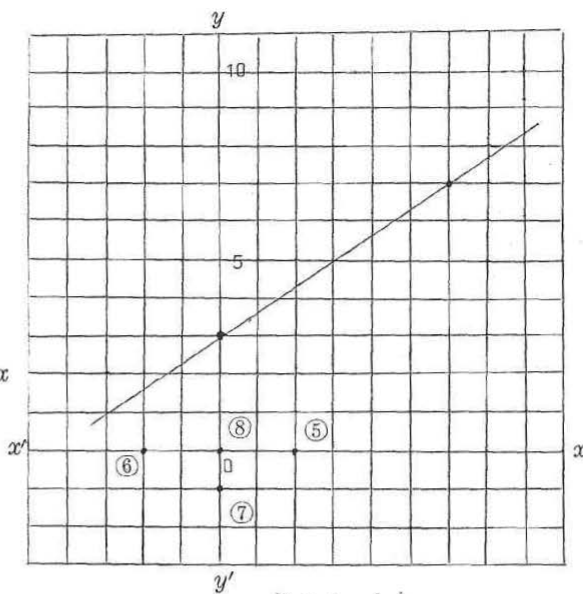
P 6 5 11人

cの誤答例のグラフ

dの誤答例のグラフ



P 4 8 1 6 人



P 3 3 4 人

② 分析的問題 3 による調査結果の分析

分 3 は、「直線のグラフから一次の関係の理解をみる」ことをねらいにしている。分 3①は、「直線のグラフから、一次の関係で変数 x の変化に対応する変数 y の変化と x の係数の意味についての理解をみる」ことを、分 3②は、直線のグラフから、一次の関係で対応する変数の値の変化についての理解をみる」ことをねらいにしている。

調 8 は、式から一次の関係の理解をみたのであるが、分 3 は、直線のグラフからの一次の関係の理解をみたものである。

分析的問題 3 の応答分析

		分析的問題 3②			
		正答	誤答	無答	計
分析的問題 3①	正答	7	29	3	39
	誤答	1	40	9	50
	無答	0	2	9	11
	計	8	71	21	100

左の表によると、分 3①の正答率は 39% で、分 3②の正答率は 8% である。分 3①、②ともに正答であったものは 7 人で、ともに誤答か無答であったものは 60 人である。

分 2①エと分 2②エは、式からの一次の関係の理解をみる問題であった。分 2①エの正答率は 35% で、分 2②エの正答率は 20% である。分 2①エ、分 2②エともに正答であったものは 17 人で、ともに誤答か無答であったものは 61 人である。

分 3 の直線のグラフを式で表わすと、 $y = \frac{2}{3}x + 3$ となり、分 2①エと分 2②エとは、一次関数 $y = \frac{2}{3}x + 5$ の問題であるので、分 3 を式で表わした問題と分 2①エ、分 2②エは等価の問題とみてよいと思われる。なお、分 3①と分 2①エと、分 3②と分 2②エは対応する問題である。そこでこれらの四つの問題の調査結果を比較してみることにする。

{ 分2①エ(式)の正答率 35% }	ともに正答	17人	
{ 分2②エ(式)の正答率 20% }	ともに誤答か無答	61人	
{ 分3①(グラフ)の正答率 39% }	ともに正答	6人	
{ 分3②(グラフ)の正答率 8% }	ともに誤答か無答	60人	
{ 分2①エ(式)の正答率 35% }	ともに正答	26人	
{ 分3①(グラフ)の正答率 39% }	正答率に危険率5%で有意差が認められない。		} ともに誤答 か無答 48人
{ 分2②エ(式)エの正答率 20% }	ともに正答	6人	
{ 分3②(グラフ)の正答率 8% }	危険率5%で正答率に有意差がある。		

以上の比較によっておよそ次のことがいえるであろう。分2①エと分3①の正答率に危険率5%で有意差が認められないので、対応する変数の変化についての理解は、式とグラフでは差がない。分2②エと分3②の正答率には危険率5%で有意差があるので、対応する変数の値の変化についての理解は、グラフが式よりもむずかしい。この四つの問題におよそ半数の生徒が誤答か無答である。一次関数の対応変化の理解がたいそう不じゅうぶんである。

分3の誤答例

分3①の誤答例(正答 $\frac{2}{3}$)

P 2 9	1	8人
P 2 0	$\frac{1}{2}$	5人
P 4 2	$\frac{1}{3}$	3人

分3②の誤答例(正答 $1\frac{8}{17}$)

P 9	2	34人
-----	---	-----

③ 分析的問題5による調査結果の分析

分5は、「直線の傾き(こうばい)についての基礎的知識・理解をみる」ことをねらいにしている。

分5の正答率

①(平行)	63%	}	①, ②, ③とも正答	23人
②(平行)	41%			
③(傾き)	40%			
			①, ②, ③とも誤答か無答	30人

分5の誤答例

①の誤答例(正答 2)

P 5 9	7 ($2+5=7$ と考えたと思われる。)	7人
P 5 2	3 ($5-2=3$ ")	4人
P 4 8	$\frac{5}{2}$ ($5\div 2=\frac{5}{2}$ ")	1人

②の誤答例(正答-1)

P 3 3	4 (定数項を書いたもの)	14人
P 4 7	-4	4人
P 2 3	a	3人
P 3 0	3	4人
P 2 0	1	4人
P 3 9	-2	3人

③の誤答例 (正答 3)

P 8	-1 (定数項を書いたもの)	16人
P 2 5	$\frac{1}{3}$ (定数項の絶対値を x の係数で割ったもの)	5人
P 4 7	1	3人
P 5 6	2	3人

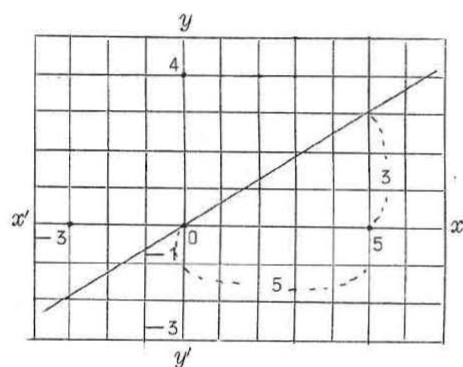
④ 分析的問題6による調査結果の分析

分6は、「一次の関係の式からグラフをかく能力をみる」ことをねらいにしている。

分6の正答率は53%で、およそ全体の半数の生徒は、一次の関係の式からグラフを正しくかいてい

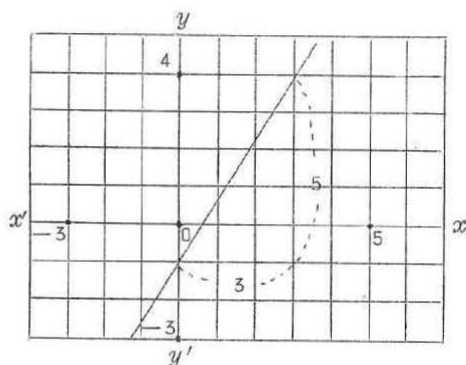
る。
次に、この問題の誤答例をグラフによって示す。(分6の一次関数は、 $y = \frac{3}{5}x - 1$)

a



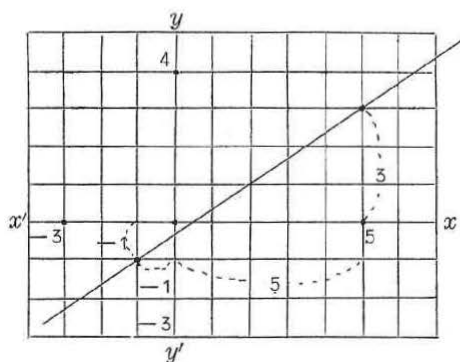
P 4 6 5人

b



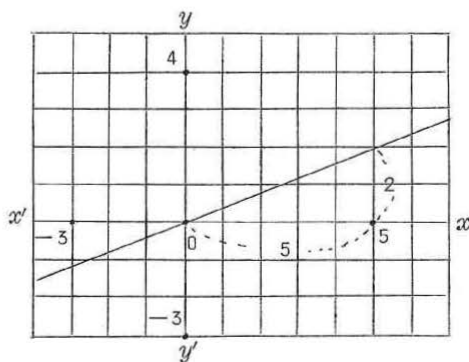
P 2 0 3人

c



P 6 3 2人

d



P 4 5 2人

⑤ 分析的問題 8 による調査結果の分析

分 8 は、本年度の中学校第 2 学年の調査問題 7 である。この分 8 は、「比例の関係についての理解をみる」ことをねらいにしている。分 8 ①は、「表から比例の関係を見いだして式に表わす能力をみる」ことを、分 8 ②は、「比例の関係で対応する値を求める能力をみる」ことを、分 8 ③は、「比例の関係で対応する値の変化についての理解をみる」ことをねらいにしている。

一次の関係は、比例の関係と関連させて理解していることが重要と思われるので、分 8 によって、比例の関係についての理解をみることにしたのである。

分 8 の正答率

①	3 2	}	①, ②, ③とも正答	2 4 人
②	5 9			
③	4 4			
			①, ②, ③とも誤答か無答	3 2 人

この表によってわかるとおり、①の、表から比例の関係を見いだして式に表わすことはむずかしいとしても、②の比例の関係で対応する値を求めることについては、正答率がわずかに 59% にすぎない。しかもこの②は、表から対応する値を求める問題であるから、容易な問題である。この②を理解していないと、一次の対応する値を求めることは、いっそう困難になるとと思われる。

分 8 については、32 人、つまり全体の三分の一の生徒は誤答か無答である。

分 8 による調査結果によって、三分の一の生徒は、比例の関係については、ほとんど理解していないように思われる。

分 8 の誤答分析によって目だつことは、 $y = \frac{2}{3}x$ としなければならないのに、 $y = \frac{3}{2}x$ のように、 x の係数を逆数にして立式していること (P 46, 8 人 — この誤りをした生徒は 8 人で、8 人の中で最も成績のよいのは成績が 46 番目の生徒であったこと。), $y = ax$ のように、 x の係数が $\frac{2}{3}$ と数字になるのに、文字、しかも a という文字を使っていること (P 13, 8 人) などである。

⑥ 分析的問題 13 による調査結果の分析

分 13 は、本年度の中学校第 2 学年の調査問題 11 である。この分 13 は、「表、グラフ、式から比例、反比例の関係を見いだす能力をみる」ことをねらいにしている。分 13 ①は、「表、グラフ、式から比例の関係を見いだす能力をみる」ことを、分 13 ②は、「表、グラフ、式から反比例の関係を見いだす能力をみる」ことをねらいにしている。

一次の関係は、比例の関係と関連させて理解していることが重要と思われるが、比例の関係は、反比例の関係、比例でも反比例でもない関係と区別して理解していることが重要である。したがって、分 13 において、比例の関係、反比例の関係、比例でも反比例でもない関係を、表、グラフ、式から区別して見いだす能力をみることにしたのである。

分 13 の応答分析 — 表、グラフ、式の欄の○太字は正答である。

問 題	表				グ ラ フ				式				正 答	全部誤答 か 無 答	
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ			
① 比 例	4	2	74	11	9	32	4	46	38	14	23	12	21	13	10
② 反 比 例	38	36	7	12	63	4	14	9	22	46	10	10	20	20	

この表によってわかるとおり、分13①の正答率は21%、分13②の正答率は20%であってきわめて低い。全問題を正答した生徒は9人にすぎない。また、全問題を誤答か無答であった生徒は10人である。

なおこの調査によると、生徒は、表からの選別は比例関係が、グラフからの選別は反比例関係がやさしいようである。

(3) 調査問題⑥、⑦、⑧の基礎的知識・理解をみる分析的問題による面接調査

ここでは、分11⑤、⑥、⑦、⑧について面接調査を行なった結果について、その概略を述べる。

P79は、分析的問題による調査においては、さきに示した「aの誤答例のグラフ」の生徒である。つまり、分11の誤答例のa、「 x 軸と y 軸とをとり違えているもの」の生徒である。

面接調査によって、分11のグラフをかかせると、最初から正しいグラフをかいた。

P65は、分析的問題による調査においては、さきに示した「bの誤答例のグラフ」の生徒である。つまり、分11の誤答例のb、「 y 軸上において、原点または、 y 軸と直線 l の交点から、所定の距離にあって、直線 l に平行な直線のことであると思っているもの。または、これに類するもの」の生徒である。

面接調査によって、分11のグラフをかかせると、「cの誤答例のグラフ」と、全く同じ誤答をした。

P48は、分析的問題による調査においては、さきに示した「cの誤答例のグラフ」の生徒である。つまり、分11の誤答例のc、「指定された軸上において、原点から所定の距離までの直線のことであると思っているもの」の生徒である。

面接調査において、分析的問題による調査のときの誤りに気づかせて、考えさせると、正しいグラフをかく。

P33は、分析的問題による調査においては、さきに示した「cの誤答例のグラフ」の生徒である。つまり、分11の誤答例のd、「指定された軸上において、原点から所定の距離にある点のことであると思っているもの」の生徒である。

面接調査においては、分析的問題による調査のときの誤りに気づかせて、問題の文章をていねいに読ませて考えさせると、正しいグラフをかく。

(4) 調査問題⑥、⑦、⑧の基礎的知識・理解をみる分析的研究のまとめ

— 一次の関係の基礎的知識・理解をみる。 —

調査問題⑥、⑦、⑧

① x 軸、または y 軸から一定の距離にある直線を見いだす能力をみる。

分析的問題11⑤、⑥、⑦、⑧

分11⑤、⑥、⑦、⑧は、「 x 軸、または y 軸から一定の距離にある直線を見いだす能力をみる」ことをねらいにしている。全小問の正答率はおよそ40%で、全小問を正答したものは37人、全小問を誤答か無答であったものは54人である。座標平面におけるたて線、横線の意味をじゅうぶんに理解していないとともに、問題の文章がややこしいことから、問題の意味を正しく読みとれないために、誤答や無答が多かったと思われる。

② 直線のグラフから一次の関係の理解をみる。

分析的問題 3

分3は、「直線のグラフから一次の関係の理解をみる」ことをねらいにしている。分3①は、「直線のグラフから、一次の関係で変数 x の変化に対応する変数 y の変化と x の係数の意味についての理解をみる」ことを、分3②は、「直線のグラフから、一次の関係で対応する変数の値の変化についての理解をみる」ことをねらいにしている。

分3①の正答率は、39%で、分3②の正答率は8%である。分3①、②ともに正答したものは、7人で、ともに誤答か無答であったものは、60人である。

分2は、式から一次の関係の理解をみる問題で、分2①エと分2②エは、それぞれ、分3①と分3②に対応する問題である。分2①エ(式)と分3①(グラフ)の正答率に危険率5%で有意差が認められないので、「一次の関係で変数 x の変化に対応する変数 y の変化と x の係数の意味についての理解」については、式とグラフでは差がない。つまり、関数のこの理解については、式についても、グラフについても同じ程度に理解しているものと思われる。

分2②エ(式)と分3②(グラフ)の正答率に危険率5%で有意差が認められるので、「一次の関係で対応する変数の値の変化についての理解」については、式についてよりは、グラフについての理解がむずかしいといえる。つまり、関数のこの理解については、式よりもグラフの方がむずかしいということができよう

③ 直線の傾き(こうばい)についての基礎的知識・理解をみる。

分析的問題 5

分5は、「直線の傾き(こうばい)についての基礎的知識・理解をみる」ことをねらいにした問題である。このような基礎的な問題においても正答率はきわめて低くおおよそ40%であり、全小問を正答したものは23人、全小問を誤答か無答であったものは30人である。

④ 一次の関係の式からグラフをかく能力をみる。

分析的問題 6

分6は、「一次の関係の式からグラフをかく能力をみる」ことをねらいにしている。

分6の正答率は53%で、およそ全体の半数の生徒は、一次の関係の式からグラフを正しくかいているが、他の半数の生徒は、このグラフを正しくかくことができない。

誤答例をみると、 x の係数の意味、定数項の意味をじゅうぶんに理解しているとは思われない。

⑤ 比例の関係についての理解をみる。

分析的問題 8

分8は、「比例の関係についての理解をみる」ことをねらいにしている。分8①は、「表から比例の関係をみだして式に表わす能力をみる」ことを、分8②は、「比例の関係で対応する値を求める能力をみる」ことを、分8③は、「比例の関係で対応する値の変化についての理解をみる」ことをねらいにしている。全小問を正答したものは24人にすぎず、全小問を誤答か無答であったものは、32人である。つまり、全体の三分の一の生徒は、比例の関係についてはほとんど理解していないようである。

⑥ 表、グラフ、式から比例、反比例の関係をみいだす能力をみる。

分析的問題 13

分13は、「表、グラフ、式から比例、反比例の関係をみいだす能力をみる」ことをねらいにしてい

る。分13①は、「表，グラフ，式から比例の関係を見いだす能力をみる」ことを，分13②は、「表，グラフ，式から反比例の関係を見いだす能力をみる」ことをねらいにしている。

分13①の正答率は21%，分13②の正答率は20%できわめて低い。分13①，②の二つを正答したものは9人にすぎない。全小問を誤答か無答であったものは10人である。この10人は，比例の関係を全く理解していないものと思われる。

⑦ 面接調査のまとめ

分11⑤，⑥，⑦，⑧について面接調査を行なった結果をまとめる。

分析的問題による調査において，誤答であっても，面接調査では正答であったり，少しの暗示で正答したりする生徒が多かった。このことは，知識・理解が不安定であることを示すものと思われる。この分11を全く理解できないという生徒はいなかった。

Ⅳ ま と め

1 点の座標を読みとる能力について 調査問題⑥およびその分析的問題

(1) 座標平面における点の位置が変わっても，それらの座標を読みとる能力に差があるとは思われない

調⑥1の点は第1象限に，調⑥2の点は x 軸の負にある。この二つの調査問題において正答率に大きな開きがあるので，その理由の一つとして，読みとらせる点の位置を異にするからであろうと考えた。ところで，この研究の結果によると，第1象限の点の座標を読みとる能力と， x 軸の負にある点の座標を読みとる能力の差を認めることができなかった。したがって，読みとらせる点の位置が異なることだけでなく，いろいろの理由のからみ合いによってその正答率に大きな開きが生じたものと思われる。たとえば読みとらせる点が，調⑥1では，問題の文章やグラフでPと記名されているが，調⑥2では，それがなく，「直線が， x 軸と交わる点の座標を求めよ」と問題の文章で示されていることなどであろう。

この研究によると，原点を除いては，座標平面における点の位置が変わっても，点の座標を読みとる能力に差があるとは思われない。下位群については，原点を含めてもその差は認められない。

(2) 点の座標を読みとらせる問題の誤答の主なるものは，グラフの目もりの読み違い， X 座標と Y 座標のとり違い，座標の正負の誤りなどである

(3) 点の座標を読みとる能力を身につけさせるには，次のことに留意しなければならないと思われる

①座標平面におけるたて線，横線の意味をじゅうぶんに理解させる。

②一般にむずかしいと思われる位置にある点の座標だけでなく，やさしいと思われる位置にある点の座標の読みとりも指導すること。

③グラフの目もりの数え方， x 座標と y 座標の区別，座標の正負など誤答に応じた個人指導をすること。

④点の座標を読み取る能力が身につけているものと，そうでないものとの断層がはっきりしているようである。特に下位群の指導を重視しなければならない。

2 一次の関係の理解について

調査問題⑦およびその分析的問題

(1) 一次の関係の対応・変化の理解がきわめて低い

一次の関係の式やグラフについての対応・変化の理解がきわめて低い。一次の関係の対応・変化も，比例の関係の対応・変化も同じと思っている生徒も多い。比例の関係の指導において，この対応・変化の知識・理解・操作をじゅうぶんに身につけさせ，一次の関係においては，比例の関係と対比させて，その異同を明確につかませておかなければならない。ところで一次の関係の基礎である比例の関係の対応・変化の理解も不じゅうぶんである。

対応・変化の理解は，比例の関係においても，一次の関係においても，導入段階で適切な指導が行なわれていなければならない。例えば，ゴムひもで，三角形や長方形を作って，その面積と高さや辺との関係を図や表に書かせたり，立式させたり，グラフにかかせたりして，対応・変化を具体的に理解させることである。

(2) x の係数の意味についての理解も不じゅうぶんである

式から対応・変化の値を求めるに， x の係数の意味をじゅうぶんに理解していないこともあって，代入計算による生徒が多い。グラフや式における直線の傾き（こうばい）の意味の理解も不じゅうぶんである。この直線の傾き（こうばい）の知識・理解をじゅうぶんに身につけさせることによって，対応・変化の操作も容易になると思われる。 x の係数の意味については，比例の関係においても，一次の関係においても同じである。

(3) 計算機能が未熟である

対応・変化の値を求めるには，対応・変化の理解が根本と思われるが，計算技能，特に分数の加減乗除を効率的に行なえるように習熟させることがたいせつである。割合の考え方にも慣れさせる必要がある。

(4) 対応・変化の理解をみる問題の誤答分析によると，その誤答をある程度，類型化することができる

この誤答例を生徒に示して，その誤った理由を考えさせたり，批判させたりして，基礎的知識・理解を徹底させること。また，対応・変化の値を求めるときは，「表を作って考える」という考え方を身につけさせることもたいせつであると思われる。

3 具体的なことがらによる一次の関係の理解について

調査問題⑧およびその分析的問題

(1) 具体的な事がらを式で表わす能力はきわめて低い

一次の関係の具体的な事がらを式で表わす能力はきわめて低いので、その具体的な事がらの、つまり、調⑧1の変数を定数に置き換えた分7を作って調査してみると、正答率はたいそう高くなる。けれども、このように変形した問題を解いた生徒は、もとの問題も直ちに解けるとはいえない。しかし、この変形した問題の数量関係を発見し、変形した問題の数量関係を、もとの問題に移して考える推理は、明らかに数学的思考であり、したがって、変数を定数に置き換えて考える考え方を身につけさせることは、数学的思考力を伸ばすために重要と思われる。

文字を用いて立式することが困難である生徒に、文字を数字に置き換えて考えさせると、文字でも立式できるようになる。したがって、文字で立式できないときは、文字を数字に置き換えて考える考え方を身につけさせることもたいせつである。

いうまでもなく、このような置き換えの操作を行なうことなく、変数や文字で直ちに立式できることが理想である。けれどもこれは抽象的思考の発達した段階であって、そのようになる過程においては、このような置き換えの操作を行なうことも抽象的思考を発達させる助けになると思われる。

(2) 一次の関係を比例の関係と同じと思っている生徒が多い

したがって、矛盾した選択肢を選んだり、矛盾した立言をすることが多い。一次の関係と比例の関係の区別は、図やグラフ、式などにおいて明確にしておかなければならない。すぐれた生徒であっても、グラフや式による区別はできても、図によって説明することが困難である。具体的な事がらの図による理解がたいそう不じゅうぶんである。この図による理解が基礎であり、グラフも式も、図に関連させることによってその理解も確かなものになると思われる。

関数だけでなく数学においては、式の意味を文章で表わせたり、文章の意味を式で表わさせたりする指導がたいせつと思われる。

この研究においては、式の意味を文章で表わしたり、あるいは、式の意味を文章で表わした選択肢を選ぶ能力（式→文章）と、文章の意味を式で表わす能力（文章→式）とを比較検討した。その結果によると、どちらの方向（式→文章）がむずかしいとはいえない。それは問題の内容や形式によって違うことがわかった。したがって、このことに留意して、式や文章の意味を表わす指導を行なうことがたいせつであると考ええる。

（大 森 忠 勢）