

熱教材に関する基礎的研究

—— 気体の流れを学習に組みこむ試み ——

静 間 和 憲*

高圧の容器から低圧の容器へ小孔を通して気体が噴出する場合、その噴出速度は、気体の温度・密度・分子量などに依存する。この研究は、そうした気体の噴流現象を調べる実験が、分子運動論的な概念を育成する学習に効果的であると期待して、注射器を用いた実験法をくふうし、基礎的データを取得している。その結果、この実験は、手が届く方法でいろいろな気体について、その分子の速さを推定できると結論している。

1 はじめに

熱教材の指導は、エネルギー概念を育成するうえで重要な位置を占めている。しかし、従来の指導では、「ボイル・シャルルの法則」などのマクロな現象に関する法則をいきなり分子運動モデルによってミクロな立場から究明しようとしているが、そこには分子運動論的な概念を導入するうえでの飛躍が感じられる。そこで熱の本質が分子の運動そのものであることをとらえさせるために気体の噴流現象をとりあげることとする。この現象は、気体分子の運動の速さが密接に関係していて、気体をミクロ的に探究していく糸口となり、分子運動モデルへの飛躍をうめることができると考える。

ここでは、その指導計画に必要な基礎的資料を得るための実験方法の検討を行った。すなわち、初めに各種気体について、穴から噴出する流量とその噴出孔の内と外の圧力比の関係を調べ、次に分子の運動の平均の速さを穴から噴出する気体の流量から推定し、その推定値と分子量、絶対温度との関係を検討した。

2 理論

(1) 気体の分子運動¹⁾

(a) 速度分布

ある系内の気体が温度 T で熱平衡にあるとき、分子の総数を N とし、ある時刻における気体分子の熱運動の速さが、 v と $v + dv$ の間にある分子数を $dN(v)$ とすると全体に対する割合 $f(v)dv$ は、マックスウエルの分布則により次の(1)式で示される。ただし、 m は分子1個の質量、 k はボルツマン定数である。

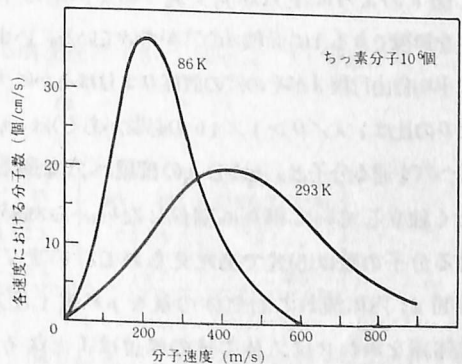


図1 ちっ素分子の速度分布

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \dots\dots\dots(1)$$

たとえば、ちっ素分子の86Kと293Kの場合について(1)式を適用すると図1のような分布になり、温度が低いときには全体として分子の速さは小さく、温度が上がるにつれて速くなる。

(b) 気体分子の平均の速さ

速さの平均 \bar{v} , 2乗平均の平方根速度 v_s を(1)式より求めると次式を得る。

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \dots\dots\dots(2)$$

$$\bar{v}^2 = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{M} \dots\dots\dots(3)$$

$$v_s = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \dots\dots\dots(4)$$

ただし、 R は気体定数、 M は気体の分子量である。

(c) 壁面をたたく分子の数

気体が壁におよぼす圧力は、気体の分子が壁に衝突してはねかえることが原因である。単位面積の壁に単位時間に衝突する分子の数 Γ_n は、気体の分子密度を n , 分子の運動の方向と壁の面 S にとった極座標とのなす角を θ , ϕ とすると(図2参照)次の式で表わされる。

$$\Gamma_n = \frac{n}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} v f(v) \sin\theta \cos\theta dv d\theta d\phi$$

これを積分して、(2)式の関係を用いると

$$\Gamma_n = \frac{1}{4} n \bar{v} \dots\dots\dots(5)$$

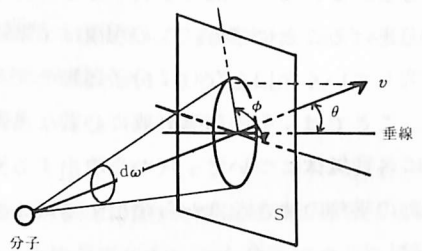


図2 壁にぶつかる分子

(2) 薄い穴からの気体の流²⁾

(a) 圧力が低いとき ($\lambda \gg D$)

図3のように圧力が p_1 , p_2 である部屋の中間の壁(厚さを無視できる)に面積 A の穴があいている。いま、気体分子の平均自由行程 λ がその穴の直径 D よりはるかに大きいとき(λ と D の比は、 $\lambda/D > 1/10$ の必要がある)³⁾ は、 p_1 から p_2 の部屋へ穴を通る分子と、 p_2 から p_1 の部屋へ穴を通る分子はまったく独立していて相互に関係しない。したがって、穴を通る分子の数は(5)式であたえられる。いま、 p_1 から p_2 へ時間 dt 内に流れこむ気体の量を pV 値(圧力を N/m^2 で体積を表わせば気体の量の単位は J となる)で示して dQ_1 とし、 p_2 から p_1 へ時間 dt 内に流れこむ量を dQ_2 とすれば、 dQ_1 , dQ_2 は次式で示される。

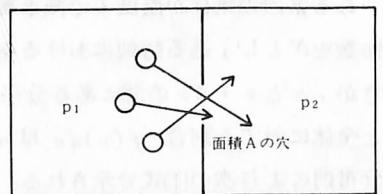


図3 $\lambda \gg D$ の場合の気体分子の流れ

$$dQ_1 = \frac{1}{4} \bar{v} A p_1 dt, \quad dQ_2 = \frac{1}{4} \bar{v} A p_2 dt$$

したがって、最終的に p_1 から p_2 へ流れこむ気体の量 dQ は次式で示される。

$$dQ = dQ_1 - dQ_2 = \frac{1}{4} \bar{v} A (p_1 - p_2) dt \dots\dots\dots(6)$$

$$dQ = \sqrt{\frac{RT}{2\pi M}} A (p_1 - p_2) dt \dots\dots\dots(7)$$

(b) 圧力が高いとき ($\lambda \ll D$)

ところが p_1 が高い場合 ($\lambda \ll D$) には、穴の近傍は気体の流出のため、他の p_1 の部分より分子密度は小さくなって (図 4 参照) (6) 式を適用できない。そのため、気体の流量を分子運動論的に解析することは困難となる。したがって、圧縮性流体として扱う必要がある。図 3 において、 $p_1 = p_2$ のときには気体の流れはおきなく、 p_2 が低くなるにつれて p_2 側の最終流速が増し、その圧力比 ($p_2/p_1 = r$ とする) が臨界値 (r_c) を越えて小さくなると流量はそれ以上増さなくなる。このときの噴出速度は、穴を通して気体が断熱膨張した所における局所的な温度と圧力のもとの音速に等しくなり圧力比 r に依存しない。

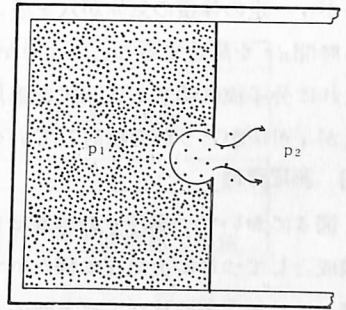


図 4 穴の近傍の分子密度の分布

r の値が、 $r_c < r < 1$ では、気体の比熱比を γ 、 p_1 の部屋の温度を T_1 とすると、時間 dt 内に流れる流量 dQ_h は次式で示される。

$$\frac{dQ_h}{dt} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{RT_1}{M}} \cdot r^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \sqrt{1-r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \cdot p_1 A \dots\dots\dots(8)$$

なお、臨界値 r_c は r で次の式で表わせる。

$$r_c = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \dots\dots\dots(9)$$

各気体の r_c の値、および、そのとき 1m^2 の穴から噴出する噴出速度 ($\text{m}^3 \cdot \text{atm}/\text{s}$) を表 1 に示した。

表 1 各気体の臨界値と噴出速度 ($\text{m}^3 \cdot \text{atm}/\text{s}$)

	ヘリウム	アンモニア	ちっ素	空 気	酸 素	二酸化炭素
臨 界 値	0.488	0.539	0.527	0.525	0.529	0.545
噴 出 速 度	568	250	201	200	188	158

(3) 円形導管を通る気体の流れ

p_1 と p_2 の壁が厚く穴の形が円形の導管になっている場合 (図 5 参照)、 p_1 が高ければ ($\lambda \ll D$) 気体の粘性が流速に影響する。気体の粘性係数を η 、導管の長さを l 、 p_1 と p_2 の平均を \bar{p} とすると時間 dt 内に流れる流量 dQ_p は次式で示される。²⁾

$$dQ_p = \frac{\pi}{128} \cdot \frac{D^4}{\eta l} \cdot \bar{p} (p_1 - p_2) dt \dots\dots(10)$$

3 実験

前述の理論の項で述べたように、低い圧力で一定に保たれた気体が小孔を通して噴出する場合、すなわち分子流の条件が成立している場合、そのときの噴出速度は、その気体の分子の平均の速さ \bar{v} で解析できる。

ここでは、分子流の条件が成立していない場合にはあるが、一定の体積の気体が穴を通して噴出するのに要する時間 dt を測定することにより気体の噴出速度を求め、それに分子流に関する式(6)式を適用して \bar{v} を推定することが、可能かどうかを検討していく。

(1) 測定原理

図6において、高圧 p_1 の容器はピストン・シリンダ構成としてつねに大気圧に保たれている。一方、低圧容器 p_2 は、 p_1 容器に比べてはるかに大きい容器にしており、実験中は、真空ポンプでたえず減圧し続ける。 p_1 からの気体の流入があっても、圧力 p_2 はほとんど変化しない。こうして、 p_1 の容器からの気体の噴出速度は、ピストンの移動速度から求めることができる。

(2) 装置および測定方法

この実験の装置の構成を図7に示す。 p_1 の容器には注射器、 p_2 の容器には排気鐘、噴出孔に注射針を用いた。

注射器、注射針の規格を表2に示す。 p_2 側の圧力を下げるために、回転式真空ポンプ(島津S50型)と排気盤(島津)を組み合わせて減圧した。また、ピストンにスリットを取り付け固定スリットを通して入る電球の光を、光電ピックアップ(岩崎, PP-2型)にあてて、一定量の気体の噴出に要する時間をユニバーサルカウンター

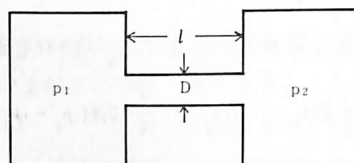


図5 円形導管を通る気体の流れ

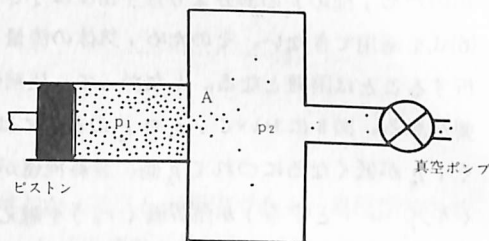


図6 噴出時間の測定原理

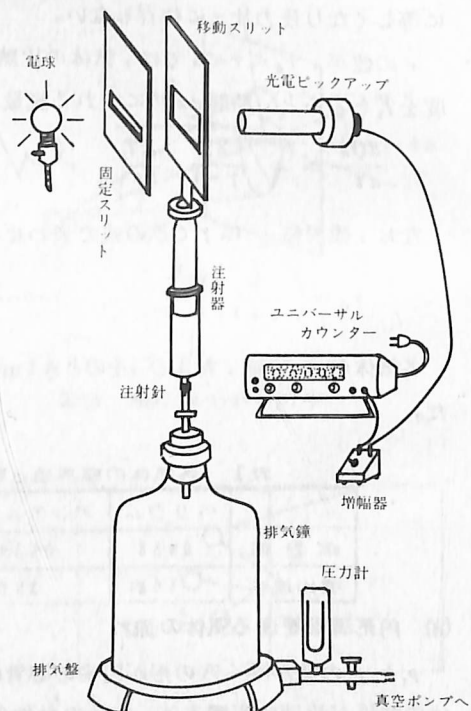


図7 実験装置

表2 実験装置の品名と規格

品名	規	格
注射器	容積	$5.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3$
注射針	内径	$5.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ 断面積 $1.96 \times 10^{-7} \text{ m}^2$
	長さ	$1 \times 10^{-3} \text{ m}$

(岩崎 U C—6236) を用いて 10^{-2} 秒の単位で測定した。

つぎに, p_1 の容器の温度を上げるために, 図 8 に示すように, 注射器をアスベストで薄く覆い, その上に 100V , 300W の電熱線の半分の長さを巻いた。温度を測定するために, 銅コンスタンタン熱電対を使い容器とアスベストの間にはさんだ。

p_2 の圧力は, 排気鐘内に高度測定用圧力計 (Isuzu No.2552) を置いて測定した。

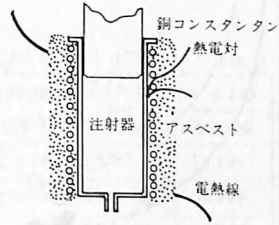


図 8 容器の加熱装置の構造

(3) 試料の調整

測定に使用した気体は 6 種類である。その気体名, 分子量, 製法を表 3 に示した。

表 3 測定に使用した気体

気体名	分子量	製法
ヘリウム	4.00	ヘリウムボンベ (帝国酸素 K K 製) 使用
アンモニア	17.0	アンモニア水 (1 級 28%) 加熱, CaCl_2 でろ過後捕集
ちっ素	28.0	ちっ素ガスボンベ (金子商会製) 使用
空気	28.8	実験室内
酸素	32.0	酸素ガスボンベ (金子商会製) 使用
二酸化炭素	44.0	大理石に塩酸 (1 級 35%) を希釈を加えて水上置換法で捕集

4 測定結果

(1) 圧力差と噴出速度の関係

p_1 を大気圧のままにして, p_2 をかえて r の値が, $0 < r < 0.14$, $r_c < r < 1$ の間の際の噴出速度 (dQ/dt) を測定した。

その結果の一部を図 9 に示す。グラフ中の鎖線は (8) 式により算出した値である。

(2) 分子量と噴出速度の関係

6 種類の気体について p_2 を 10 Torr 以下にして $r = 0.0$ のときの噴出速度を分子量との関係で, 図 10 に示した。

(3) 温度と噴出速度の関係

図 8 で示した加熱装置で p_1 の容器の温度を上げると中の気体は, 測定によると, 空気では, 2~3 分後に容器壁の熱電対が示す温度に到達した。他の気体についてもそれだけの時間を要した。

各温度に対する噴出速度を図 11 に示す。グラフ中の破線は (7) 式から得た値である。

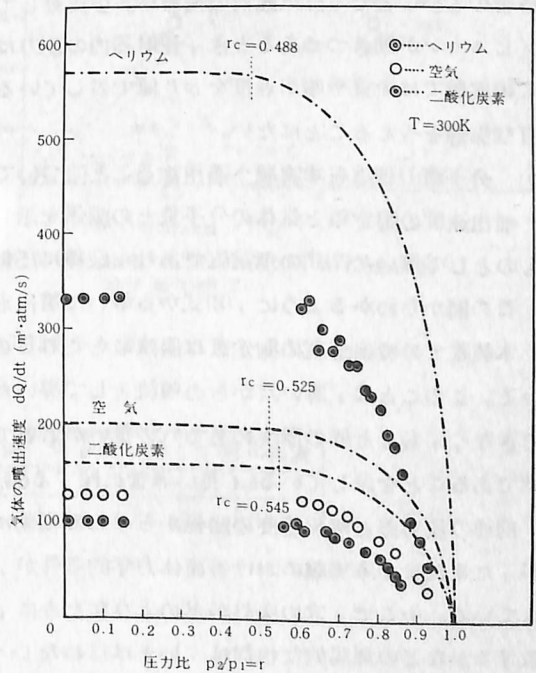


図 9 圧力差と噴出速度の関係

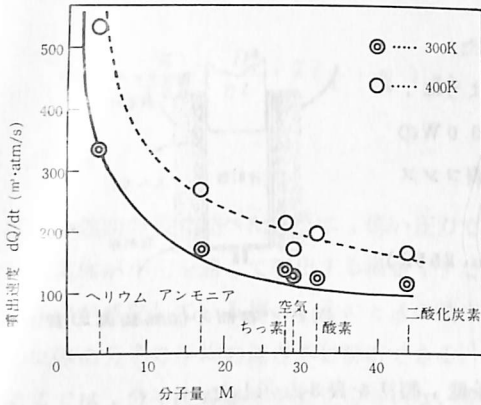


図10 分子量と噴出速度との関係

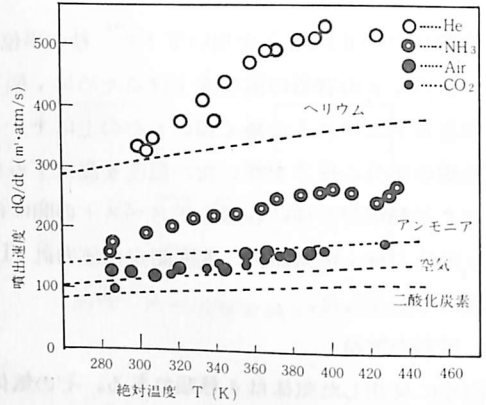


図11 温度と噴出速度との関係

5 測定結果の考察

(1) 圧力差と噴出速度について

注射器内の圧力 p_1 と、排気鐘内の圧力 p_2 との比 r と、気体の噴出速度 dQ/dt の関係は、(8)式から得られる変化の傾向とかなりよく合っている。しかしながら、とくに、 $r_c < r < 1$ の範囲内では、噴出速度の測定値はほとんど一定で r に依存しない結果を得た。この値は、(8)式から得られる理論値よりは、当然のことながら少なめになっている。

噴出速度が、 r の値が臨界値以下のときには圧力比に依存しないということは、われわれにとって、都合のよいことで、排気鐘内の圧力が多少変動しても噴出速度には影響しないことを示している。

ピストンが動きつつあるとき、注射器内の圧力はシリンダーとの摩擦力のため多少減圧されているが、この実験では流量や噴出速度を pV 値で表しているのだから、この場合の p_1 の変動は、噴出速度の測定値に直接影響を与えることはない。

(2) 分子流の理論を本実験へ適用することについて

噴出速度の測定値と気体の分子量との関係を示した図10において、実線は分子流の条件が成りたつものとして導いた(7)式の理論値であり、破線は圧縮性流体として導いた(8)式からの計算値である。

この図からわかるように、(8)式から導いた噴出速度に比べて(7)式より導いた噴出速度のほうが小さい。本装置での噴出速度の測定値は偶然にもこれらの値の間にあり、(7)式からの値よりやや大きくなっている。このことは、薄い穴からの噴流として導いた(8)式からの値は、そのまま本装置に適用することができなく、もっと壁の厚みのある穴の扱いが必要であり、気体のもつ粘性の効果を考慮した理論式が必要であることを示している。(長い導管に関する(10)式も適用できない)

前述の圧力差と噴出速度の関係から、この現象は明らかに圧縮性流体の扱いを受けるべきものであるが、たまたま、本実験における流体力学的条件が、(7)式から得られる理論的な噴出速度に近い結果となっている。そこで、穴の条件がどのようなときに、そのコンダクタンスが(7)式の理論的な噴出速度と一致するかなどの理論的な検討は、いまは行わないで、とにかくここでは、噴出速度の測定値を(7)式に適用することにより気体分子の平均の速さをいきなり推定してみることにした。

(3) 気体分子の平均の速さの推定

気体分子の平均の速さ \bar{v} は, (6)式を適用して

$$\bar{v} = \frac{4}{Ap_1} \cdot \frac{dQ}{dt} \dots\dots\dots(11)$$

で求めることにする。ここで得られた分子の平均の速さの推定値と, (2)式から導いた分子の平均の速さの理論値を表4に示した。参考までに50mlの注射器内の気体が噴出するのに要した時間のデータも記載した。

表4 \bar{v} の推定値 ($dQ=5.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{atm}$)

気体	項目 気温 (K)	噴出時間 dt (秒)	$\bar{v} (\times 10^2 \text{ m/s})$	
			推定値	理論値
ヘリウム	295.2	0.77 ± 0.06	13 ± 2	12.49
アンモニア	292.2	1.58 ± 0.04	6.5 ± 0.6	6.025
ちっ素	295.3	1.78 ± 0.11	5.7 ± 0.7	4.723
空気	297.9	2.01 ± 0.05	5.1 ± 0.4	4.677
酸素	296.7	2.07 ± 0.06	4.9 ± 0.2	4.429
二酸化炭素	298.0	2.64 ± 0.09	3.9 ± 0.4	3.785

そこで, 各気体の分子の平均の速さの推定値と分子量の関係を図12に示したが, この図からわかるように, 分子の平均の速さの推定値は, 分子量の平方根の逆数にはほぼ比例して理論的な関係とよく一致している。

また, グラフは, 温度が高くなると平均の速さが大きくなることを示していて, 絶対温度 T と平均の速さ \bar{v} の学習指導の場面でじゅうぶん利用できるものと考えられる。しかし, \bar{v} が T の平方根に比例するという(2)式の関係からはややずれる。このことは本実験に(6)式を便宜的に適用して分子の平均の速さを推定することの限界を示唆しているものであろう。(図11参照)

ちなみに, 本装置の穴のもつコンダクタンスについて(7)式から得た値と測定値との比を求め

ると, 表5の結果を得る。この表は高温ほど, 推定値が(7)式からずれることを示している。

表5 コンダクタンスの比

	ヘリウム	アンモニア	ちっ素	空気	酸素	二酸化炭素
高温の場合	1.4	1.4	1.5	1.2	1.5	1.5
室温の場合	1.1	1.1	1.2	1.1	1.1	1.0

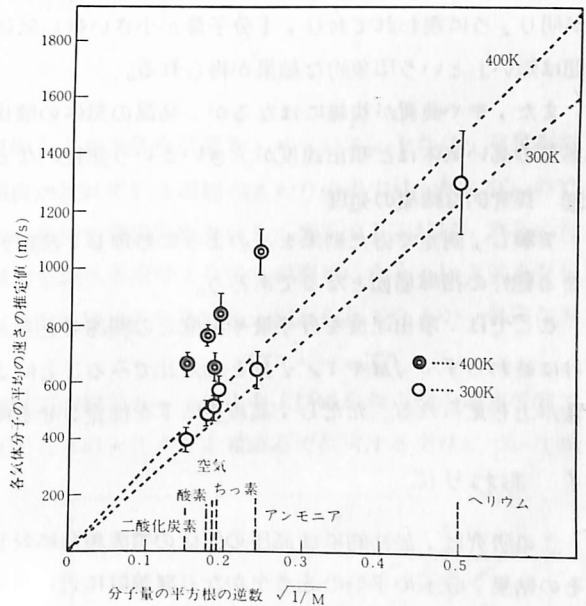


図12 温度ごとの分子の平均の速さと分子量の関係

6 学習への利用

(1) 親しみやすい装置

この研究で使用した装置は, ほとんどそのまま学習場面で採用できる構成であり, また, 個々の器具

は、いずれも生徒にとって親しみやすものであり操作も簡単である。すなわち、気体の噴出時間の測定は、ストップウォッチを用いて1/10秒単位で計ってもじゅうぶんなデータが得られる。また、注射器の容積に比べて排気鐘の容積が大きいことは、感覚的にも、圧力比に変化がない印象を生徒に与えるであろう。さらに、 r の値が臨界値以下であれば理論的には噴出速度に変化はなく、 r の圧力変化による流量の変化はないことを説明すれば理解はさらに深まるであろう。

なお、 p_2 を大気圧のままにし、 p_1 を高圧にして気体を噴出させる、より手軽な方法も考えられるが、詳しい検討はしていない。

(2) 直観的に理解しやすい現象

「軽い分子ほど速く飛びまわっているならば、小さい穴から速く噴出するであろう」ということは、直観的、感覚的に理解しやすいことであろう。このような立場で測定結果をみていくと分子量との関連が明りょうに現われており、「分子量が小さい軽い気体ほど噴出速度が大きく、一定量の気体の噴出時間は短い」という印象的な結果が得られる。

また、やや装置が複雑にはなるが、高温の気体の噴出速度を測定し絶対温度との関係でみていけば、温度の高い気体ほど噴出速度が大きいという定性的なとらえ方がきわめて容易になされる。

(3) 探究的な結果の処理

実験し、測定で得た結果をどのように処理し、法則性を見い出させるかは、まさに探究の過程をふませる絶好の指導場面となるであろう。

ここでは、噴出速度を分子量や温度との関連でとらえているが、この場合、分子量との直接の対比だけに終わらず、 \sqrt{M} や $1/\sqrt{M}$ との対比でみることによって、反比例や比例というより簡潔な関係で現象がとらえられる。ただし、高校生に \bar{v} を推定させるには(6)式の適用という難しさがある。

7 おわりに

この研究は、最終的には高圧の気体の噴流現象に対して分子流としての解析を適用してみたもので、その結果、分子の平均の速さをかなり理論値に近い値で推定することができた。

しかしながら、本研究の実験装置における気体の流れはあくまでも分子流ではない。すなわち、本装置のコンダクタンスとして、 $n\bar{v}/4$ を適用してよい理論的根拠は薄弱である。そこで、偶然的なコンダクタンスの合致に目をむけて分子の平均の速さを推定したことになる。

今後とも、このような噴流現象を、ミクロな分子運動で解釈していく努力が必要であろうが、この報告は、学習の場にじゅうぶん生かせる資料を提供していると考えられる。

文 献

- 1) 富永五郎・辻 泰 : 真空工学の基礎 真空技術講座1 日刊工業新聞社(1967) PP. 14~33
- 2) 同 上 : 同上 PP. 65~69
- 3) 辻 泰 : 私信 (1974.10.22)