第二章　研究の概要

I　個人面接による調査

1　個人面接による調査方法

中学校3年生の自然学級より，学校の評定による上，中，下各2名，計6名の子どもを選んで，次のような計画により，面接調査をおこなった。子どもひとりについての面接調査は，毎回約1時間である。ふたりの子どもを同時に召集したので，交互に，面接したり，調査問題に応答させたりした。

組	生徒氏名	学校の評定	知能指数	第1回	第2回	第3回	第4回
1組	A_{01} A_{02}	5 4	94 100	7月30日 9時より	8月3日 9時より	8月10日 9時より	8月18日 9時より
2組	B_{01} B_{02}	3 3	94 91	7月31日 13時より	8月4日 9時より	8月13日 9時より	8月19日 9時より
3組	C_0 D_0	2 1	86 73	8月1日 9時より	8月6日 9時より	8月13日 13時より	8月21日 9時より

2　個人面接による調査問題

個人面接による調査問題は，中学校2年生の図形教材から選んだ。調査の結果の考察に重要な関係のあった調査問題は，次の調査の記録の項にかかげ，その他の調査問題は，この紀要にかかげることを省略した。

3　個人面接による調査結果の考察の一覧表

(1)　生徒 D_0 に対する調査結果の考察の一覧表

＜1＞　調査問題(イ)

＜2＞　調査問題(イ)に対する生徒 D_0 の指導による応答

＜3＞　調査問題(イ)に対する生徒 D_0 の指導による応答の考察

＜4＞　調査問題(ハ)

＜5＞　調査問題(ハ)に対する生徒 D_0 の指導前の応答

＜6＞　調査問題(ハ)に対する生徒 D_0 の指導前の応答の考察

(2)　生徒 C_0 に対する調査結果の考察の一覧表

＜7＞　調査問題(イ)に対する生徒 C_0 の指導による応答

＜8＞　調査問題(イ)に対する生徒 C_0 の指導による応答の考察

＜9＞　調査問題(ロ)

<10>　調査問題(ロ)に対する生徒C_0の指導前の応答

<11>　調査問題(ロ)に対する生徒C_0の指導前の応答の考察

<12>　調査問題(ハ)に対する生徒C_0の指導前の応答

<13>　調査問題(ハ)に対する生徒C_0の指導前の応答の考察

<14>　調査問題(ニ)

<15>　調査問題(ニ)に対する生徒C_0の指導による応答

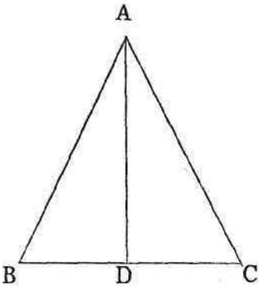
<16>　調査問題(ニ)に対する生徒C_0の指導による応答の考察

4　個人面接による調査結果の考察

(1)　生徒D_0に対する調査結果の考察

<1>　調査問題（イ）

二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺の垂直二等分線であることを証明せよ。



<2>　調査問題（イ）に対する生徒D_0の指導による応答

仮　定（わかっていること）

AB＝AC
∠B＝∠C
} △ABCが二等辺三角形だから

∠BAD＝∠DAC……DAは∠Aの二等ぶんせんだから

結　論（証明すること）

AD⊥BC
BD＝DC
} ADはBCの垂直二等ぶんせんである

証　明（わかっていることをもとにして説明する）

AB＝AC　　二等辺三角形であるから
ADはきょうつう（共通）
∠BAD＝∠DAC　　∠Aの二等ぶんせん
} わかっていること「もと」

∴　△ABD≡△DAC

∴　BD＝DC

また ∠BDA＝∠ADC

<3>　調査問題（イ）に対する生徒D_0の指導による応答の考察

- 二等辺三角形の図形を正しくかけない。
- 「仮定」の意味を理解していないので，「わかっていること」と言い替えて理解させるようにつとめた。
- 二等辺三角形の性質も理解していない。したがって，その性質を式で書き表わすこともできない。
- 二等分と2つに分けることを混同している。
- 「結論」は「証明すること」と言い替えて理解させるようにつとめた。
- 「垂直二等分線」の意味も理解していない。したがって，その性質を式で書き表わすこともできない。
- 「証明」は「わかっていることをもとにして説明する」と言い替えて理解させるようにつとめた。
- 必要な知識がないので思考をすすめることができない。
- 「共通」の意味を理解していないので，二等辺三角形を切り抜き，2つの三角形に分けて理解させた。
- 三角形合同の条件については，コトバと図形と式がばらばらで，関連性をもたない。またそれらの条件を，図形や式に書き替えることも容易でなかった。
- 三角形合同の条件を，文章と図形と式で表わしたものを見せながら，三角形合同の推論をさせても，必要な条件を選択することがむずかしい。
- 生徒D_0に，論証の過程を説明させ，書かせ，また，説明させるというように指導を重ねると，同一問題においては，しだいに正しい応答ができるようになるが，この応答は，筋道をとおして考えるのではなく，思いつくままの個々ばらばらな知識を書き並べているようである。

<4>　調査問題（ハ）

四角形ABCDの対辺AD，BCの中心をP，Q，対角線BD，ACの中点をそれぞれM，Nとすれば，四角形PMQNは平行四辺形となることを証明せよ。

<5>　調査問題（ハ）に対する生徒D_0の指導前の応答

仮　定

ABCDは平行四辺形

PはADの中点

NはABの中点

QはBCの中点

MはDCの中点

結　論

PNQMは平行四四辺形

証　明

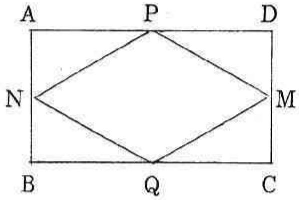
PNQMは$\frac{1}{2}$ABCD

AD∥BC

AB∥DC

PN∥MQ

PM∥NQ



＜6＞　調査問題（ハ）に対する生徒D_0の指導前の応答の考察

- この応答は，多少の助言を与えたものである。
- この生徒D_0に四角形をかかせると必ず正方形をかく。「それは正方形でしょう。普通の四角形をかいてみなさい。」と言っても，また正方形をかく。一般の四角形をかいて指導することによって初めてそれをかくことができるようになる。その後また四角形をかかせると，この問題のように長方形をかく。このように既有知識が強く作用して，新しい知識が身につかないのである。思考がかたいということができよう。

問題の文章を読んで，それを図形に表わすのは，問題によってはすぐれた子どもでもむずかしいのであるが，生徒D_0は，問題の文章を吟味してから図形をかくのでなく，1回読んだきりで，文章から離れて図形をかいている。問題の文章の読解が困難であることもあって，文章から離れて，強化されてある過去の経験を再生して，図形をかいているように思われる。

- 証明においては，「PNQMは$\frac{1}{2}$ABCD」と書いているが，これは図形を直観的に判断してのことで，理由とか，目的とかを考えての思考ではない。ただ目にうつることがらや，なんとなく思いおこすことを書きつらねているようである。
- AD∥BC，AB∥DC，PN∥MQ，PM∥NQは，図形を直観的に判断した結果を書いたものである。
- 問題を目標や条件に，論証を理由と帰結に分析して考えることはむずかしい。

（2）　生徒C_0に対する調査結果の考察

＜7＞　調査問題に（イ）に対する生徒C_0の指導による応答

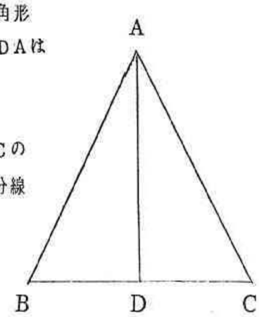
仮　定（わかっていること）

AB＝AC
∠B＝∠C　｝△ABCが二等辺三角形

∠BAD＝∠CAD ― DAは∠Aの二等分線だから

結　論（証明すること）

AD⊥BC
BD＝DC　｝ADはBCの垂直二等分線



証　明

AB＝AC

ADは共通

∠BAD＝∠DAC

∴　△ABD≡△ACD

∴　　BD＝DC

また ∠BDA＝∠ADC

∠ADBと∠ADCをたすと180°であるから

∠ADBと∠ADCはそれぞれ90°である。

∴　ADはBCの垂直二等分線である。

＜8＞　調査問題（イ）に対する生徒C_0の指導による応答の考察

- 生徒C_0は，二等辺三角形の図形のかき方をたやすく理解した。
- 「仮定とはなんのことですか？」の質問には，「……ならばが仮定である」，「結論は？」「……であるが結論である」と子どもは答える。

この学校で使用している教科書では，仮定や結論をこのように説明しているので，子どもも教科書どおり記憶ているのであるが，実際は，「……ならば……である。」と書かれている問題は少ない。したがって先のように，仮定や結論の意味を，記憶しても，劣る子どもの論証には役だたない。生徒D_0のときと同様に，仮定，結論，証明を「わかっていること」，「証明すること」，「わかっていることをもとにして説明する」と言い替えて指導した。しかしこのようなコトバは，2つ3つ問題を解くことによって，仮定，結論，証明とそのままのコトバを使ってもさしつかえないようになると思われた。

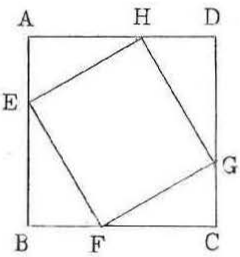
- 生徒C_0は，調査問題(イ)に対しては，助言を与えながら，2回ぐらい応答を繰り返えさせると，3回目（同じ日ではない。）には，ほとんど自分の力で正答できる。「共通」の意味を理解していない。
- この問題においては，生徒C_0は生徒D_0よりも，理解は速く，論証の過程の説明も容易である。論証の予想をたてること，あともどりして考えること，分析すること，目標のは握なども，生徒D_0に比べて容易にできる。
- △ABD≡△ADCであるとBD＝DC，∠BDA＝∠ADCであることは，切り抜いた実際の三角形であると理解しやすい。

∠BDA+∠ADC=180°であり，∠BDA=∠ADCであると，∠BDA=∠ADC=90°であることを，図形や実物では判断できるが，これを説明すること，式で表わすことは，たいそうむずかしい。

- 操作をしているうちに目標を忘れてしまう。

＜9＞ 調査問題（ロ）

正方形ABCDの辺AB，BC，CD，DA上に，それぞれ点E，F，G，Hをとり，AE=BF=CG=DHであるようにし，四角形EFGHについて考える。四角形EFGHは正方形であることを証明せよ。



＜10＞ 調査問題（ロ）に対する生徒C_0の指導前の応答

仮 定（わかっていること）

ABCDは正方形

AB=DC，AD=BC

∠B=∠D，∠A=∠C

AB∥DC，AD∥BC

EFGHは~~正方形~~四角形

EF=HG，EH=FG

∠F=∠H，∠E=∠G

EF∥HG，EH=FG

結 論

四角形EFGHは正方形

＜11＞ 調査問題（ロ）に対する生徒C_0の指導前の応答の考察

- 「仮定」を「わかっていること」と言い替えて指導した。生徒C_0は，仮定の分析を，図形によっておこなっている。
- 仮定の前半は，正しく条件分析をおこなったと考えてよい。これは，条件の論理的分析と，図形を見ての直観的思考とが結果的に同一であるために，条件分析の誤りをおかさなかった。
- 仮定の後半について，

□EFGHが正方形であることが結論なのであるが，生徒C_0は図形を直観的思考によって，それを正方形と定めたが，ふり返ってみることによって訂正し，四角形と書いている。

- EF=HG，EH=FG，∠F=∠H，∠E=∠Gは直観的思考によるものであって，生徒C_0としては，これで証明が終わったのである。（正しくは，∠F=∠H=∠E=∠G=∠Rの証明が必要である。）

しかし，生徒C_0はそれだけでは不安であるので，EF∥HG，EH=FG（EH∥FGの誤り）をつけ加えているが，EF∥HC，EH∥FGをつけ加えても，□EFGHは正方形にはならない。

- しかし，四角形EFGHは正方形であると結論をくだしている。
- この応答の順序を入れ替えて次のように論証の様式にあてはめることができる。

仮 定

ABCDは正方形

AB=DC，AD=BC

∠B=∠D，∠A=∠C

AB∥DC，AD∥BC

結 論

四角形EFGHは正方形

証 明

EFGHは四角形

EF=HG，EH=FG

∠F=∠H，∠E=∠G

- このように，証明の順序を変更することによって，生徒C_0の思考過程が明らかになる。しかし生徒C_0は，仮定，結論，証明と，順序正しく考えていく論証の方法が身についていない。
- この図形は，直観的思考によって結論がはっきりわかる。そのため生徒C_0は直観的思考によってこの問題に応答している。ここに劣る子どもに対する論証の指導のむずかしさがある。彼らにとっては，当然わかっていると思われることを論理的に説明させなければならないところに劣る子どもに対する図形指導の問題点があると思われる。

＜12＞ 調査問題（ハ）に対する生徒C_0の指導前の応答

仮 定（証明すること）

ABCDは四角形

MはACの中点

PはABの中点

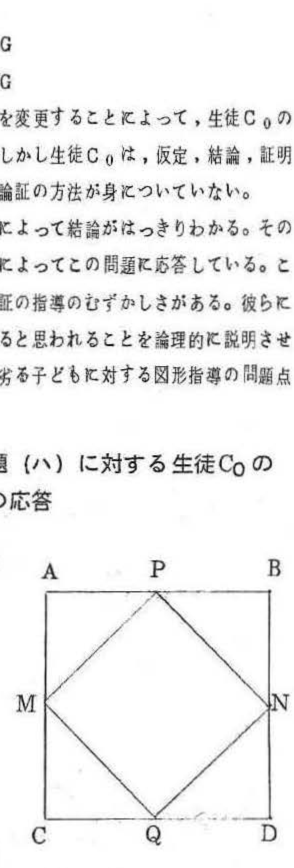
NはBDの中点

QはCDの中点

結 論（証明すること）

PMNQは平行四辺形

証 明（わかっていることをもとにして）



Mは$\frac{1}{2}$AC

Qは$\frac{1}{2}$CD

Nは$\frac{1}{2}$BD

Pは$\frac{1}{2}$AB

$AC \parallel BD$

$AB \parallel CD$

$PM \parallel NQ$

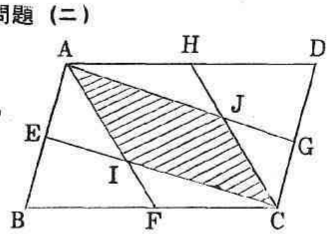
$MQ \parallel PN$

<13> 調査問題（ハ）に対する生徒C_0の指導前の応答の考察

- 生徒C_0は問題の文章を読んでその内容を吟味して，その内容を注意深く図形化するのではない。この問題の文章はむずかしいのではあるが，生徒C_0は，あっさり文章を読んで，直ちに図形を書き始める。「四角形ABCD」とあるので，強化された経験である正方形をかく。記号のつけ方は，数学的な習慣によらない。問題には「AD，BCの中点をP，Q…」とあるが，自分のかいた図形の適当と思われるところにその記号を記入している。
- 仮定のことを「証明すること」と書いている。前に指導された「わかっていること」と結びつかない。つまり「仮定」というコトバの意味を理解していない。
- 条件は，問題の文章と関係なく，自分のかいた図形によって判断している。したがって，違っている図形による判断であるから，その書かれた条件も誤っている。
- 「Mは$\frac{1}{2}$AC」の意味は，線分ACの中点はMであることの表現と思われるが，数学ではこのような表現はしない。
- $AC \parallel BD$，$AB \parallel CD$，$PM \parallel NQ$，$MQ \parallel PN$は，直観的に図形の性質を判断したものである。四角形PMQNが平行四辺形であるためには，$PM \parallel NQ$，$MQ \parallel PN$であればよいと考え，その平行四辺形の条件を直観的思考によって立言したもので，目標をもった操作ではない。

<14> 調査問題（ニ）

右の図の平行四辺形ABCDでE，F，G，Hは各辺の中点である。斜線を引いた図形が平行四辺形になることを説明せよ。



<15> 調査問題（ニ）に対する生徒C_0の指導による応答

仮 定（わかっていること）

ABCDは平行四辺形

（$AB=DC$，$AD=BC$，
$\angle B=\angle D$，$\angle A=\angle C$，
$AD \parallel BC$，$AB \parallel DC$，）

E，F，G，Hは各辺の中点

（$AE=EB$，$DG=GC$，$AH=HD$，$BF=FC$，）

結 論（証明すること）

AICJは平行四辺形

（① $AJ \parallel IC$
② $AI \parallel JC$）

証 明（わかっていることをもとにして説明する。）

① $AE=CG$
　$AE \parallel CG$
　∴ □AECGは平行四辺形
　∴ $AG \parallel EC$
　∴ $AJ \parallel IC$

② $AH=FC$
　$AH \parallel FC$
　∴ □AHCFは平行四辺形
　∴ $AF \parallel HC$
　∴ $AI \parallel JC$

∴ □AICJは平行四辺形

<16> 調査問題（ニ）に対する生徒C_0の指導による応答の考察

- 生徒C_0に平行四辺形の条件を復習させたのち，その平行四辺形の条件の文章を見せながら，論証の過程を指導した結果が，この指導による応答である。
- まず，問題を読ませてから作図させる。
- 論証の過程を助言しながら考えさせる。
- 再び，助言によって論証をすすめながら生徒C_0に記述させる。
- 2つの下位目標（□AECG，□AFCH）を色分けさせる。
- 以上のような指導をすると，生徒C_0は論証の過程を理解することができようになると思われた。

条件分析，条件の定式変え（文章を式で表わすこと）などは比較的容易に理解できるようである。目標分析は，助言によると理解できる。

論証において，2つの下位目標を順序正しく証明し，最後に上位目標（結論）に到達させることは困難である。

- 同じ指導を数回繰り返すことによって，論証の過程の全体構造を理解させることができるように思われた。

5　個人面接による調査結果のまとめ

―学業成績の劣る子どもの思考の特徴―

注　＜　＞の中の数字は調査結果の考察の番号である。

(1)　数学用語がわからない＜3＞。

(2)　コトバを知っていても内容をもたない＜8＞。

(3)　コトバをやさしくしても，そのやさしいコトバと，もとのコトバが結びつかない＜13＞。

(4)　概念を誤って理解している＜6＞
その誤りは容易に是正できない＜6＞。

(5)　問題の内容を吟味しない＜13＞。

(6)　問題の内容の作図がむずかしい＜6＞。

(7)　簡単な図形も正しくかけない＜6＞。

(8)　問題の内容の作図のとき，強化された過去の経験に左右される＜6＞，＜13＞。

(9)　コトバと図形と式が個々ばらばらで関連をもたない＜3＞，＜13＞。

(10)　図形の記号のつけ方は，数学の習慣によらない＜13＞。

(11)　図形に記号を記入するときは，問題を吟味しないで，記憶だけで記入する。したがって，過去の類似の経験を思いおこして書くことが多い＜13＞。

(12)　問題の論証を考えるとき，図形からだけ考えている＜13＞。

(13)　必要な知識をもたないから，思考をすすめることが困難なことが多い＜3＞。

(14)　筋道をたてて考えることがむずかしい＜3＞。

(15)　筋道をたてて考えなく，直観的に判断して，その結果をられつしておく＜6＞。

(16)　図形や実物では，直観的に判断できるが，これを論理的に説明すること，式で表わすことがむずかしい＜7＞。

(17)　直観的思考も，目標に到達するためより，単に図形を見て，見える図形の性質をられつするにすぎない場合が多い＜13＞。

(18)　条件分析を，問題の文章を吟味しないで，図形だけによっておこなう＜13＞。

(19)　論証の過程を，仮定，結論，証明の順序によって，正しく考えることがむずかしい＜11＞。

(20)　結論も図形から直観的に判断する。したがって証明しない誤りをおかす＜11＞。

(21)　結論が図形にかかれている問題は，論理的に考えなく，直観的に判断して結論をだす＜11＞。

(22)　操作をしているうちに，目標を忘れる＜8＞。

(23)　あともどりして考えることがむずかしい＜8＞。

(24)　目標と手段，理由と帰結に分析して考えることがむずかしい＜6＞。

Ⅱ　ペーパー，テストによる調査

1　ペーパー，テストによる調査方法

個人面接による調査をおこなった学校でない他の中学校の3年生の自然学級を2組選んで，次の計画によって調査問題の応答を求めた。

9月24日　・調査問題「図形をかく能力をみる問題」（所要時間20分）

9月24日　・調査問題　(1)，(2)，(3)，(4)（所要時間50分）

9月26日　・調査問題　(5)，(6)，(7)，(8)，(9)，(10)（所要時間60分）

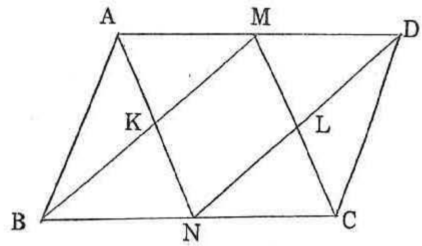
9月26日　・調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」（所要時間30分）

次に，調査問題に対する応答調査をおこない，学業成績の劣る子どもの思考の特徴をとらえる。応答調査の対象は，学校における数学の評定　5，3，2，1のもの各6名，計24名とする。この24名は2組よりそれぞれ同数ずつ抽出した。

2　ペーパー．テストによる調査問題

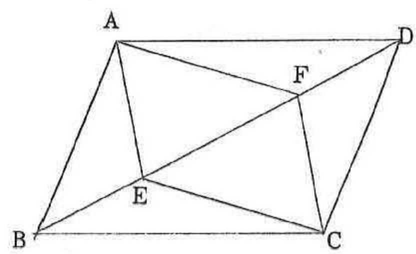
(1)　平行四辺形ＡＢＣＤの1組の対辺ＡＤ・ＢＣの中点をそれぞれＭ，Ｎとし，ＡＮとＢＭの交点をＫ・ＤＮとＣＭの交点をＬとすれば，四角形ＫＮＬＭは平行四辺形である。このことを証明せよ。

(1)



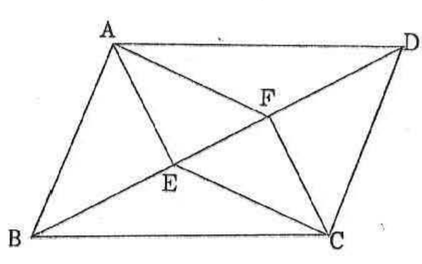
(2)　平行四辺形ＡＢＣＤの対角線ＢＤ上に2点Ｅ，Ｆを，ＢＥ＝ＤＦとなるようにとれば，四角形ＡＥＣＦは平行四辺形であることを証明せよ。

(2)



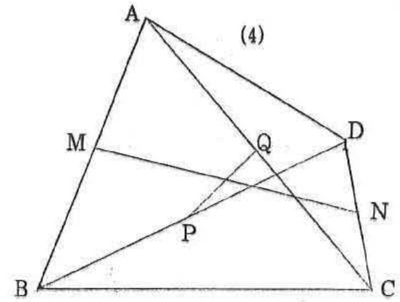
(3)　平行四辺形ＡＢＣＤの対角線ＢＤにＡ・Ｃから垂線を引いてその足をＥ，Ｆとすれば，四角形ＡＥＣＦは平行四辺形になることを証明せよ。

(3)



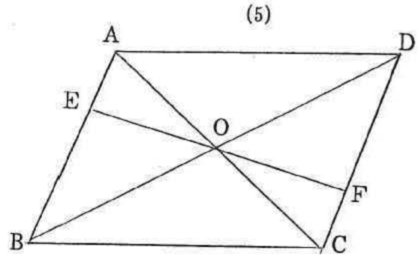
(4)　四角形ＡＢＣＤの2辺ＡＤ，ＢＣが平行でないとき，他の2辺ＡＢ，ＣＤの中点を結ぶ線分と，2つの対角線ＡＣ，ＢＤの中点を結ぶ線分とは，たがいに他を2等分する。このことを証明せよ。

(4)



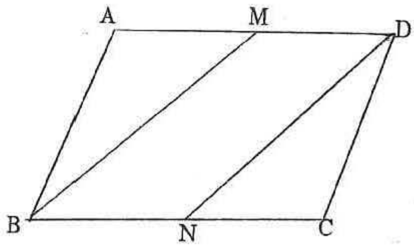
(5) 平行四辺形ＡＢＣＤの対角線の交点Ｏを通る１つの直線を引き，平行四辺形の２つの辺と右の図のようにＥ，Ｆで交わらせる。Ｏは線分ＥＦの中点であることを証明せよ。

(5)



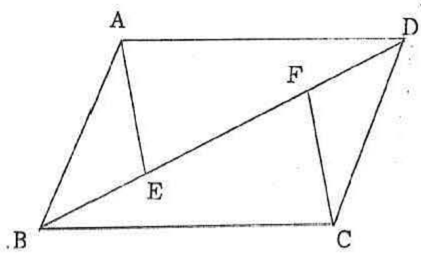
(6) 平行四辺形ＡＢＣＤの１組の対辺ＡＤ，ＢＣの中点をそれぞれＭ，Ｎとすれば，四角形ＭＢＮＤは平行四辺形である。このことを証明せよ。

(6)



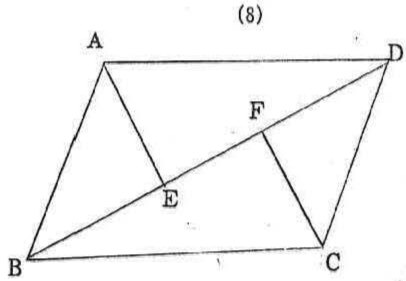
(7) 平行四辺形ＡＢＣＤの対角線ＢＤ上に２点Ｅ，Ｆを，ＢＥ＝ＤＦとなるようにとればＡＥ，ＦＣは，長さが等しく，平行であることを証明せよ。

(7)



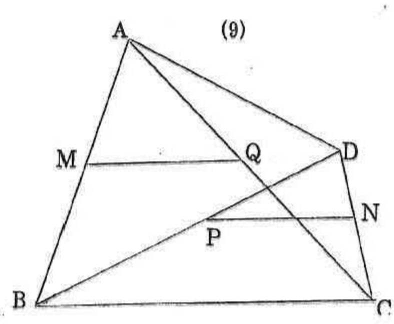
(8) 平行四辺形ＡＢＣＤの対角線ＢＤに，Ａ，Ｃから垂線を引いてその足をＥ，Ｆとすれば，ＡＥとＣＦは，長さが等しく平行であることを証明せよ。

(8)



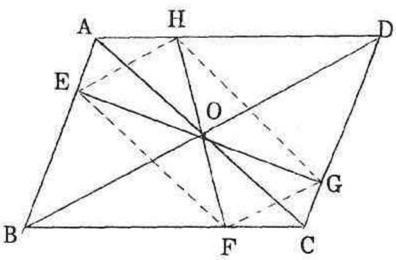
(9) 四角形ＡＢＣＤの２辺ＡＤ，ＢＣが平行でないとき，他の２辺ＡＢ，ＣＤの中点をＭ，Ｎ，２つの対角線ＢＤ，ＡＣの中点をＰ，Ｑとする。線分ＭＱ，ＰＮは長さが等しく，平行であることを証明せよ。

(9)



(10) 平行四辺形ＡＢＣＤの対角線の交点Ｏを通る２つの直線を引き，平行四辺形の４つの辺と右の図のようにＥ・Ｆ・Ｇ・Ｈで交わらせる。Ｅ・Ｆ・Ｇ・Ｈを結べば平行四辺形になることを証明せよ。

(10)



図形をかく能力をみる問題

注　意　　次のそれぞれの問題の図形をコンパス、ものさし、三角定木などを使って，できるだけ正しくかいてください。記号も正しく書いてください。この問題は，証明をしないでよいのです。時間は約２０分です。

①　　調査問題(1)と同じであるが，図形だけがかいてない問題。

②　　調査問題(2)と同じであるが，図形だけがかいてない問題。

③　　調査問題(3)と同じであるが，図形だけがかいてない問題。

④　　調査問題(4)と同じであるが，図形だけがかいてない問題。

平行四辺形の条件に関する問題

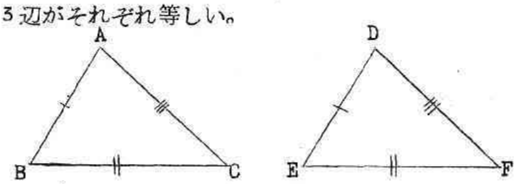
問　題　　四角形が平行四辺形になるための条件を，知っているだけあげてください。またそのひとつひとつに図と式もかいてください。

かき方の例

２つの三角形合同の条件を知っているだけあげてください。またそのひとつひとつに図と式もかいてください。

答　　１，３辺がそれぞれ等しい。

図



式　ＡＢ＝ＤＥ
ＢＣ＝ＥＦ
ＡＣ＝ＤＦ

2.　略す。　三角形合同の条件は３つあるが，この場合は例であるので，
3.　略す。　2.　3.は省略する。

3　ペーパー・テストによる調査結果の分類表

ペーパー・テストによる調査結果の分類表

	子どもの氏名	学校の評定	標準テスト	知能指数	調査問題																		
					平行四辺形の条件					図形をかく能力				(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
					①	②	③	④	⑤	①	②	③	④										
すぐれた子ども	A_1	5	57	133	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	A_2	5	61	134	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	○	○	×	○	○	○	○	○	○
	A_3	5	62	116	○	△	○	○	×	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×
	A_4	5	61	119	○	○	○	×	○	○	○	×	×	×	△	△	×	○	○	○	○	○	○
	A_5	5	61	132	○	△	○	○	×	○	○	×	×	×	○	×	×	○	○	○	○	○	×
	A_6	5	75	129	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	○	○	○	×
中位群	B_1	3	53	103	○	○	○	△	×	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	B_2	3	49	108	△	×	×	○	×	△	×	×	×	×	×	×	×	×	○	△	×	×	×
	B_3	3	47	102	○	△	○	○	×	×	○	○	×	×	×	△	×	○	×	△	△	×	×
	B_4	3	47	101	×	○	×	○	×	○	○	○	×	×	×	×	×	×	×	○	×	×	×
	B_5	3	47	104	×	○	○	○	×	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	B_6	3	48	100	×	○	○	△	×	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
劣る子ども	C_1	2	45	100	○	○	×	×	×	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	C_2	2	40	80	×	×	×	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	C_3	2	43	96	○	○	○	×	×	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	C_4	2	40	78	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	C_5	2	41	92	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	D_1	2	42	91	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	D_2	1	35	92	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	D_3	1	35	90	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	D_4	1	36	71	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	D_5	1	40	82	×	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	D_6	1	37	73	×	△	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	D_7	1	37	86	×	△	△	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

注　○……正答　△……半解　×……誤答，無答

平行四辺形になるための条件

① 2組の対辺がそれぞれ平行。

② 2組の対角がそれぞれ等しい。

③ 2組の対辺がそれぞれ等しい。

④ 対角線がたがいに他を2等分する。

⑤ 1組の対辺が平行で等しい。

４　ペーパー・テストによる調査結果の考察の一覧表

ペーパー・テストによる調査は２こ学級全員９２名についておこなったが，調査結果の考察は２４名である。次にかかげる記録はその一部である。

生徒A_1は，９２名の子どもの中で，ただひとりの全問正答者であったので・全応答とその考察をかかげる。生徒B_1・B_4・B_5・B_6は中位群の代表として，その特徴のあるものだけをかかげる。生徒C_1，C_2，C_3・D_1・D_2・D_3の応答とその考察は，特徴のあるもの，実験的指導に関係の深いものだけをかかげる。その他の子どもの調査結果は省略する。

（１）　生徒A_1に対する調査結果の考察の一覧表

＜１７＞　調査問題(1)に対する生徒 A_1 の応答
＜１８＞　調査問題(1)に対する生徒 A_1 の応答の考察
＜１９＞　調査問題(2)に対する生徒 A_1 の応答
＜２０＞　調査問題(2)に対する生徒 A_1 の応答の考察
＜２１＞　調査問題(3)に対する生徒 A_1 の応答
＜２２＞　調査問題(3)に対する生徒 A_1 の応答の考察
＜２３＞　調査問題(4)に対する生徒 A_1 の応答
＜２４＞　調査問題(4)に対する生徒 A_1 の応答の考察
＜２５＞　調査問題(5)に対する生徒 A_1 の応答
＜２６＞　調査問題(5)に対する生徒 A_1 の応答の考察
＜２７＞　調査問題(6)に対する生徒 A_1 の応答
＜２８＞　調査問題(6)に対する生徒 A_1 の応答の考察
＜２９＞　調査問題(7)に対する生徒 A_1 の応答
＜３０＞　調査問題(7)に対する生徒 A_1 の応答の考察
＜３１＞　調査問題(8)に対する生徒 A_1 の応答
＜３２＞　調査問題(8)に対する生徒 A_1 の応答の考察
＜３３＞　調査問題(9)に対する生徒 A_1 の応答
＜３４＞　調査問題(9)に対する生徒 A_1 の応答の考察
＜３５＞　調査問題(10)に対する生徒 A_1 の応答
＜３６＞　調査問題(10)に対する生徒 A_1 の応答の考察
＜３７＞　調査問題「図形をかく能力をみる問題」に対する生徒A_1の応答
＜３８＞　調査問題「図形をかく能力をみる問題」に対する生徒A_1の応答の考察
＜３９＞　調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」に対する生徒A_1の応答
＜４０＞　調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」に対する生徒A_1の応答の考察

（２）　生徒A_1に対する調査結果の考察の一覧表

＜４１＞　調査問題(1)に対する生徒 A_1 の応答
＜４２＞　調査問題(1)に対する生徒 A_1 の応答の考察

(3)　生徒 B_4 に対する調査結果の考察の一覧表

(4)　生徒 B_5 に対する調査結果の考察の一覧表

(5)　生徒 B_6 に対する調査結果の考察の一覧表

(6)　生徒C_1に対する調査結果の考察の一覧表

＜73＞　調査問題(2)に対する生徒 C_1 の応答
＜74＞　調査問題(2)に対する生徒 C_1 の応答の考察
＜75＞　調査問題(4)に対する生徒 C_1 の応答
＜76＞　調査問題(4)に対する生徒 C_1 の応答の考察
＜77＞　調査問題(9)に対する生徒 C_1 の応答
＜78＞　調査問題(9)に対する生徒 C_1 の応答の考察

(7)　生徒C_2に対する調査結果の考察の一覧表

＜79＞　調査問題(1)に対する生徒 C_2 の応答
＜80＞　調査問題(1)に対する生徒 C_2 の応答の考察
＜81＞　調査問題(6)に対する生徒 C_2 の応答
＜82＞　調査問題(6)に対する生徒 C_2 の応答の考察

(8)　生徒C_3に対する調査結果の考察の一覧表

＜83＞　調査問題(1)に対する生徒 C_3 の応答
＜84＞　調査問題(1)に対する生徒 C_3 の応答の考察
＜85＞　調査問題(2)に対する生徒 C_3 の応答
＜86＞　調査問題(2)に対する生徒 C_3 の応答の考察
＜87＞　調査問題(10)に対する生徒 C_3 の応答
＜88＞　調査問題(10)に対する生徒 C_3 の応答の考察

(9)　生徒D_1に対する調査結果の考察の一覧表

＜89＞　調査問題(2)に対する生徒 D_1 の応答
＜90＞　調査問題(2)に対する生徒 D_1 の応答の考察
＜91＞　調査問題(7)に対する生徒 D_1 の応答
＜92＞　調査問題(7)に対する生徒 D_1 の応答の考察
＜93＞　調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」に対する生徒D_1の応答
＜94＞　調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」に対する生徒D_1の応答の考察

(10)　生徒D_2に対する調査結果の考察の一覧表

＜95＞　調査問題(5)に対する生徒 D_2 の応答
＜96＞　調査問題(5)に対する生徒 D_2 の応答の考察
＜97＞　調査問題(7)に対する生徒 D_2 の応答
＜98＞　調査問題(7)に対する生徒 D_2 の応答の考察
＜99＞　調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」に対する生徒D_2の応答

5　ペーパー・テストによる調査結果の考察

(1)　生徒A １に対する調査結果の考察

＜１７＞　調査問題（１）に対する生徒A １の応答

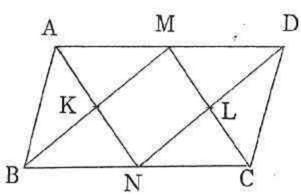
仮　定

AM＝MD

BN＝NC

AD$\mathrel{\underline{\parallel}}$BC

AB$\mathrel{\underline{\parallel}}$DC



結　論

KM$\parallel$NL

KN$\parallel$ML

証　明

AM＝$\frac{1}{2}$AD

MC（NC）＝$\frac{1}{2}$BC

AD$\mathrel{\underline{\parallel}}$BCであるから

AM$\mathrel{\underline{\parallel}}$MC（NC）

したがって四辺形ANCMは平行四辺形

∴　KN$\parallel$ML　　①

MD＝$\frac{1}{2}$AD

BN＝$\frac{1}{2}$BC

AD$\mathrel{\underline{\parallel}}$BCであるから

MD$\mathrel{\underline{\parallel}}$BN

したがって四辺形MBNDは平行四辺形

∴　KM＝（$\parallel$）NL　　②

①②より

四辺形KNLMは平行四辺形

＜１８＞　調査問題（１）に対する生徒A １の応答の考察

・ 証明過程にある（NC），（$\parallel$）は，子どもが誤って記号を使ったので筆者が訂正加筆したものである。

・ 調査問題(1)は思考の段階が２回ある問題である。四辺形KNLMが，平行四辺形であることの証明は，結論である。これを上位目標という。上位目標，つまり四辺形LNLMが平行四辺形であることの証明には，四辺形ANCMと四辺形BNDMとが２つとも平行四辺形であることの証明をしなければならない。これが下位目標である。この問題では下位目標が２つある。この生徒A １は下位目標は１組の対辺平行相等，上位目標は２組の対辺平行の最も適切な条件を使って証明している。このような応答をマッスグナミチの証明ということにする。

・ この応答では，文字や記号が３カ所も違っているが，このような誤りは劣る子どもになるといっそう多くなる。

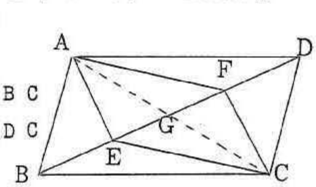
・ 結論の項の書き方については，KM$\parallel$NL，KN$\parallel$MLでもよいと思われるが，「四辺形KNLMは平行四辺形である。」との文章による表現がいっそう正しい。しかしこの生徒A １は証明の結びにおいては「四辺形KNLMは平行四辺形」と文章によって表現している。

＜１９＞　調査問題（２）に対する生徒A １の応答

仮　定

A D$\mathrel{\underline{\parallel}}$B C

A B$\mathrel{\underline{\parallel}}$D C



BE＝DF

結　論

四辺形AECFは平行四辺形

証　明

四辺形ABCDは平行四辺形であるから

BDとACの交点をGとすると

AG＝GC　　①

BG＝GD

したがって

BG＝GD

―) BE＝DF

EG＝GF

①②より

ACとEFは互いに二等分している

∴　四辺形AECFは平行四辺形

＜２０＞　調査問題（２）に対する生徒A_1の応答の考察

- この問題を対角線相互２等分の条件によって証明した子どもは１人であった。この証明はマッスグナミチの証明である。

＜２１＞　調査問題（３）に対する生徒A_1の応答の考察

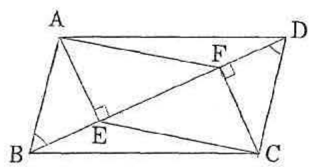
仮　定

AD$\underline{/\!/}$BC

AB$\underline{/\!/}$DC

AE⊥BD

CF⊥BD



結　論

四辺形AECF＝平行四辺形

証　明

AD∥BC　より　（AB∥DCより）

∠ABE＝∠CDF　　①

△ABEと△CDF　は直角三角形である

∠AEB＝∠CFD＝∠R　　②

仮定より　AB＝CD　　③

①②③　より

△ABE≡△CDF

∴　AE＝CF

仮　定　AE⊥BC（AE⊥BD）

CF＝BC（CF＝BD）

AE∥CF

$\begin{cases} \text{AE＝CF} \\ \text{AE∥CF} \end{cases}$　（１対辺平行等長）

∴　四角形AECFは平行四辺形

＜２２＞　調査問題（３）に対する生徒A_1の応答の考察

- △ABEと△CDFは直角三角形であるので，直角三角形の合同の定理を使って，証明をおこなっている。これはマッスグナミチの証明である。
- 文字を３カ所で誤って使用している。（訂正してかっこでかこむ）
- １組の対辺平行相等の最適の条件によって証明している。

＜２３＞　調査問題（４）に対する生徒A_1の応答

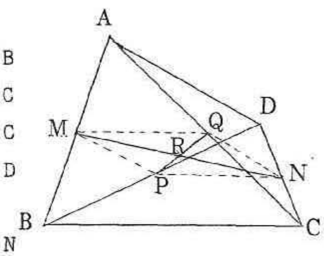
仮　定

AM＝MB

DN＝NC

AQ＝QC

BP＝PD



結　論

MR＝RN

PR＝RQ

証　明

MNとPQの交点をRとする

M，P，N，Qを結び四辺形MPNQを作る

△ABCにおいて

仮定　AM＝MB　より

AQ＝QC

BC∥MQ

同様に△DBCにおいて

仮定よりBC∥PN

∴　MQ∥PN　　①

△ABDにおいて

仮定より　AD∥MP

同様に△ACDにおいて

仮定より　AD∥NQ

∴　MP∥NQ　　②

①②　より

四辺形MPNQは平行四辺形

∴ $\begin{cases} \text{MR＝RN} \\ \text{PR＝RQ} \end{cases}$

＜２４＞　調査問題（４）に対する生徒A_1の応答の考察

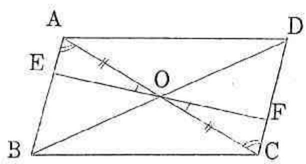
・ 2辺AD，BCは平行でないという条件が仮定になければならない。
・ 各この2直線が平行である理由に，「仮定により」と書いてあるがこれは「中点連結の定理により」とするのが正しい。中点連結の定理の内容は知っていても，そのコトバを知らない場合は，「仮定により」という表現によるより致し方ないであろう。
・ この応答は2組の対辺平行の条件によっているが，1組の対辺平行相等の条件によるのが，簡単ですっきりしている。したがって，この応答はマガリミチの証明ということにする。
・ それにしても四辺形MPNQに考えつき，この四辺形が平行四辺形であることの証明によって結論に到達できる洞察力は高く評価してよい。
・ 調査問題(4)の正答者は92名中，3名にすぎなかった。

＜25＞ 調査問題（5）に対する生徒A_1の応答

仮定

AB$\underline{\parallel}$DC

AD$\underline{\parallel}$BC



結論

EO＝OF

証明

△AEO≡△CFO

∵ ∠AO＝OC（仮定）
　∠AOE＝∠COF（対頂角）
　∠OAE＝∠DCF（錯角）

∴ EO＝OF

＜26＞ 調査問題（5）に対する生徒A_1の応答の考察

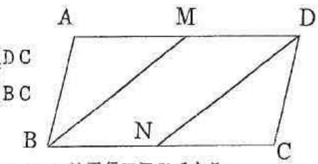
・ 調査問題(5)は調査問題(10)の基礎になる問題である。
・ 生徒A_1は，問題の条件が平行四辺形の場合は仮定にAB$\underline{\parallel}$BCのように書いておく。 この表わし方は必ずしも完全とはいえない。「□ABCDは平行四辺形である。」などのように文章で表現するのがよいと思われる。
・ 比較的単純な問題の証明過程において生徒A_1は，必ず結論をまず書いて，あとからその理由をあげている。
・ 調査問題(5)の証明過程もこの形式を用いている。
・ 調査問題(5)の応答は，マッスグナミチの証明である。

＜27＞ 調査問題（6）に対する生徒A_1の応答

仮定

AB$\underline{\parallel}$DC

AD$\underline{\parallel}$BC



結論

四角形MBNDは平行四辺形である。

証明

AD∥BCより

MD∥BN　　①

AD＝BCより

AD＝2MD

BC＝2BN

∴ MD＝BN　　②

①②より

四角形MBNCは平行四辺形

＜28＞ 調査問題（6）に対する生徒A_1の応答の考察

・ 調査問題(6)は調査問題(1)の基礎になる問題である。
・ この応答は1組の対辺平行相等の条件を使ったマッスグナミチの証明である。

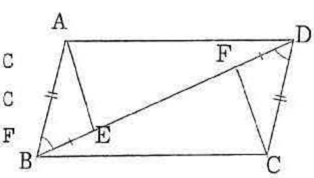
＜29＞ 調査問題（7）に対する生徒A_1の応答の考察

仮定

AB$\underline{\parallel}$DC

AD$\underline{\parallel}$BC

BE＝DF



結論

AE$\underline{\parallel}$FC

証明

△ABE≡△CDF

∵ AB＝CD（仮定）
　BE＝DF（仮定）
　∠ABE＝∠CDF（錯角）

∴ AE＝FC

△ABE≡△CDFであるから

∠AEB＝∠CFDであり

∠AEF＝2∠R－∠AEB

∠CFE＝2∠R－∠CFD

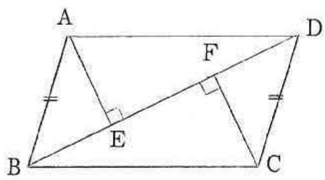
∴ ∠AEF＝∠CFEで錯角の関係にあるから

∴ AE∥FC

＜３０＞　調査問題（７）に対する生徒A_1の応答の考察

- 調査問題(7)は調査問題(2)の基礎になる問題である。
- この問題の証明も，角の移動によって錯角の等しいことから $AE \parallel FC$ を導いているのでマッスグナミチの証明である。
- 等式変換や等値関係の推論は子どもにとっては困難であるが生徒 A_1 はこの困難さを克服しているように思われる。

＜３１＞　調査問題（８）に対する生徒A_1の応答



仮　定

$AB \mathrel{\underline{\parallel}} DC$

$AD \mathrel{\underline{\parallel}} BC$

$AE \perp BD$

$CF \perp BD$

結　論

$AE \mathrel{\underline{\parallel}} CF$

証　明

△ABEと△CDF　とで

仮定より　$AB = CD$　①

$\angle ABE = \angle CDF$　（錯角）　②

$\angle BAE = 2\angle R - (\angle AEB + \angle ABE)$

$\angle DCF = 2\angle R - (\angle CFD + \angle CDF)$

$\angle AEB = \angle CFD = \angle R$（仮定）であるから

$(\angle AEB + \angle ABE) = (\angle CFD + \angle CDF)$

$\therefore\quad \angle BAE = \angle DCF$　③

①　②　③　より

$\triangle ABE \equiv \triangle CDF$

$\therefore\quad AE = CF$

また　$\angle AEF = \angle CFE = \angle R$であり

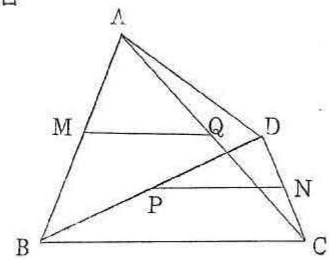
錯角の関係にあるから

$AE \parallel CF$

＜３２＞　調査問題（８）に対する生徒A_1の応答の考察

- 調査問題(8)は調査問(3)の基礎になる問題である。
- この応答は，$\triangle ABE \equiv \triangle CDF$の証明を，直角三角形合同の定理によらないで一般の三角形の合同の定理によっている。このように，かって証明したことのある定理や問題を用いることによって簡単に解ける課題を，それらを用いないで，わざわざ，定理やかっての問題の証明から，課題の論証をおこなっていることをクリカエシの証明ということにする。クリカエシの証明は，式が長くなり複雑になる。しかし，生徒 A_1 は，角の等値関係の操作の困難さを克服して正しく証明している。なお，この生徒 A_1 は調査問題(3)においては直角三角形合同の定理を使って証明している。

＜３３＞　調査問題（９）に対する生徒A_1の応答



仮　定

$AM = MB$

$CN = ND$

$BP = PD$

$AQ = QC$

結　論

$MQ \mathrel{\underline{\parallel}} PN$

証　明

△ABCにおいて

仮定より

$MQ \parallel BC$　及び　$MQ = \frac{1}{2}BC$

△DBCにおいて

仮定より

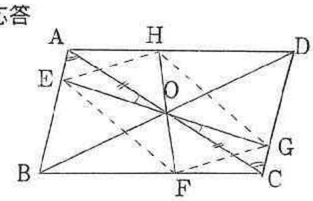
$PN \parallel BC$　及び　$PN = \frac{1}{2}BC$

$\therefore\quad MQ \mathrel{\underline{\parallel}} PN$

＜３４＞　調査問題（９）に対する生徒A_1の応答の考察

- 調査問題(9)は調査問題4)の基礎になる問題である。
- 仮定において，ADとBCが平行でない条件が忘れられている。
- この応答はマッスグナミチの証明であるが，証明過程の書き方としてはじゅうぶんでない。つまり，「仮定より，中点連結の定理によって」などのような表現が必要である。

＜３５＞　調査問題（１０）に対する生徒A_1の応答



仮　定

$AB \mathrel{\underline{\parallel}} DC$

$AD \mathrel{\underline{\parallel}} BC$

結　論

四角形EFGHは平行四辺形である

証　明

$\triangle AEO \equiv \triangle CGO$

$\because \begin{cases} AO = OC & （仮定） \\ \angle OAE = \angle OCG & （錯角） \\ \angle AOE = \angle COG & （対頂角） \end{cases}$

$\therefore\quad EO = OG$　①

$\triangle AHO \equiv \triangle CFO$

$$\because \begin{cases} AO=OC & （仮定） \\ \angle OAH=\angle OCF & （錯角） \\ \angle AOH=\angle COF & （対頂角） \end{cases}$$

$\therefore \quad HO=OF$

①　②　より

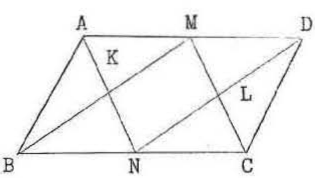
四角形ＥＦＧＨは平行四辺形

＜３６＞　調査問題（１０）に対する A_1 の応答の考察

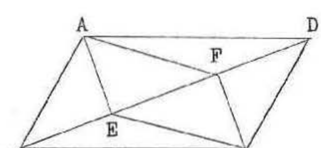
- 調査問題(10)は調査問題(4)の基礎になる問題である。
- 最も適切な対角線相互２等分の条件を使ったマツスグナミチの証明である。

＜３７＞　調査問題「図形をかく能力をみる問題」に対する生徒 A_1 の応答

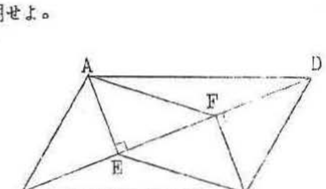
(1) 平行四辺形ＡＢＣＤの１組の対辺ＡＤ，ＢＣの中点をそれぞれＭ，Ｎとし，ＡＮとＢＭの交点をＫ，ＤＮとＣＭの交点をＬとすれば，四角形ＫＮＬＭは平行四辺形である。このことを証明せよ。



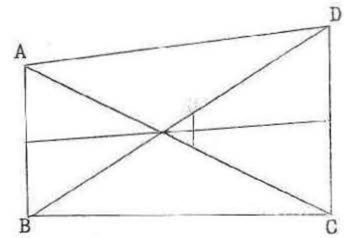
(2) 平行四辺形ＡＢＣＤの対角線ＢＤ上に２点Ｅ，Ｆを，ＢＥ＝ＤＦとなるようにとれば，四角形ＡＥＣＦは平行四辺形であることを証明せよ。



(3) 平行四辺形ＡＢＣＤの対角線ＢＤにＡ，Ｃから垂線を引いてその足をＥ，Ｆとすれば，四角形ＡＥＣＦは平行四辺形になることを証明せよ。



(4) 四角形ＡＢＣＤの２辺ＡＤ，ＢＣが平行でないとき，他の２辺ＡＢ，ＣＤの中点を結ぶ線分と，２つの対角線ＡＣ，ＢＤの中点を結ぶ線分とは，たがいに他を２等分する。このことを証明せよ。

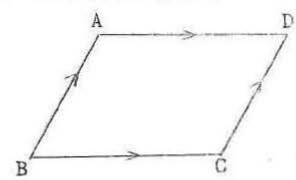


＜３８＞　調査問題「図形をかく能力をみる問題」に対する生徒 A_1 の応答の考察

- 調査問題(1)，(2)，(3)の図形のかき方は正しい。
- 調査問題(4)の図形も正しいが問題解決に利用する図形としてはまぎらわしい。

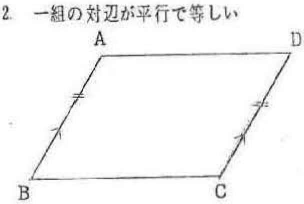
＜３９＞　調査問題「平行四辺形の条件」に関する問題に対する生徒　の応答

1. 対辺が互いに平行である



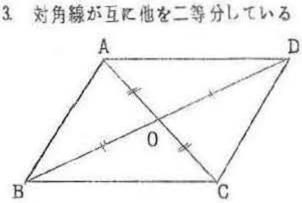
ＡＢ∥ＣＤ
ＡＤ∥ＢＣ

2. 一組の対辺が平行で等しい



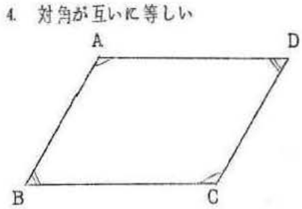
ＡＢ∥＝ＣＤ

3. 対角線が互に他を二等分している



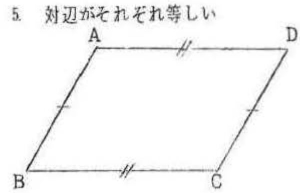
ＡＯ＝ＯＣ
ＢＯ＝ＯＤ

4. 対角が互いに等しい



$\angle A=\angle C$
$\angle B=\angle D$

5. 対辺がそれぞれ等しい



ＡＢ＝ＣＤ
ＡＤ＝ＢＣ

＜４０＞ 調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」に対する生徒Ａ１の応答の考察

- ５つの条件が定着しており，正しく図式化されている。

（２） 生徒Ｂ２に対する調査結果の考察

＜４１＞ 調査問題（１）に対する生徒Ｂ１の応答

仮 定

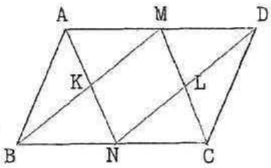
平行四辺形ＡＢＣＤより

ＡＤ∥ＢＣ，ＡＢ∥ＤＣ

ＡＭ＝ＭＤ，ＢＮ＝ＮＣ

ＡＫ＝ＫＮ，ＭＬ＝ＬＣ

ＢＫ＝ＫＭ，ＮＬ＝ＬＤ



結 論

ＫＮＬＭ＝平行四辺形

証 明

ＡＮ∥ＭＣ

ＡＫ＝ＫＮ，ＭＬ＝ＬＣ

ＡＫ∥ＫＮ，ＭＬ∥ＬＣ

∴ ＭＫ＝ＬＮ また ＭＫ∥ＬＮ

∴ ＫＮＬＭ＝平行四辺形

＜４２＞ 調査問題（１）に対する生徒Ｂ１の応答の考察

- ＡＫ＝ＫＮ，ＭＬ＝ＬＣ，ＢＫ＝ＫＭ，ＮＬ＝ＬＤの等式は，直観的思考によるものであって，証明しない誤りをおかしている。
- 結論の項の「ＫＮＬＭ＝平行四辺形」のような式の表現は数学的でない。
- ＡＮ∥ＭＣ も証明しない誤り。
- ＡＫ＝ＫＮ，ＭＬ＝ＬＣ も証明しない誤り。
- ＡＫ∥ＫＮ，ＭＬ∥ＬＣ は証明過程としては意味がない。
- ＭＫ＝ＬＮ また ＭＫ＝ＬＮ の等式や平行式が正しい根拠よりの論証であるならこの証明の結論は正しい。

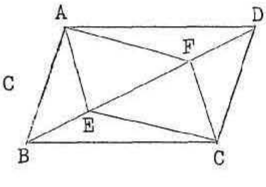
＜４３＞ 調査問題（２）に対する生徒Ｂ１の応答

仮 定

平行四辺形ＡＢＣＤより

ＡＢ∥ＤＣ ＡＤ∥ＢＣ

ＢＥ＝ＤＦ



結 論

ＡＥＣＦ＝平行四辺形

証 明

ＥＦ＝共通

対角線ＥＦは∠ＡＥＣを二等分しているので

∠ＡＥＦ＝∠ＣＥＦ

同じように対角線ＥＦは∠ＡＦＥ（Ｃ）も二等分しているので

∠ＡＦＥ＝∠ＣＦＥ

∴ △ＡＥＦ≡△ＣＥＦ

∴ ＡＥＣＦ＝平行四辺形

＜４４＞ 調査問題（２）に対する生徒Ｂ１の応答の考察

- 結論の項の「ＡＥＣＦ＝平行四辺形」の記述は数学的な書き方でない。
- 下位目標（△ＡＥＦ≡△ＣＥＦ）の成立に誤りがある。つまり∠ＡＥＦ＝∠ＣＥＦ，∠ＡＦＥ＝∠ＣＦＥ の等式は成立しない。□ＡＢＣＤが正方形である特殊な場合に限り成立する。
- 上位目標（□ＡＥＣＦは平行四辺形である。）が成立する条件が示されていない。

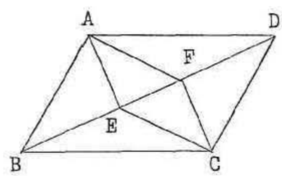
＜４５＞ 調査問題（３）に対する生徒Ｂ１の応答

仮 定

ＡＢ∥ＣＤ，ＡＤ∥ＢＣ

ＡＥ⊥ＢＤ

ＣＦ⊥ＢＤ



結 論

ＡＥＣＦ＝平行四辺形

証 明

∠ＡＥＦ＝∠ＣＦＥ＝∠Ｒ

ＡＥ＝ＣＦ

ＥＦ＝共通

∴ △ＡＥＦ≡△ＣＥＦ

∴ ＡＥＣＦ＝平行四辺形

＜４６＞ 調査問題（３）に対する生徒Ｂ１の応答の考察

- ＡＥ＝ＣＦ は証明しない誤りである。
- 下位目標（△ＡＥＦ≡△ＣＥＦ）と上位目標（ＡＥＣＦ＝平行四辺形）の関連が何もない。上位目標が成立する根拠が示されていない。

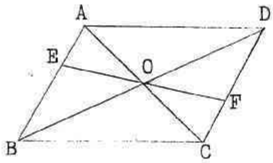
＜４７＞ 調査問題（５）に対する生徒Ｂ１の応答

仮　定

ＡＢＣＤ＝平行四辺形

結　論

Ｏは線分ＥＦの中点である



証　明

△ＯＥＢと△ＯＤＦにおいて

∠ＥＯＢ＝∠ＤＯＦ

ＢＯ＝ＤＯ

$\angle EBO=\frac{1}{2}\angle ABC$

$\angle FDO=\frac{1}{2}\angle ADC$

∴　∠ＥＢＯ＝∠ＦＤＯ

∴　△ＯＥＢ≡△ＯＤＦ

∴　ＥＯ＝ＦＯ

＜４８＞　調査問題（５）に対する生徒B_1の応答の考察

• この生徒 B_1 は角の等分について誤解している。すなわち，$\angle EBO=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle FDO=\frac{1}{2}\angle ADC$　の等式は成立しない。したがって　∠ＥＢＯ＝∠ＦＤＯ　は不当帰結の誤りである。生徒 B_1 は調査問題(2)においても，このような誤り（角の等分についての誤解）をおかしていた。

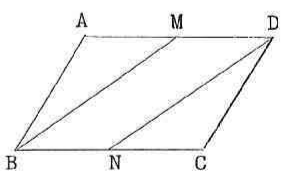
＜４９＞　調査問題（６）に対する生徒B_1の応答

仮　定

ＡＢＣＤ＝平行四辺形

ＡＭ＝ＤＭ

ＢＮ＝ＮＣ



結　論

ＭＢＮＤ＝平行四辺形

証　明

ＤＭ＝ＢＮ

ＤＭ∥ＢＮ

ＭＢ＝ＤＮ

ＭＢ∥ＤＮ

∴　ＭＢＮＤ＝平行四辺形

＜５０＞　調査問題（６）に対する生徒B_1の応答の考察

• 結論を導くには，ＤＭ＝ＢＮ，ＤＭ∥ＢＮ　だけでよいのに，ＭＢ＝ＤＮ，ＭＢ∥ＤＮ　まで前提にかかげている。これは条件が過剰である。

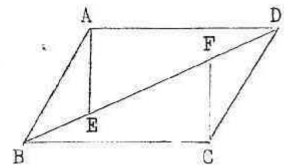
• しかも，ＭＢ＝ＤＮ，ＭＢ∥ＤＮ　は証明しない誤りである。

＜５１＞　調査問題（７）に対する生徒B_1の応答

仮　定

ＡＢＣＤ＝平行四辺形

ＢＥ＝ＤＦ



結　論

ＡＥ＝ＦＣ

ＡＥ∥ＦＣ

証　明

△ＡＢＥと△ＣＤＦにおいて

ＢＥ＝ＤＦ

ＡＢ＝ＣＤ

∠ＡＢＥ＝∠ＣＤＦ　∴△ＡＢＥ≡△ＣＤＦ

∴　ＡＥ＝ＣＦ

ＡＢ∥ＣＤだから

∴　ＡＥ∥ＣＤ

＜５２＞　調査問題（７）に対する生徒B_1の応答の考察

• ＡＥ∥ＣＤ　の平行式が成立する根拠としてＡＥ∥ＣＤをあげているが，これは，不当帰結の誤りである。

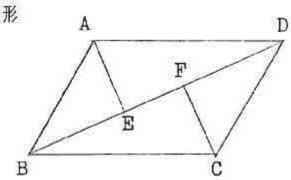
＜５３＞　調査問題（８）に対する生徒B_1の応答

仮　定

ＡＢＣＤ＝平行四辺形

ＡＥ⊥ＢＤ

ＣＦ⊥ＢＤ



結　論

ＡＥ＝ＣＦ

ＡＥ∥ＣＦ

証　明

△ＡＢＥと△ＣＦＤにおいて

ＡＢ＝ＤＣ

∠ＢＡＥ＝∠ＤＣＦ

∠ＡＢＥ＝∠ＤＦＣ（∠ＦＣＤ）

∴　△ＡＢＥ≡△ＣＦＤ

∴　　ＡＥ＝ＣＦ

ＡＢ∥ＣＤ　だから

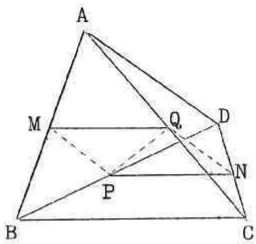
∴　　ＡＥ∥ＣＦ

＜５４＞　調査問題（８）に対する生徒B_1の応答の考察

• ∠BAE=∠DCF の等式の成立することは証明しなければならない。ここではそれを証明していないので証明しない誤りをおかしていることになる。

• AE∥CF の平行式が成立する根拠として，AB∥CD をあげているが，これは不当帰結の誤りをおかしていることになる。

<55> 調査問題（9）に対する生徒B_1の応答



仮 定

AM=BM

DM（DN）=NC

AQ=CQ

BP=NP（DP）

結 論

QPを結ぶ

MP，QMを結ぶ

△MPQと△NPQにおいて

QP=共通

∠MPQ=NQP（∠NQP）

∠MQP=NPQ（∠NPQ）

∴ △MPQ≡△NPQ

MPNQは平行四辺形となるので

∴ MQ=PN

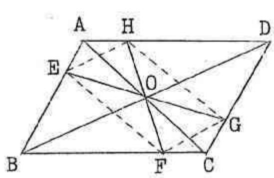
∴ MQ∥PN

<56> 調査問題（9）に対する生徒B_1の応答の考察

• かっこ内の文字は筆者が訂正したものである。

• ∠MPQ=∠NQP，∠MQP=∠NPQ の等式は証明しない誤りをおかしている。 これは，ひそかに □MPNQ を平行四辺形と考えていることから生じたものと思われる。したがって，△MPQ≡△NPQ の結論は論点窃取の誤りをおかしていることになる。

<57> 調査問題（10）に対する生徒B_1の応答



仮 定

ABCD=平行四辺形

結 論

EFGH=平行四辺形

証 明

OH=OF

OE=OG

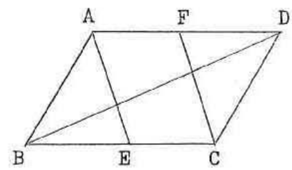
∴ EFGH=平行四辺形

<58> 調査問題（10）に対する生徒B_1の応答の考察

• OH=OF，OE=OG の等式は成立する理由を明らかにする必要があるのに証明していない。これは，証明しない誤りをおかしていることになる。

• EFGH=平行四辺形 の立言も「対角線が互いに他を2等分する。」という理由を明示しなければならない。

<59> 調査問題「図形をかく能力をみる問題③」に対する生徒B_1の応答

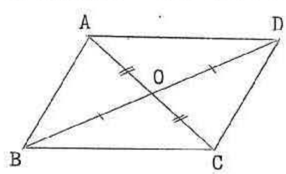


<60> 調査問題「図形をかく能力をみる問題③」に対する生徒B_1の応答の考察

• A，Cより，対角線に引いた垂線を，対辺まで延長してその交点をE，Fとしている。 E，Fは対角線上の垂線の足である。

<61> 調査問題「平行四辺形の条件に関する問題④」に対する生徒B_1の応答

④ 対辺はたがいに他を二等分する



AO=CO

BO=DO

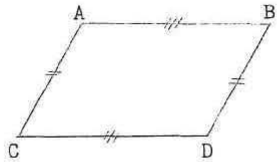
<62> 調査問題「平行四辺形の条件に関する問題④」に対する生徒B_1の応答の考察

• 図形や式は正しいが，文章による表現が誤っている。

（3） 生徒B_4に対する調査結果の考察

<63> 調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」に対する生徒B_4の応答

1. 省略する
2. 向い合った辺がそれぞれ平行で等しい



AB＝CD

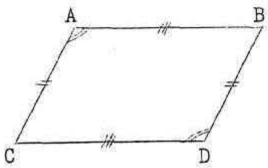
AC＝BC（BD）

AB∥CD

AC∥BD

3. 省略する

4. 向い合った二角が等しく向い合った二辺が平行で等しい

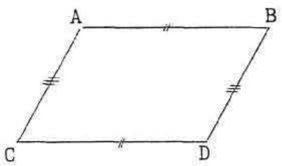


AB＝CD

AB∥CD

∠BAC＝BD

5. 向い合った二辺か平行で等しくあとの二辺が等しい



AB＝CD

AB∥CD

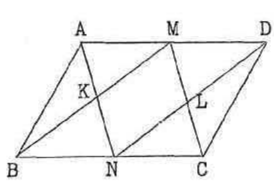
AC＝BD

＜64＞ 調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」に対する生徒 B_4 の応答の考察

- 2 は2つの条件を1つの条件と考えている。
- 4 は式と図形が一致していない。
- 数学の習慣によらないで，記号をつける。
- 平行の表示がない。
- 平行四辺形の条件を理解していることが調査問題(10)にも表にも表われている。

（4） 生徒 B_5 に対する調査結果の考察

＜65＞ 調査問題（1）に対する生徒 B_5 の応答



仮 定

AM＝BN＝MD＝NC

□ABCD＝平行四辺形

証 明

AM∥NC

AM＝NC

∴ □ANCM＝平行四辺形

BM∥ND　　BN＝MD

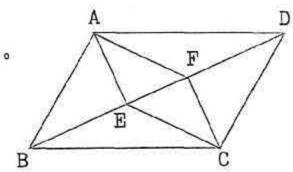
結 論

∴ □KNLM＝平行四辺形

＜66＞ 調査問題（1）に対する生徒 B_5 の応答の考察

- 仮定，結論，証明と3段階に分けて論証することが身についていない。
- 平行四辺形ANCMの証明はマッスグナミチの証明である。
- BM∥NDは証明する必要がある。
- 平行四辺形KNLMの証明は不当帰結の誤りをおかしている。前にかかげてある前提からはこのような結論はでない。

＜67＞ 調査問題（3）に対する生徒 B_5 の応答



仮 定

∠AEF＝∠CFE＝90°

証 明

AE∥FC

∠CEF＝∠AFE

∴ ∠AEC＝∠AFC

∴ ∠EAF＝∠FCE

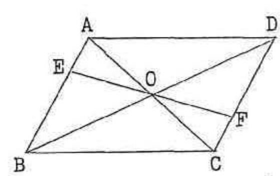
結 論

∴ □AECFは平行四辺形

＜68＞ 調査問題（3）に対する生徒 B_5 の応答の考察

- AE∥FC，∠CEF＝∠AFE は証明しない誤りである。
- したがって ∠AEC＝∠AFC は不当帰結の誤りである。
- ∠EAF＝∠FCE は証明しない誤りである。

＜69＞ 調査問題（5）に対する生徒 B_5 の応答



仮 定

□ABCDは平行四辺形

AO＝CO　DO＝BO

証 明

AO＝CO

BO＝DO　　∠AOD＝∠BOC

∴ △AOD≡△OBC

∠EAO＝∠OCF

∠AOE＝∠FOC

∴ △AEO≡△OCF

∴ EO＝OF

結 論

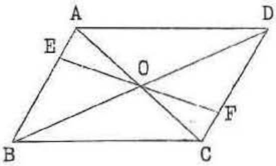
Oは線分EFの中点

<70> 調査問題（5）に対する生徒B_5の応答の考察

- △AOD≡△OBC　の立言は正しい前提よりなされているが，この立言が証明過程の全体からみて，どういう意味をもっているのかわからない。
- △AEO≡△OCF　の前提は条件が1つ足りない。しかし生徒B_5がAO=CO　の前項の式まで含めて考えていたとすれば正答になる。

（5）生徒B_6に対する調査結果の考察

<71> 調査問題（5）に対する生徒B_6の応答



AD∥BC	△AOEと△OCFは合同
AB∥DC	△OEBと△ODFは合同
BO=OD	△ACDと△OBCは合同
AO=OC	
EO=OF	
AD=BC=EF	

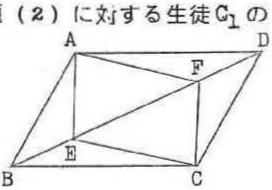
AOとBDの交わった所はEFの中点にあたる。

<72> 調査問題（5）に対する生徒B_6の応答の考察

- 生徒B_6はやさしい図形の論証も困難のようである。

（6）生徒C_1に対する調査結果の考察

<73> 調査問題（2）に対する生徒C_1の応答



仮　定

BE=DF

けつろん

AECFは平行四辺形

証　明

△AEF≡△CFE

AE=FC

AF=EC

EF=共通

∴ 平行四辺形AECFである

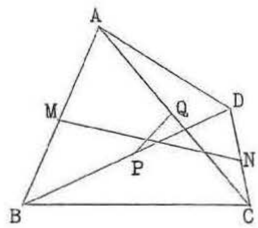
<74> 調査問題（2）に対する生徒C_1の応答の考察

- 条件分析をおこなわずに，直観的思考によって，△AEF≡△CFEであればよいと考えたと思われる。「EF=共通」と書いてあることから，「AE=FC，AF=EC」は，2つの三角形合同の条件と考えたようでもあり，また，2つの三角形の合同であることから生じた帰結であると考えたようでもあって，この応答だけでは，それがはっきりしない。直観的思考と論理的思考が混在している。

<75> 調査問題（4）に対する生徒C_1の応答

AM=BM

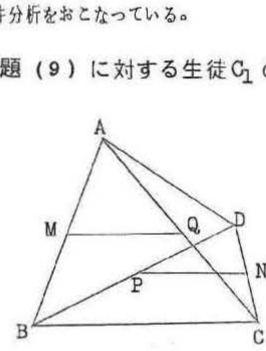
DN=CN



<76> 調査問題（4）に対する生徒C_1の応答の考察

- この調査問題(4)は，10この調査問題の中で，1番むずかしい問題であって，92名の子どもの中では，正答者は3名にすぎなかった。
- このような複雑な問題になると，子どもは，条件分析も目標分析もおこなわず，考える意志が初めからないようである。調査問題(9)は，この問題の基礎になる問題であって，条件は同様であるが，そこでは正しく条件分析をおこなっている。

<77> 調査問題（9）に対する生徒C_1の応答



〔仮　定〕

AM=MB

DN=NC

AQ=QC

BP=PD

〔結　論〕

MQ∥PN

〔証　明〕

AM=MB

DN=NC

AQ＝QC

DP＝PB

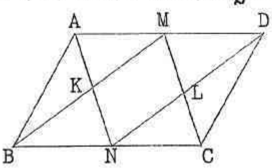
∴ MQ∥PN

＜78＞ 調査問題（9）に対する生徒C_1の応答の考察

- 仮定は正しく書いているが，結論の1つである，MQ＝PNを忘れている。問題の文章の読みが不足である。
- 証明では，単に条件を，られつしたにすぎない。この問題もむずかしいので正答者は，92名中，26名にすぎなかった。

（7） 生徒C_2に対する調査結果の考察

＜79＞ 調査問題（1）に対する生徒C_2の応答



AB∥DC

AM＝MD

BN＝NC

∴ △ABMと△DNC－平行

△ABNと△MDC－平行

△ABNと△MCD－平行

∴ △AKNとKBNと△MLDと△LNCは等しい

∴ 四角形KNLMは

KN∥ML

MK∥NL

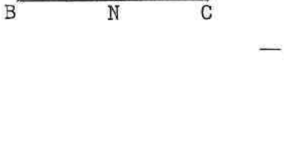
∠Mと∠Nは等しく又∠Kと∠Lとが等しいので

∴ 四角形KNLMは平行四辺形である。

＜80＞ 調査問題（1）に対する生徒C_2の応答の考察

- 「平行」とは，2つの三角形の各辺が平行であることを意味しているように思われる。
- 「等しい」とは，合同のことであろう。
- 四辺形KNLMにおいて，KN∥ML，MK∥NLなら，確かに，その四辺形は平行四辺形である。その場合は，∠M＝∠N，∠K＝∠Lの条件は必要でない。
- この応答は，証明の意図を推測することができるが，ただ，用語や記号の意味のとらえ方，使い方に疑問がある。

＜81＞ 調査問題（6）に対する生徒C_2の応答



AB∥DCである

AM＝NC

MD＝BN

MB，DN → 平行

∴ △ABMと△DNC

は等しい

∴ 四角形MBNDは平行四辺形

＜82＞ 調査問題（6）に対する生徒C_2の応答の考察

- 図形を直観して，単に思いおこしたことを書きつづったように思われる。
- 証明の筋道がとおっていない。

（8） 生徒C_3に対する調査結果の考察

＜83＞ 調査問題（1）に対する生徒C_3の応答

仮 定

AD∥BC

AB∥DC

AM＝DM

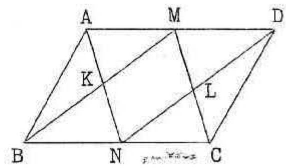
BN＝CN

AK＝NK

BK＝MK

DL＝NL

ML＝CL



結 論

KNLM＝平行四辺形

証 明

平行四辺形KNLMにおいて

MB＝DN

AN＝MC

∴ MK＝LN

ML＝KN

∴ KNLMは平行四辺形

＜84＞ 調査問題（1）に対する生徒C_3の応答の考察

- 仮定のAK＝NK以下の等式は直観的思考に基づいているものと思われる。
- 証明においても，直観的思考によって等式を決定し，2組の対辺相等の条件によって，平行四辺形であることを立言している。

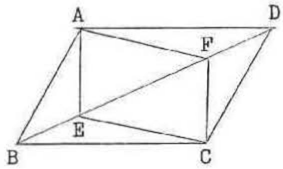
＜85＞ 調査問題（2）に対する生徒C_3の応答

仮　定

AB∥CD

AD∥BC

BE=DF



結　論

AECF=平行四辺形

証　明

平行四辺形AECFにおいて

△ABE=△DCF

△ADF=△BCE

AE=FC

AF=EC

∴ ∠EAF=∠ECF

∠AEC=∠AFC

したがってAECFは平行四辺形

<86> 調査問題（2）に対する生徒C_3の応答の考察

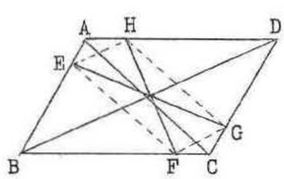
- 2つの三角形の合同も，2つの対角の相等も直観的思考によって立言されている。
- 2組の対辺相等ならその四辺形は平行四辺形であるのに，さらに，2組の対角相等であることまで立言して，結論を導いている。
- この応答は，証明の筋道がとおっている。

<87> 調査問題（10）に対する生徒C_3の応答

〔仮　定〕

GO=EO

HO=FO



〔結　論〕

HG∥EF

HE∥GF

〔証　明〕

△OHE≡△OFG

∵ OH=OF
OE=OG
∠GOF=∠EOH

∴ HE∥GF

HG∥EF

<88> 調査問題（10）に対する生徒C_3の応答の考察

- 仮定のGO=EO，HO=FOは直観的思考によったものであり，この等式が成立すれば，問題はすでに解けていることになる。
- 2組の対辺平行の条件によって解決しようと考えている。
- 証明においては，2つの三角形の合同で，不当仮定の誤りをおかしている。
- また，2つの三角形が合同でも，HE∥GF，HG∥EFの平行式が成立するためには，何らかの理由がなければならないが，それが省略されている。

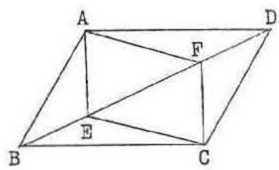
(9) 生徒D_1に対する調査結果の考察

<89> 調査問題（2）に対する生徒D_1の応答

AB∥DC

AD∥BC

△ABD=△BCD



対角線は他を二等分するのでAD∥BC，

AB∥DCは二等分され，△ABD=△BCDとなる。

<90> 調査問題（2）に対する生徒D_1の応答の考察

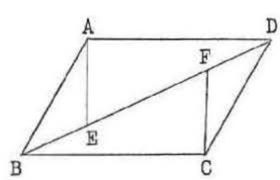
- 生徒D_1は，このように複雑な問題の推論をおこなえるようには思われない。

<91> 調査問題（7）に対する生徒D_1の応答

仮　定

BE=DF

AE=FC



結　論

AB=DC

AD=BC

BDは共通

証　明

対角線BD上に垂線を立てると

BE=DF　∠BEAは∠DFC=∠R

AE=FC

△ABD=△BCD

∴ AE=FC

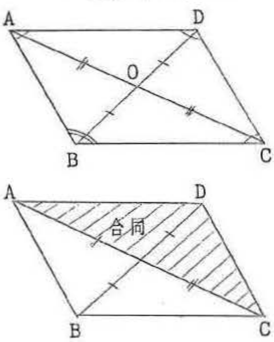
AE∥FC

<92> 調査問題（7）に対する生徒D_1の応答の考察

- AE＝FC　は結論であり，AB＝DC，AD＝BCなどは仮定である。生徒D_1は仮定，結論の意味がわかっていないようであり，したがって，問題を仮定と結論に分析することも困難なようである。
- 2つの三角形の合同の推論も困難なようである。
- △ABD＝△BCDと，AE＝FC，AE∥FCとはどのような理由と帰結の関係があるのか明らかでない。したがって，生徒D_1にとっては，理由と帰結の関係の認識が可能であるかどうか疑問である。

<93> 調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」に対する生徒D_1の応答

1. 対辺が平行で，長さが等しい
2. 対角線は他を二等分して三角形を作る，この三角形は合同である
3. 対角の和が等しい



式

AD∥BC　AB∥DC

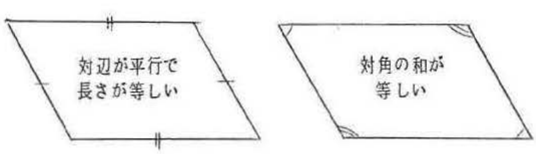
AD＝BC　AB＝DC

△ABC≡ADC

△ABD≡BCD

∠ABC＝∠ADC

∠BAD＝∠BCD



<94> 調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」に対する生徒D_1の応答の考察

- 5つの条件が分類され，整理されていない。
- 平行四辺形の条件に関する知識やその他の既有知識，つまり，命題や図形や，式が雑然とられつされてある。言い替えれば平行四辺形の条件の知識が体制化されていない。

（10）　生徒D_2に対する調査結果の考察

<95> 調査問題（5）に対する生徒D_2の応答

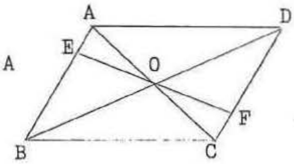
仮定

AD＝BC

∠BOC＝∠DOA

結論

AB＝DC



証明

DO，BOを結ぶ

△EBO＝△FDO

は共通で

∠BOC＝∠DOA

∴　AB＝DC

<96> 調査問題（5）に対する生徒D_2の応答の考察

- 仮定は，図形を見て直観的思考によって思いつくままをられつしているようである。
- 結論もまた同様であって，仮定，結論の意味がわかっていないように思われる。
- 証明過程は，ただ何かの関連によって思いおこしたことをられつしているにすぎない。筋道のとおった思考をすすめているとは思われない。
- 生徒D_2は，論理的な推論が可能であるかどうか疑わしい。

<97> 調査問題（7）に対する生徒D_2の応答

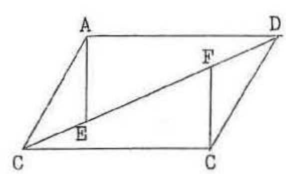
仮定

AD＝BC

△ABE＝△CDF

結論

AE＝FC



証明

BとDを結ぶ

△ABEと△CDF

は共通

AとE　FとC

を結ぶ

△ABDと△CDB

∴　AE＝FC

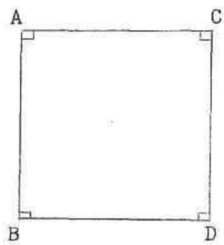
<９８> 調査問題（７）に対する生徒D_2の応答

- 仮定に，定式変えされた補助問題，つまり△ＡＢＥ≡△ＣＤＦを書いておく。この問題は，ＡＥ＝ＦＣを証明するために，基本問題（もとの問題，つまり課題）を定式変えして，△ＡＢＥ≡△ＣＤＦを証明する問題に置き替えるわけであるが，この補助問題（基本問題を定式変えした問題）の目標（△ＡＢＥ≡△ＣＤＦ）を仮定に書いている。仮定には何を書けばよいのかわかっていない。
- 証明においても，証明しようとしている筋道がとおっていない。ただ思いおこしたことをられつしているにすぎない。

<９９> 調査問題『平行四辺形の条件に関する問題』に対する生徒D_2の応答

1. 角がみな等しい

図



式　ＡＢ＝ＣＤ
　　ＡＣ＝ＢＤ

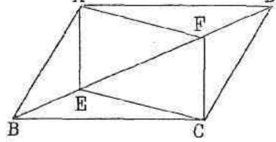
<100> 調査問題『平行四辺形の条件に関する問題』に対する生徒D_2の応答の考察

- ここには例として１つの図形だけをかかげた。応答には４つの図形がかかれてあるがすべて，正方形であった。
- また，それらは，この例のように，すべて文章と図形と式とが一致していない。

（１１）　生徒D_3に対する調査結果の考察

<101> 調査問題（２）に対する生徒D_3の応答

ＡＢ＝ＤＣ
ＡＤ＝ＢＣ
∴　Ｅ＝Ｆ
∴　ＡＥ＝ＦＣ
∴　ＡＦ＝ＥＣ

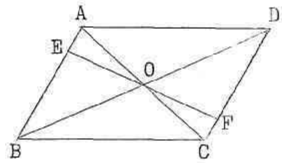


<102> 調査問題（２）に対する生徒D_3の応答の考察

- 仮定，結論，証明と３段階に分けて考えていない。
- 初めから終わりまで，直観的思考によって解決を試みているようにも思われる。
- ＡＥ＝ＦＣ，ＡＦ＝ＥＣであれば四辺形ＡＥＣＦは平行四辺形であることがわかっているようにも思われる。

<103> 調査問題（５）に対する生徒D_3の応答

ＡＢ＝ＤＣ
ＡＤ＝ＢＣ
△ＡＤＯ＝△ＢＣＯ
△ＡＢＯ＝△ＤＣＯ
△ＡＯＥ＝△ＣＦＯ

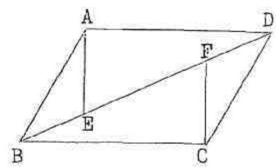


<104> 調査問題（５）に対する生徒D_3の応答の考察

- 図形の構造を直観的に判断して，可能と思われる部分，部分の関係を等式で表わしているにすぎない。
- 図形の論証問題に対して論理的思考ができるのかどうか疑問である。

<105> 調査問題（７）に対する生徒D_3の応答

ＡＢ＝ＤＣ
ＡＤ＝ＢＣ
だから　ＢＥ＝ＦＤ
　　　　ＡＥ＝ＦＣ
△ＡＢＥ＝△ＦＤＣ
△ＡＥＢ＝△ＦＣＢ

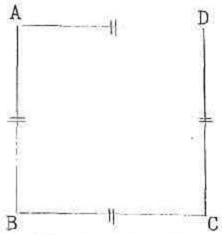


<106> 調査問題（７）に対する生徒D_3の応答の考察

- 仮定，結論，証明と３段階に分けて書いていない。
- 仮定と思われるところは，ＡＢ＝ＤＣ，ＡＤ＝ＢＣと平行四辺形の２組の対辺相等の条件を書いている。
- 図形から三角形を抽象して，直観的思考によって合同と思われるものを２つ，等号で結んでいる。
- 筋道をたてて考えているとは，思われない。

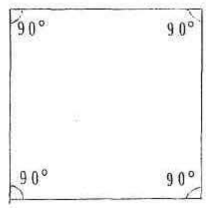
<107> 調査問題『平行四辺形の条件に関する問題』に対する生徒D_3の応答

1. 四辺が等しい。

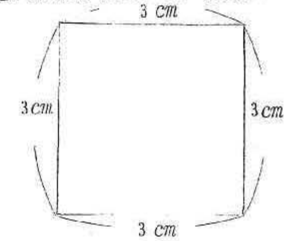


式　AB∥DC
　　AD∥BC

2. 四角形の角はみんな９０度である。



3. １辺が3cmだと，のこっている辺も3cmである。



＜１０８＞　調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」に対する生徒 D_3 の応答の考察

・ 劣る子どもの中には，四角形というコトバと，正方形の図形がかたく結びついていることがある。生徒 D_3 もそのひとりである。

6　ペーパー・テストによる調査結果のまとめ
── 学業成績の劣る子どもの思考の特徴 ──

(1) 問題の読みが足りない　　＜７８＞。

(2) 数学的用語，記号がわからない　　＜８０＞，＜９２＞，＜９６＞，＜９８＞。

(3) 命題と図形と式が一致しない。また知識が雑然としていて体制化されていない
＜９４＞，＜１００＞，＜１０８＞。

(4) 問題が複雑すぎると初めから考える意志がないようである　　＜７６＞。

(5) 問題を仮定，結論，証明と３段階に分けて考える態度が身についていない　　＜９０＞。

(6) 条件分析が困難で，単に思いおこしたことをられつしている　　＜９６＞，＜９８＞。

(7) 初めから終わりまで直観的思考によっているもの　　＜８６＞，＜１０２＞，＜１０４＞，＜１０６＞。
初めは直観的に，終わりは論理的思考によるもの　　＜８４＞，＜８８＞。
直観的思考と論理的思考が混在しているもの　　＜９２＞。

(8) 思いついたことをられつしてあるだけで，論証の意図も筋道もわからないもの
＜７８＞，＜８２＞，＜９６＞，＜９８＞。
論証の意図や筋道のわかるもの　　＜８０＞，＜８６＞。

(9) 条件過剰の証明をおこなっているもの　　＜８６＞。

(10) 結論だけ正しく書いているもの　　＜９８＞。

(11) ２つの三角形の合同の推論も困難のもの　　＜９２＞。

Ⅲ　実験的学習指導の概要

この研究は第１次５か年研究の継続としておこなうものである。したがって第１次５か年研究の結論として紀要第４３集にかかげた思考力を伸ばす学習指導の５つの原則によって本研究の実験的学習指導はおこなわれる。また本研究は図形の論証を取り扱うので紀要第４３集にかかげた　論証の段階　によっても実験的学習指導をおこなう。この５つの原則もこの論証の段階も一般的な原則であるので当然，学業成績の劣る子どもの指導にも適用されると考えるからである。ところで第一章でも述べたとおり，

学業成績のすぐれた子どもにも，劣る子どもにも一般的に適用されると考えられる学習指導の原則を，特に学業成績の劣る子どもの学習指導として具体化するには，なおいっそうきめの細かい配慮が必要なことと思われる。したがって，学業成績の劣る子どもの思考の実態を調査し，その特徴をとらえ，その様態をふまえて，学業成績の劣る子どもの学習指導については，次にかかげることがらを，学業成績のすぐれた子どもに比べていっそう重視しなければならないであろうと考えた。

1　研究仮説

(1)　話しコトバを重視する。

論証の段階を，思考の段階，話しコトバの段階，書きコトバの段階と3つに分けることができるが，学業成績の劣る子どもの論証の学習指導は，この話しコトバの段階を特に重要視する必要があると考える。学業成績の劣る子どもは，わかっていることや考えていることを正しく話せない。話すことは書くことより一般的には容易である。問題の解法を考えて，次に直ちに書き始めることは1つの段階をとびこえることになる。わかっていることや考えていることを話すことによっていっそうのことが明らかになる。話すことによって明らかになった考えを記述させる。記述したことをまた説明させる。記述したことを説明することによって記述の不備もわかってくる。説明の機会や回数を多くすることは，知識の習得においても，知識を適用する場合においても学業成績の劣る子どもの学習指導にはたいそうたいせつなことと考える。

(2)　話しコトバと書きコトバと図形と式が一体になるように指導する。

数学的概念や法則，数学の問題は，できるかぎり，話しコトバと書きコトバと図形と式の4つの方法で表わせるように指導すると同時に，その4つのものは表現形式は違っても同じ意味を表わしていることを理解させる。

たとえば，2角夾辺相等の2つの三角形合同の条件は，話しコトバでも書きコトバでも表現できるように指導する。また，その法則を図形でかかれるように指導する。つまり合同の2つの三角形をかき，その図形に2角夾辺等の記号を記入できるように指導する。またその図形から等式を書かれるように<38>，<39>，またその逆に，その図形や式の意味を，文章を見ないで説明できるように指導する。ただこの逆の説明は，いくらかの助言を必要とすることが多い。

このようにして，4つのものが同じ意味のものであることがわかり，同じ意味のことを4つの方法で表わさせることによって，概念や法則を深く，正しく理解させることができると考える。

このような指導には，のちに説明する特定のカードを作らせ，これを利用させることも効果的な方法であろう。

(3)　作図を重視する。

学業成績の劣る子どもは，問題の文章を深く読んで，図形を論理的に考察しようとしない。強化された過去の経験によって図形を考察している。このように問題の内容と図形に密接な関連がない。また，学業成績の劣る子どもは問題の文章を読んでも，数学用語がわからなかったり，コトバは知っていても内容をもたなかったり，概念を誤って理解したりしていることが多いこともあって，文章の読解力も低

い。

図形の論証の対象となるものは図形であるから，問題や概念や法則をできるかぎり作図させることによって，問題や概念，法則が明らかになると思われる。また文章の読解力も高まり，コトバと図形も一体になると考える。

図形は定規やコンパスを使って正確にかかせ，性質や関係なども細かく記入させる。また，図形の性質や関係の式を見て，その図形もかかれるようにする。

(4) 表現技能を身につけさせる。

作図も技能的な側面はあるが，ここでは，数学的記号や式や文章による表現をさす。わかっていることでも式で書かれなかったり，書かれても数学の習慣によらなかったりする。図形を見て，その図形の性質や関係を式や文章で書かれない。小学校における文章題の解決には計算技能の習熟が重要であるように，図形の論証においては，数学的記号や式や文章による表現の技能的な側面を身につけさせることが，論理的思考を容易にするために重要と思われる。特に学業成績の劣る子どもは，この表現技能が身についていないので，思考が問題解決の中核にまですすまないことが多いのである。

(5) 重要なことを書き留めさせる。

問題解決における目標分析や条件分析は，最初は，見とおしをもったものでなく，単なる分析をおこなわせ，その結果を書き留めさせておき，次に，その書き留めたものから，見とおしをもって求められる条件を選択させる。このようにして分析させると，分析的操作や条件選択が容易になると考える。

操作をおこなっているうちに，操作の目標を忘れることが多いので，忘れないようにその目標をはっきりと書き留めさせる。そして絶えずふり返りながら論証をすすめることによって，可逆的思考を伸ばすようにする。

直観的思考や過去経験によって，成立する理由のわからない式や結論を書くことが多いので，式や結論には，その成立する理由を書かせる。この理由を書くことによって，その理由を考えなければならない。また書くことによって理由もいっそう明らかになる。直観的思考の結果も説明しなければならないことになる。単なる過去経験によって書かれた式は，その式の存在や成立する理由を考えなければならないことによって，問題と関係のないことをさとり，すてさられるであろう。

このようにして，重要なことを書き留めさせることは，筋道をとおして考えることの助けになるものと思われる。

(6) 思考の切り替えの訓練をすること。

学業成績の劣る子どもは，思考の切り替えが困難である。1つの観点によってだけ問題解決を考えている。これらは他の観点を知らないこともその理由と思われるので，いろいろの観点を身につけさせながら，観点の切り替えの学習を積み重ねることが重要と思う。この観点変更，つまり思考の切り替えの学習は，特定のカードを使用させることも，効果的な1つの方法であろうと考える。このカードを見ながら，問題の条件分析や目標分析をおこなって，数学的な観点を決定させる学習を繰り返すことがたいせつであろう。

思考の切り替えには，観点の変更とともに，数学的方法の切り替えも考えられる。

学業成績の劣る子どもは，数学的方法の切り替えは，いっそう困難と思われる。この数学的方法の切り替えの指導の前提となるものは，観点変更の指導のときと同じように，劣る子どもに，いくらかの数学的方法が身についていることである。この数学的方法の切り替えの指導法の１つとして次のことが考えられる。それは，１つの問題における２つの解決の方法を，比較させ，説明させることによって，それらの操作を一般的抽象的に，説明できるように指導することであろう。

(7) 明確な目標をもった繰り返しを重視する

学業成績の劣る子どもは，理解がおそく，思考もかたいと思われるので，指導の繰り返しが重要であると考える。しかもその繰り返しは，回数も機会も多くなければならないであろうが，教師は，繰り返しの目標を明らかにつかみ，その目標に到達できるように方法をくふうしなければならないと思う。

繰り返しには次の４つの目標が考えられる。

知識を理解させ定着させるための繰り返し。

知識を抽象化，一般化させるための繰り返し。

表現技能を身につけさせるための繰り返し。

数学的観点や方法を身につけさせるための繰り返し。

学業成績の劣る子どもの思考力を高めるために７つの研究仮説をかかげたが，この研究仮説によって実際に指導する場合，特定のカードを使用することがある。この特定のカードは厚紙で作り，表に法則やその法則の意味する式を書き，裏にはその図形をかき，カードの形もその内容にふさわしいものにする。たとえば，三角形の合同の条件を書いたカードは三角形に切り，平行四辺形の条件のカードは平行四辺形にする。なお三角形合同の条件の３枚のカードは三角形の袋に入れ，平行四辺形の条件の５枚のカードは平行四辺形の袋に入れる。平行二直線の条件のカードや袋は長方形にする。また，カードを入れた袋はまとめて大きな袋に入れて保管や携帯に便利にする。このカードや袋は子どもに作らせることが重要である。

このカードの内容は無理に記憶させる必要はなく，表の文章を見て裏の図形をかかれるように，また裏の図形だけでその意味を説明できるように習熟させる。このようにして，話しコトバと書きコトバと図形と式の一体化を図ることによって知識の理解を深めることができると思う。また，カードや袋をしじゅう使用させることは，それらに対する直観や具体的操作の繰り返しになるので知識の体制化にも役だつと思われる。また，カードや袋を並べてその中から条件を選択させることは，比較的容易のように考えられるので，思考の切り替えや条件の選択が困難である彼らの思考の柔軟性を高めるにも役だつと考える。

2　対象の子ども

中学校３年生の学業成績の劣る子ども６人，

子どもの氏名　D_1，D_2，D_3，C_1，C_2，C_3

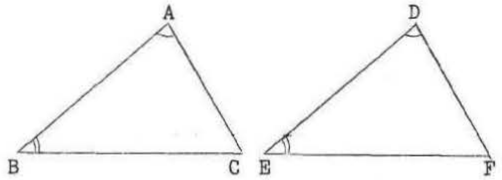
3　教　材

中学校２年生程度の図形教材一教材　(1)，(2)，(3)，(4)，(5)，(6)，(7)，(8)，(9)，(10)，ただし，教材(1)は調査問題(1)と，教材(2)は調査問題(2)と同じ問題である。以下教材(10)まで同

様である。

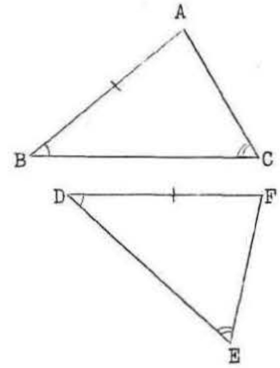
教材⑾から㉕までは，実験的学習指導の記録にかかげるが，ここでは，条件を記入した図形とその問題の結論をかかげることにする。

⑾



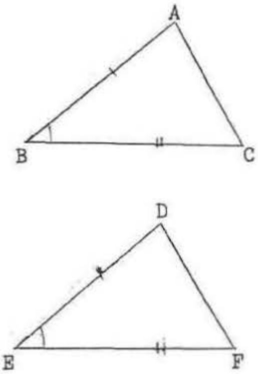
結論　∠C＝∠F

⑿



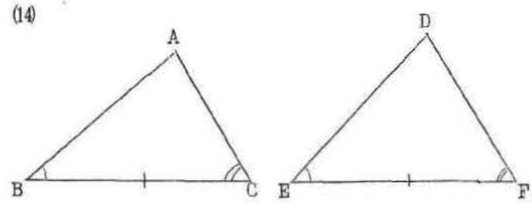
結論　△ABC≡△DEF

⒀



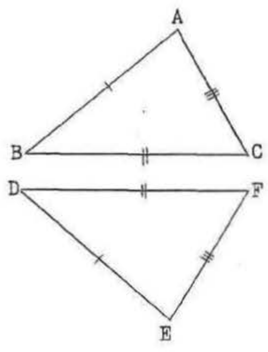
結論　△ABC≡△DEF

⒁



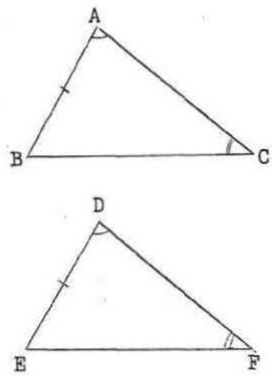
結論　△ABC≡△DEF

⒂



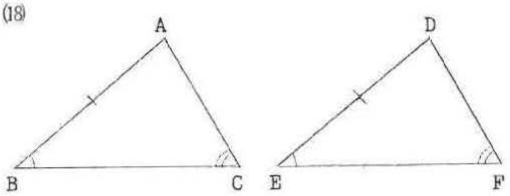
結論　△ABC≡△DEF

⒄



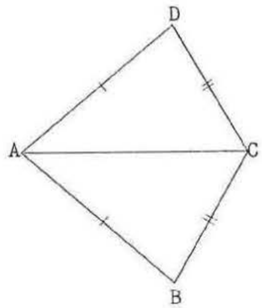
結論　△ABC≡△DEF

(18)



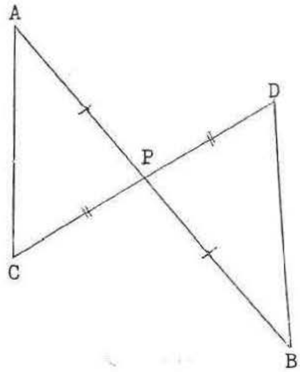
結論　△ABC≡△DEF

(19)



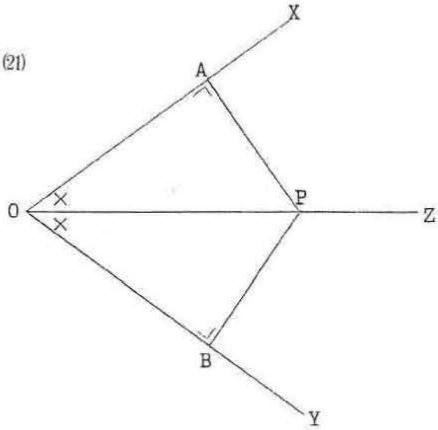
結論　∠EAC＝∠DAC

(20)



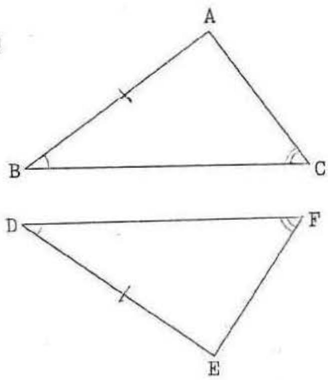
結論　AC＝BD

(21)



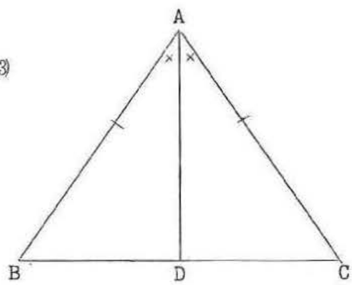
結論　PA＝PD

(22)



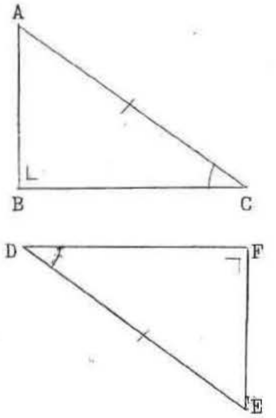
結論　△ABC≡△DEF

(23)



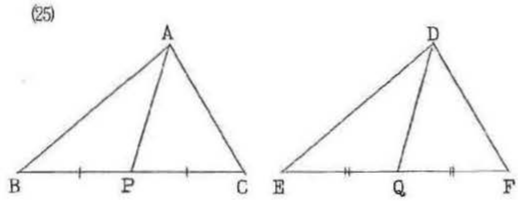
結論　BD＝DC
BC⊥AD

(24)



結論　　△ABC≡△DEF

(25)



（仮定　△ABC≡△DEF）

結　論　　AP＝DQ

4　実験的学習指導の方法

1回に1名を，放課後約1時間30分，計4回ほど，実験的に学習指導をおこない記録をとる。

5　実験的学習指導の概要

(1)　生徒 D_1 の実験的学習指導の概要

(イ)　第1回　　12月26日13時から15時まで。
教材(11)，(12)，(13)，(14)，(15)，(17)

(ロ)　第2回　　12月28日13時20分から15時15分まで。
教材(11)，(13)，(14)，(18)，(5)，(7)

(ハ)　第3回　　1月6日13時から15時45分まで。
教材(5)，(7)

(2)　生徒 D_2 の実験的学習指導の概要

(イ)　第1回　　12月16日16時から17時まで。
平行四辺形の条件，三角形合同の条件，角の名称

(ロ)　第2回　　12月17日16時から17時まで。
前日の復習，教材(5)

(ハ)　第3回　　12月18日16時から17時まで。
教材(19)，(20)，(21)

(ニ)　第4回　　12月24日13時30分から15時まで。
教材(22)，(23)，(24)

(ホ)　第5回　　12月25日13時30分から15時まで。
教材(11)，(25)，(7)，(8)

(3)　生徒 D_3 の実験的学習指導の概要

(イ)　第1回　　11月17日13時から15時まで。

二角形合同の条件，平行四辺形の条件，平行線の条件

教材(5)，(6)

(ロ) 第２回　１１月１８日１６時から１７時まで。

教材(7)，(8)

(ハ) 第３回　１２月１日１６時から１７時２０分まで。

教材(2)，(3)，(5)，(6)

(ニ) 第４回　１２月３日１６時から１７時２０分まで。

教材(2)，(5)，(6)

(4) 生徒 C_1 の実験的学習指導の概要

(イ) 第１回　１１月１３日１６時から１７時１５分まで。

平行四辺形の条件，三角合同の条件，平行線の条件

教材(5)，(6)

(ロ) 第２回　１１月１４日１３時４０分から１５時まで。

教材(7)，(8)，(9)，(10)，(1)

(ハ) 第３回　１１月１６日１６時から１７時まで。

教材(2)，(3)，(4)

教材(7)，(8)，(2)，(3)，を宿題とする。

(ニ) 第４回　１１月２６日１６時から１７時まで。

教材(6)，(1)，(ニ)，(9)，(4)

(5) 生徒 C_2 の実験的学習指導の概要

(イ) 第１回　１１月２３日９時３０分から１１時まで。

平行四辺形の条件，三角形合同の条件，平行線の条件

教材(5)，(6)，(7)，(8)

(ロ) 第２回　１１月３０日１６時から１７時２０分まで。

教材(2)，(1)

(ハ) 第３回　１２月２日１６時２０分から１７時３０分まで。

教材(5)，(6)，(7)，(8)

(6) 生徒 C_3 の実験的学習指導の概要

(イ) 第１回　１１月２２日１３時３０分から１５時まで。

教材(5)，(6)，(7)，(8)，(9)

(ロ) 第２回　１１月２５日１６時から１７時２０分まで。

教材(8)，(9)，(10)，(2)

(ハ) 第３回　１２月５日１３時から１４時３０分まで。

教材(3)，(1)，(10)

6　実験的学習指導の記録の一覧表

(1)　生徒 D_1 の実験的学習指導の記録一覧表

(イ)　生徒 D_1 の第１回の実験的学習指導の記録の一覧表

<109>　教材(11)

<110>　教材(11)に対する生徒 D_1 の指導前の応答

<111>　教材(11)に対する生徒 D_1 の指導前の応答の考察

<112>　教材(11)に対する生徒 D_1 の指導による応答

<113>　教材(11)に対する生徒 D_1 の指導による応答の考察

<114>　教材(12)

<115>　教材(12)に対する生徒 D_1 の指導前の応答

<116>　教材(12)に対する生徒 D_1 の指導前の応答の考察

<117>　教材(13)

<118>　教材(13)に対する生徒 D_1 の指導前の応答

<119>　教材(13)に対する生徒 D_1 の指導による応答

<120>　教材(13)に対する生徒 D_1 の指導による応答の考察とその指導

<121>　教材(14)

<122>　教材(14)に対する生徒 D_1 の指導前の応答

<123>　教材(14)に対する生徒 D_1 の指導前の応答の考察

<124>　教材(15)

<125>　教材(15)に対する生徒 D_1 の指導前の応答

<126>　教材(15)に対する生徒 D_1 の指導前の応答の考察

<127>　教材(13)

<128>　教材(13)に対する生徒 D_1 の指導による応答

<129>　教材(13)に対する生徒 D_1 の指導による応答の考察

<130>　教材(17)

<131>　教材(17)に対する生徒 D_1 の指導前の応答

<132>　教材(17)に対する生徒 D_1 の指導前の応答とその後の指導

<133>　教材(17)に対する生徒 D_1 の指導後の応答

<134>　教材(17)に対する生徒 D_1 の指導後の応答の考察と指導

<135>　教材(17)に対する生徒 D_1 の再び指導した後の応答

(ロ)　生徒 D_1 の第２回の実験的学習指導の記録の一覧表

<136>　教材(11)，(13)，(14)に対する生徒 D_1 の応答と考察

<137>　教材(18)

<138>　教材(18)に対する生徒 D_1 の指導前の応答

<139>　教材(18)に対する生徒 D_1 の指導前の応答の考察とその後の指導

<140>　教材(18)に対する生徒 D_1 の指導後の応答

<141>　教材⒅に対する生徒 D_1 の指導後の応答の考察とその後の指導

<142>　教材⒅に対する生徒 D_1 の，再び指導した後の応答

<143>　教材⒅は対する生徒 D_1 の，再び指導した後の応答の考察とその指導

<144>　教材⒅に対する生徒 D_1 の，3たび指導した後の応答

<145>　教材(5)に対する生徒 D_1 の指導前の応答

<146>　教材(5)に対する生徒 D_1 の指導前の応答の考察とその指導

<147>　教材(5)に対する生徒 D_1 の指導後の応答

<148>　教材(5)に対する生徒 D_1 の指導後の応答の考察

<149>　教材(7)に対する生徒 D_1 の指導前の応答

<150>　教材(7)に対する生徒 D_1 の指導前の応答の考察とその後の指導

<151>　教材(7)に対する生徒 D_1 の指導後の応答

(ハ) 生徒 D_1 の第3回の実験的学習指導の記録の一覧表

<152>　教材(5)に対する生徒 D_1 の指導前の応答

<153>　教材(5)に対する生徒 D_1 の指導前の応答の考察とその指導

<154>　教材(5)に対する生徒 D_1 の指導後の応答

<155>　教材(5)に対する生徒 D_1 の指導後の応答とその指導

<156>　教材(5)に対する生徒 D_1 の，再び指導した後の応答

<157>　教材(5)に対する生徒 D_1 の，再び指導した後の応答の考察とその指導

<158>　教材(5)に対する生徒 D_1 の，3たび指導した後の応答

<159>　教材(7)に対する生徒 D_1 の指導前の応答

<160>　教材(7)に対する生徒 D_1 の指導前の応答の考察とその指導

<161>　教材(7)に対する生徒 D_1 の指導後の応答

(2) 生徒 D_2 の実験的学習指導の記録の一覧表

(イ) 生徒 D_2 の第1回の実験的学習指導の記録の一覧表

<162>　生徒 D_2 に対する平行四辺形の条件などの指導

(ロ) 生徒 D_2 の第2回の実験的学習指導の記録の一覧表

<163>　生徒 D_2 に対する前回の復習

<164>　教材(5)に対する生徒 D_2 の指導前の応答

<165>　教材(5)に対する生徒 D_2 の指導前の応答の考察

<166>　教材(5)に対する生徒 D_2 の指導による応答

<167>　教材(5)に対する生徒 D_2 の応答の指導

(ハ) 生徒 D_2 の第3回の実験的学習指導の記録の一覧表

<168>　教材⒆

<169>　教材⒆に対する生徒 D_2 の指導前の応答

＜１７０＞　教材(19)に対する生徒D$_2$の指導後の応答
＜１７１＞　教材(19)に対する生徒D$_2$を再び指導した後の応答
＜１７２＞　教材(19)に対する生徒D$_2$の応答の考察とその指導
＜１７３＞　教材(20)
＜１７４＞　教材(20)に対する生徒D$_2$の指導前の応答
＜１７５＞　教材(20)に対する生徒D$_2$の指導前の応答の考察とその指導
＜１７６＞　教材(21)
＜１７７＞　教材(21)に対する生徒D$_2$の指導前の応答
＜１７８＞　教材(21)に対する生徒D$_2$の指導前の応答の考察とその指導

(ニ) 生徒D$_2$の第４回の実験的学習指導の記録の一覧表

＜１７９＞　教材(22)
＜１８０＞　教材(22)に対する生徒D$_2$の指導前の応答
＜１８１＞　教材(22)に対する生徒D$_2$の指導前の応答の考察とその指導
＜１８２＞　教材(22)に対する生徒D$_2$の指導後の応答
＜１８３＞　教材(22)に対する生徒D$_2$の指導後の応答の考察とその指導
＜１８４＞　教材(22)に対する生徒D$_2$の指導による応答
＜１８５＞　教材(23)
＜１８６＞　教材(23)に対する生徒D$_2$の指導による応答
＜１８７＞　教材(23)に対する生徒D$_2$の指導による応答の考察とその指導
＜１８８＞　教材(23)に対する生徒D$_2$の指導後の応答
＜１８９＞　教材(23)に対する生徒D$_2$の指導後の応答の考察とその指導
＜１９０＞　教材(24)
＜１９１＞　教材(24)に対する生徒D$_2$の指導前の応答
＜１９２＞　教材(24)に対する生徒D$_2$の指導前の応答の考察とその後の指導
＜１９３＞　教材(24)に対する生徒D$_2$の指導後の応答
＜１９４＞　教材(24)に対する生徒D$_2$の指導後の応答の考察とその後の指導
＜１９５＞　教材(24)に対する生徒D$_2$を再び指導した後の応答
＜１９６＞　教材(24)に対する生徒D$_2$を再び指導した後の応答の考察とその後の指導
＜１９７＞　教材(24)に対する生徒D$_2$の指導による応答
＜１９８＞　教材(22)
＜１９９＞　教材(22)に対する生徒D$_2$の指導前の応答
＜２００＞　教材(22)に対する生徒D$_2$の指導前の応答の考察とその後の指導
＜２０１＞　教材(23)に対する生徒D$_2$の応答
＜２０２＞　教材(23)に対する生徒D$_2$の応答の考察

(ホ) 生徒D$_2$の第５回の実験的学習指導の記録の一覧表

＜２０３＞　教材(11)に対する生徒D$_2$の指導前の応答

<204>　教材(11)に対する生徒D_2の指導前の応答の考察とその後の指導

<205>　教材(11)に対する生徒D_2の指導後の応答

<206>　教材(11)に対する生徒D_2の指導後の応答の考察とその後の指導

<207>　教材(11)に対する生徒D_2の再び指導した後の応答

<208>　教材(11)に対する生徒D_2の再び指導した後の応答の考察

<209>　教材(25)

<210>　教材(25)に対する生徒D_2の指導前の応答

<211>　教材(25)に対する生徒D_2の指導前の応答とその後の指導

<212>　教材(25)に対する生徒D_2の指導による応答

<213>　教材(25)に対する生徒D_2の指導後の応答

<214>　教材(25)に対する生徒D_2の指導後の応答の考察

<215>　教材(7)に対する生徒D_2の指導前の応答

<216>　教材(7)に対する生徒D_2の指導

<217>　教材(7)に対する生徒D_2の指導による応答

<218>　教材(8)に対する生徒D_2の指導前の応答

<219>　教材(8)に対する生徒D_2の指導前の応答とその後の指導

<220>　教材(8)に対する生徒D_2の指導による応答

(3) 生徒D_3の実験的学習指導の記録の一覧表

(イ) 生徒D_3の第1回の実験的指導の記録の一覧表

<221>　生徒D_3に対する三角形合同の条件などの指導

<222>　教材(5)に対する生徒D_3の指導による応答

<223>　教材(6)に対する生徒D_3の指導による応答

<224>　教材(5)，(6)に対する生徒D_3の指導

(ロ) 生徒D_3の第2回の実験的学習指導の記録の一覧表

<225>　教材(7)に対する生徒D_3の指導による応答

<226>　教材(7)に対する生徒D_3の指導による応答の考察とその指導

<227>　教材(8)に対する生徒D_3の指導による応答

<228>　教材(8)に対する生徒D_3の指導による応答の考察とその指導

(ハ) 生徒D_3の第3回の実験的学習指導の記録の一覧表

<229>　教材(2)に対する生徒D_3の指導による応答

<230>　教材(2)に対する生徒D_3の指導による応答の考察

<231>　教材(3)に対する生徒D_3の指導による応答

<232>　教材(3)に対する生徒D_3の指導による応答の考察

<233>　教材(5)に対する生徒D_3の指導による応答

<234>　教材(5)に対する生徒D_3の指導による応答の考察

<235>　教材(6)に対する生徒D_3の指導前の応答

<236>　教材(6)に対する生徒D_3の指導による応答

<237>　教材(6)に対する生徒D_3の指導による応答の考察

(ニ) 生徒D_3の第4回の実験的学習指導の記録の一覧表

<238>　教材(2)に対する生徒D_3の指導前の応答

<239>　教材(2)に対する生徒D_3の指導前の応答の考察とその後の指導

<240>　教材(2)に対する生徒D_3の指導による応答

<241>　教材(5)に対する生徒D_3の指導前の応答

<242>　教材(5)に対する生徒D_3の指導前の応答の考察とその指導

<243>　教材(6)に対する生徒D_3の指導前の応答

<244>　教材(6)に対する生徒D_3の指導前の応答の考察

<245>　教材(6)に対する生徒D_3の指導による応答

<246>　教材(6)に対する生徒D_3の指導による応答の考察

(4) 生徒C_1の実験的学習指導の記録の一覧表

(イ) 生徒C_1の第1回の実験的学習指導の記録の一覧表

省略する。

(ロ) 生徒C_1の第2回の実験的学習指導の記録の一覧表

<247>　教材(9)に対する生徒C_1の指導による応答

<248>　教材(9)に対する生徒C_1の指導による応答の考察

<249>　教材(9)に対する生徒C_1の指導による応答

<250>　教材(9)に対する生徒C_1の指導による応答の考察

<251>　教材(10)に対する生徒C_1の指導前の応答の前半

<252>　教材(10)に対する生徒C_1の指導前の応答の考察

(ハ) 生徒C_1の第3回の実験的学習指導の記録の一覧表

<253>　教材(2)に対する生徒C_1の指導による応答

<254>　教材(2)に対する生徒C_1の指導による応答の考察とその指導

<255>　教材(3)に対する生徒C_1の指導による応答

<256>　教材(3)に対する生徒C_1の指導による応答の考察

(ニ) 生徒C_1の第4回の実験的学習指導の記録の一覧表

<257>　教材(ニ)

<258>　教材(ニ)に対する生徒C_1の指導前の応答

<259>　教材(ニ)に対する生徒C_1の指導前の応答の考察

<260>　教材(4)に対する生徒C_1の指導による応答

<261>　教材(4)に対する生徒C_1の指導による応答の考察

(5) 生徒C_2の実験的学習指導の記録の一覧表

(イ) 生徒C_2の第1回の実験的学習指導の記録の一覧表

<262>　教材(8)に対する生徒C_2の指導による応答

<263>　教材(8)に対する生徒C_2の指導による応答の考察

(ロ) 生徒C_2の第2回の実験的学習指導の記録の一覧表

<264>　教材(1)に対する生徒C_2の指導前の応答

<265>　教材(1)に対する生徒C_2の指導前の応答の考察

(ハ) 生徒C_2の第3回の実験的学習指導の記録の一覧表

<266>　教材(5)に対する生徒C_2の指導前の応答

<267>　教材(5)に対する生徒C_2の指導前の応答の考察

<268>　教材(6)に対する生徒C_2の指導前の応答

<269>　教材(6)に対する生徒C_2の指導前の応答の考察

(6) 生徒C_3の実験的学習指導の記録の一覧表

(イ) 生徒C_3の第1回の実験的学習指導の記録の一覧表

省略する。

(ロ) 生徒C_3の第2回の実験的学習指導の記録の一覧表

<270>　教材(9)に対する生徒C_3の指導による応答

<271>　教材(9)に対する生徒C_3の指導による応答の考察

<272>　教材(10)に対する生徒C_3の指導による応答

<273>　教材(10)に対する生徒C_3の指導による応答の考察

<274>　教材(2)に対する生徒C_3の指導による応答

<275>　教材(2)に対する生徒C_3の指導による応答の考察

(ハ) 生徒C_3の第3回の実験的学習指導の記録の一覧表

<276>　教材(3)に対する生徒C_3の指導による応答

<277>　教材(3)に対する生徒C_3の指導による応答の考察

<278>　教材(1)に対する生徒C_3の指導による応答

<279>　教材(1)に対する生徒C_3の指導による応答の考察

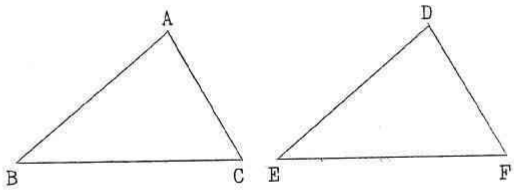
7　実験的学習指導の記録

(1)　生徒D_1の実験的学習指導の記録

(イ)　生徒D_1の第1回の実験的学習指導の記録

<109>　教材（11）

下の図で，∠A=∠D，∠B=∠Eであると，∠C=∠Fであることを証明せよ。



<110>　教材（11）に対する生徒D_1の指導前の応答

（仮　定）
∠A=∠D
∠B=∠E
∠C=∠F
（結　　）
∠A=∠D
∠B=∠E
∠C=∠F
（証　明）
△ABCと△DEFにおいて
三角形の合同条件から
一辺とその両たんの角が等しいので
∠B=∠E
∠A=∠D
∠C=∠F　　となる。
三辺が等しいことから
AB=DE
AC=DF
BC=EF　　となる。

<111>　教材（11）に対する生徒D_1の指導前の応答の考察

- 生徒D_1は仮定，結論の意味がわかっていない。
- 単純な問題においても論証の推論ができない。
- したがって，指導しながら次のように証明をおこなわせる。

<112>　教材（11）に対する生徒D_1の指導による応答

〔仮　定〕（わかっていること）
∠A=∠D
∠B=∠E
〔結ろん〕（証明すること）
∠C=∠F
証　明
∠A+∠B+∠C=180°
∠D+∠E+∠F=180°
∠C=180°−∠A−∠B
∠F=180°−∠D−∠E
仮定より
∠A=∠D
∠B=∠E
∴ ∠C=∠F

<113>　教材（11）に対する生徒D_1の指導による応答の考察

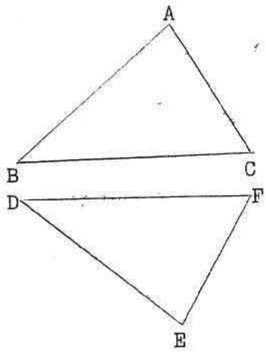
- 仮定も結論も助言を与えながら問題の文章を分析させると生徒D_1は正しく応答できるようになる。
- 等式関係の操作はたいそう困難である。
- 助言によって応答させたのちには，生徒D_1は，自分の力でほぼ正しく応答することができた。
- 教材(11)に応答するように命じると生徒D_1は，「仮定，結論，証明と書くのですか」とたずねた。論証はいつも仮定，結論，証明と3段に分けて記述しなければならないということがわかっていないし，また，3段に分けて書くよさもわかっていない。
- 仮定，結論の意味がわかってない。仮定や結論のことを，わかっていること，証明することなどのように日常用語に置き替えて考えさせることも劣る子どもの指導にはやむを得ないようである。仮定，結論の誤りを子どもとの問答によって正すことは可能であった。
- ∠C=∠Fは等式関係の操作によって証明されるのであるが，この操作を式で書き表わすことは，たいそう困難である。
- 内角の和が180°であることを知っているだけでは，この問題は解けない。したがって，単に知識をもっているだけでは問題解決に役だたないことがわかる。少なくとも1回は，その知識なり方法が問題解決の操作のなかに適用された経験をもたせなければならないものと思われた。劣る子どもにおいてはその経験の回数が多くなければならないようである。

問題解決は，問題の条件の分析を介して，条件と要求（目標）の相互的関係づけによってなされる。しかし教材(11)は書かれて

ある条件だけを分析しても「三角形の内角の和は2直角である」という性質がでてこない。このことが教材(11)の条件分析のむずかしいところである。

<114> 教材（12）

右の図の△ABCと△DEFにおいて，AB=DF，∠B=∠D，∠C=∠E であると，この2つの三角形は合同であることを証明せよ。



<115> 教材（12）に対する生徒D_1の指導前の応答

〔仮 定〕

△ABCと△DEFにおいて

AB=DF

∠B=∠D　∠C=∠E

〔結ろん〕

△ABC≡△EFD

〔証 明〕

定理の三辺が等しいということから

AB=FD

AC=EF

BC=DE

又，定理の二辺がきょう角ということから

∠B=∠D　∠C=∠E　となり

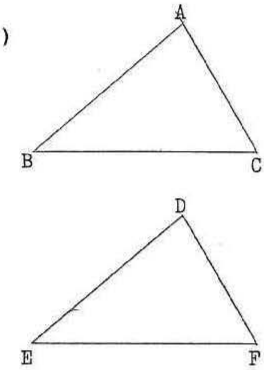
∴ △ABC≡△EFD

<116> 教材（12）に対する生徒D_1の指導前の応答の考察

- 三角形合同の条件を復習させてから，教材(12)に応答させた。
- この応答は，仮定や結論を正しく述べている。このことは，生徒 1の学力が著しく進歩したことを示すと考えてよいであろう。
- この応答の証明のところは，さきに復習したことを思いつくまま書きつらねたにすぎないものであって，思考の筋道がとおっていない。
- 生徒D_1は，問題解決の見とおしをもっていない。
- この問題は教材(11)の応用問題であるが，むずかしすぎるので次の教材を学習させることにした。

<117> 教材（13）

△ABCと△DEFにおいて，AB=DE，BC=EF，∠B=∠Eであると2つの三角形は合同である。



<118> 教材（13）に対する生徒D_1の指導前の応答

仮 定

AB=DE

BC=EF

∠B=∠E

結ろん

△ABC≡△DEF

証 明

△ABCと△DEFにおいて

（定理）二辺きょう角 →　辺 AB=DE

BC=EF から

∠B=∠E

又

辺 AB=DE

AC=DE（DF）

∠A=∠D

∴ △ABC≡△DEF

<119> 教材（13）に対する生徒D_1の指導による応答

〔仮 定〕

AB=DE

BC=EF

∠B=∠E

〔結ろん〕

△ABC≡△DEF

又 定理の二辺きょう角から

辺 AB=DE

AC=DF

∠A=∠D

∴ △ABC≡△DEF

<120> 教材（13）に対する生徒D_1の指導による応答の考察とその指導

- <118>の証明の段階ではその前半だけで証明が終わっているにかかわらず後半にまた，誤った証明をおこなって結論をくだしている。これは証明の推論が正しくできないことを示しているものである。三角形合同の証明ができるためには，3つの三角形合同の条件を正しく記憶していることや，その条件を図形や式でも表わせること，また逆に，式や図形を文章で表わせることが必要であるが，ただそれだけではじゅうぶんではない。それらの条件が体制化されていなければならない。言い替えると次のようになる。

2つの三角形が合同であるためには，2角夾辺相等でなければならない。

その逆命題，2つの三角形において2角夾辺相等であるとその2つの三角形は合同である。

その他の三角形合同の条件も同様に，逆命題も理解していると同時にこれらの命題が，類化され整理され，要約されて，たとえば次のようになっていなければならないと考える。

三角形合同の条件
1. 2角夾辺相等
2. 2辺夾角相等
3. 3辺相等

このように三角形合同の条件が体制化されていることが，三角形合同の問題解決には必要なのである。

- 生徒D_1は,三角形合同の条件を体制化していないのであるが，生徒D_1にとって，留意しなければならないことは，体制化の基礎とも考えられる知識や操作の一般化がむずかしいことである。たとえば生徒D_1は，図形や操作を個別的実在的に考えている。2辺夾角相等の条件は，三角形一般についていっていることであり，その辺や角も，実在的なものでなく，角一般であり，辺一般についていっていることで，個別的な図形を含んだ一般的な図形のことをいっているのである。このことを理解していない。
- 生徒D_1は，2辺夾角相等の条件を使った2つの三角形合同の証明は，1組だけでおこなえばよいのか，2組もおこなわなければならないのか，そのことがはっきりわかっていない。

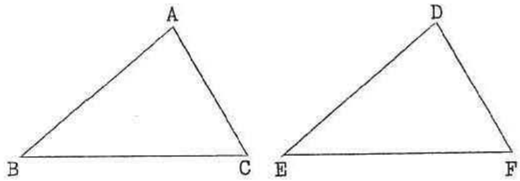
したがって，証明は，1組だけおこなえばよいことや，さきの一般化の指導をしたのち，応答させてみたが，指導前の応答と同じ誤りをおかした。

- 問題解決を考えるときは，条件を図形に記入するように強く指導した。また，問題の文章と，図形と，記述したことを交互に比べて見るように指導したが，このような思考の中心転換はこのような子どもには，たいそう困難であった。

<121> 教材（14）

△ABCと△DEFにおいて，∠B=∠E，∠C=∠F

BC=EF　であると，この2つの三角形は合同である。



<122> 教材（14）に対する生徒D_1の指導前の応答

（仮　定）

∠B=∠E

∠C=∠F

BC=EF

（結　論）

△ABC≡△DEF

（証　明）

仮定から

∠B=∠E

∠C=∠F

BC=EF

定理の一辺とその両端の角が等しいことから

∴ △ABC≡△DEF

<123> 教材（14）に対する生徒D_1の指導前の応答の考察

- 助言を与えないのに，自分の力で完全に正答した。
- その理由は，これまでの指導効果とも考えられるし，また，この条件（2角夾辺相等）を適用する能力が身についていたのであるとも考えられよう。しかし，この条件は劣る子どもにも適用しやすいのである。

<124> 教材（15）

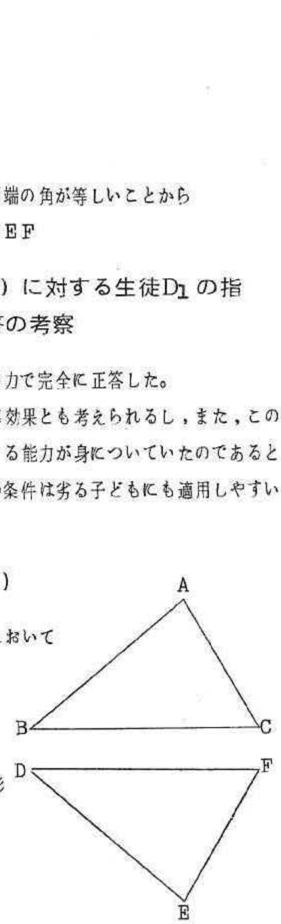
△ABCと△DEFにおいて

AB=DE

BC=DF

AC=EF

であると2つの三角形は合同である。



<125> 教材（15）に対する生徒D_1の指導前の応答

〔仮 定〕

AB＝DE

BC＝DF

AC＝EF

〔結 論〕

△ABC≡△EDF

〔証 明〕

仮定から

AB＝DE

BC＝DF

AC＝EF

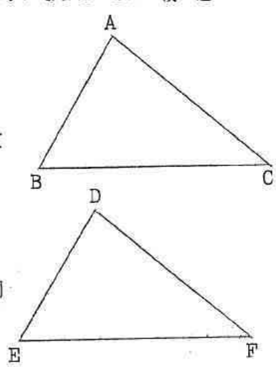
定理の三辺がそれぞれ等しいと合同になるということから

△ABC≡△EDF

<126> 教材（15）に対する生徒D_1の指導前の応答の考察

- 自分の力で完全に正答した。
- 教材(14)も教材(15)も，単に条件を問題にあてはめればよいので，生産的思考を要しない問題であるが，それにしてもこれらの応答のように筋道をとおすことができるようになったことは一段の進歩であるといわれよう。

<127> 教材（13）



△ABCと△DEFにおいて

AB＝DE

BC＝DF

∠B＝∠E

であると2つの三角形は合同である。

<128> 教材（13）に対する生徒D_1の指導による応答

（仮 定）

AB＝DE

BC＝EF

∠B＝∠E

（結ろん）

△ABC≡△DEF

（証 明）

仮定から　AB＝DE

BC＝EF

∠B＝∠E

定理の二辺とその間の角が等しいと合同になるということから

∴ △ABC≡△DEF

<129> 教材（13）に対する生徒D_1の指導による応答の考察

- この応答によって，いくらかの進歩がみられる。
- 再生的思考の問題にしても，このような容易な問題において論証の方法を身につけさせていくことがたいせつと思う。
- これまでの指導で特に力をいれた点は

  問題の文章を読ませて，仮定と結論を確かにとらえさせること。

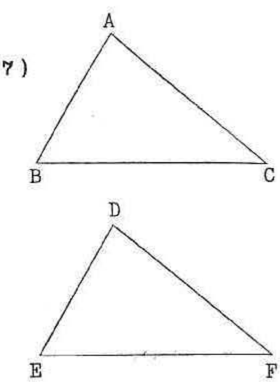
  仮定のことがらを図形にはっきり記入させること。

  仮定と結論と図形を見比べて条件分析をおこなわせること。

  証明のときは，等式や結論の成立する理由を書かせること。

などであった。

<130> 教材（17）



△ABCと△DEFにおいて

AB＝DE

∠A＝∠D

∠C＝∠F

であると2つの三角形は合同である。

<131> 教材（17）に対する生徒D1の指導前の応答

（仮 定）

AB＝DE

∠A＝∠D

∠C＝∠F

（結ろん）

△ABC≡△DEF

（証 明）

仮定から　AB＝DE

∠A＝∠D

∠C＝∠F

定理から　一辺とその両端の角が等しいと合同となる

ということから

$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

<132>　教材（17）に対する生徒D_1の指導前の応答の考察とその後の指導

- 教材(12)とほとんど同一の問題であるが，教材(12)の応答のような誤りはおかさなくなった。
- しかしこの応答は誤っている。それは2角夾辺相等の条件を誤って適用しているからである。このことは次のように考えられるであろう。1つは，2角夾辺相等の条件の定着が不確実であったこと，他の1つは，これまでの問題解決における論理操作が，書かれてある条件をそのまま利用すればよかったので，その習慣にしたがって無意識的に前問題のように条件を利用したことであろう。
- 三角形合同の条件を理解させ，定着させるために，これまでの指導では，筆者の作った特定のカードを利用したのであるが，このカードは，子どもに作らせることが重要であると思われる。子どもが自らこのカードを作ることによって，知識は正確になりその定着も強固になると考えられる。
- 劣る子どもは，自分でも意味のわからない操作をたびたびおこなう。類似問題である場合は，類似点だけ考え，差異点に気づかずに，機械的に前の操作を繰り返して誤りをおかす。

  しかしまた，問題解決が困難な場合，意識的に類似問題の解決と同一の操作をおこなう場合もあるようである。
- 教材(17)に対する生徒D_1の誤答の要因は別として，生徒D_1にカードの図形と教材(17)に記号を加えた図形とを見比べさせて子ども自身に誤りを発見させ，教材(11)の指導を繰り返した。

  このような等式関係の操作を式で表現することはたいそう困難である。

<133>　教材（17）に対する生徒D_1の指導後の応答

（仮　定）

$AB=DE$

$\angle A=\angle D$

$\angle C=\angle F$

（結　論）

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

（証　明）

仮定より

$AB=DE$

$\angle A=\angle D$

$\angle C=\angle F$

$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

$\angle D+\angle E+\angle F=180^\circ$

$\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B$

$\angle F=180^\circ-\angle D-\angle F$

仮定より　$\angle A=\angle D$

$\angle C=\angle F$　　なので

$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

<134>　教材（17）に対する生徒D_1の指導後の応答の考察と指導

- せっかく，むずかしい等式関係の操作をおこなっても，$\angle C=\angle F$と仮定においてわかっていることが証明されたにすぎなかった。
- この問題は思考段階が2回あるのでむずかしいのである。$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$が上位目標であり，$\angle B=\angle E$が下位目標である。この問題の証明過程を分析すると，第1に上位目標を，第2に，上位目標に到達するために$\angle B=\angle E$の下位目標を確認しなければならない。下位目標を証明したのちは，$\angle B=\angle E$を上位目標の手段として利用することになる。

  このように証明過程が複雑になると劣る子どもは目標を見失って，<133>のような応答をすることがある。
- 生徒D_1は，教材(11)で，等式変換の指導をうけているのであるが，その操作を一般化して理解していないようである。つまり，

  $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

  $\therefore\ \angle C=180^\circ-\angle A-\angle B$

  の等式変換の操作は，「三角形の内角の和は，180°であるので，内角のうちの1つの角の大きさがわからないときは，180°から他の2つの角を引いて大きさのわからない角を求めることができる。」というように，生徒D_1はこの操作を一般化して理解していない。
- 生徒D_1は，図形を個別的実在的に考えているのであって，概念的に考えていないのである。
- また，$\angle A$や$\angle B$の数学的記号は，その角の名称である場合と，その角の大きさを表わす場合とある。つまり$\angle A$や$\angle B$の記号の意味を正しく理解していなければならない。
- 次の応答は助言を与えながら記述させたものである。

<135>　教材（17）に対する生徒D_1の，再び指導した後の応答

（仮　定）

$AB=DE$

$\angle A=\angle D$

$\angle C=\angle F$

（結ろん）

△ABC≡△DEF

（証　明）

仮定より　AB＝DE

∠A＝∠D

∠C＝∠F

∠A+∠B+∠C＝180°

∠D+∠E+∠F＝180°

∠B＝180　−∠A−∠C

∠E＝180　−∠D−∠F

仮定より　∠A＝∠D

∠C＝∠F

∴　∠B＝∠E………(1)

仮によって

AB＝DE

∠A＝∠B

(1)……より

∠B＝∠E

1辺と両端の角が等しいので　△ABC≡△DEF

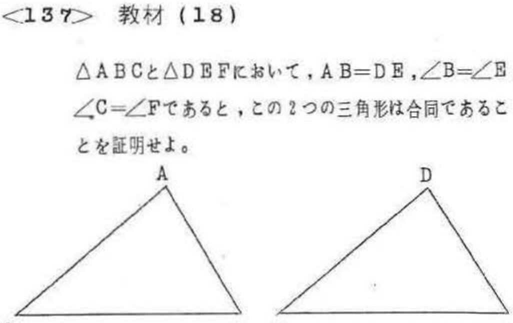
（ロ）　生徒D_1の第2回の実験的学習指導の記録

<136>　教材（11），（13），（14）に対する生徒D_1の応答と考察

- 第2回に生徒D_1に教材(11)，(13)，(14)の応答を求めた。
- 3つの問題とも全部正解であり満足してよい応答であった。
- その応答を，筋道をとおして説明することもできるようになった。

<137>　教材（18）

△ABCと△DEFにおいて，AB＝DE，∠B＝∠E，∠C＝∠Fであると，この2つの三角形は合同であることを証明せよ。



<138>　教材（18）に対する生徒D_1の指導前の応答

（仮　定）

AB＝DE

∠B＝∠E

∠C＝∠F

（結　論）

△ABC≡△DEF

（証　明）

仮定より　AB＝DE

∠B＝∠E

∠C＝∠F

∠Aと∠Dが等し

定理の二角夾辺が等しいと合同になるので

同様に辺BC上の二つの角二角夾辺が等しいと合同になるので

EF

∴　△ABC≡△DEF

<139>　教材（18）に対する生徒D_1の指導前の応答の考察とその後の指導

- 教材(18)は教材(12)と本質的に同一の問題である。しかし図形相互の空間的位置と名称のつけ方が違っている。
- そして，第1回に，教材(12)を指導してある。この応答は，第1回の指導前の応答<115>よりも進歩しているように思われる。それは，証明されてないにしても「∠Aと∠Dが等しし」と記述されているからである。このことは，2角夾辺相等の条件を多少なりとも正しく適用できるようになったと考えることができる。
- しかし前回は∠A＝∠Dを導くための等式関係の操作が複雑であったことから，証明過程で思考が混乱して，2角夾辺相等の条件を1回だけ適用すればよいのに，BC＝EF，∠B＝∠E，∠C＝∠Fも立証しなければならないと考えているように思われた。
- 前回の教材(12)の指導のときは，等式関係の操作が，証明過程から孤立しているように思われた。しかし，このことは，等式関係の操作を理解していなかったのでやむを得ないことであったと思う。
- 教材(12)および教材(18)に正しく応答できるためには，等式関係の操作（∠A＝∠Dを導く操作）と，2角夾辺相等の条件を証明に適用する操作とがそれぞれ身につき，この2つの操作が1つの操作として構造化していなければならないであろう。
- 指導について

  指導前の応答<138>の説明をさせる。（後半の説明はうまくできない）

  上位目標（△ABC≡△DEF）を確認させる

  そのためには何がわかればよいか？

  　下位目標（∠A＝∠D）の確認

  どうして？

  2角夾辺相等の条件を現実の問題にあてはめる。

  下位目標を証明するにはどうすればよいか？

このように解決過程を上からの方法で考えさせ，説明させて，次に，証明過程を下からの方法で説明させる。

- 教師との対話が，一問一答であると生徒D_1は，容易に思考をすすめることができる。特に等式関係の操作は容易であった。

<140> 教材（18）に対する生徒D_1の指導後の応答

（仮　定）

AB＝DE

∠B＝∠E

∠C＝∠F

（結ろん）

△ABC≡DEF

（証　明）

仮定により　AB＝DE

∠B＝∠E

∠C＝∠F

∠A＋∠B＋∠C＝180°

∠E＋∠D＋∠F＝180°

∠A＝180°－∠B－∠C

∠D＝180°－∠E＋(－)∠F

定理の二角夾辺が等しいと合同になるので

∠A＝∠D　となる

同様に辺BC上の二つの角は二角夾辺が等しい

EF

合同になるので

∴ △ABC≡△DEF

<141> 教材（18）に対する生徒D_1の指導後の応答の考察とその後の指導

- 指導後の応答<140>は，指導前の応答<138>よりもよくない。
- 指導前の応答において，「∠Aと∠Dが等しい」と記述してあるのはそのことが証明するための必要条件であることを理解しているが，「∠Aと∠Dが等しい」との証明を省略したのであろうと，子どもに有利に解釈した。
- ところで指導後の応答では，「定理の二角夾辺が等しいと合同になるので，∠A＝∠Dとなる。」と立言している。この命題は理由と帰結が逆である。つまり「∠A＝∠Dになるので，二角夾辺が等しいことから合同になる」との論理が正しいすすめ方であろう。つまり生徒D_1は，直観的思考と論理的思考が混在しているように思われる。
- 等式変換，つまり∠A＋∠B＋∠C＝180°の等式より∠A＝180°－∠B－∠C の等式を導くとき，∠A＋∠B＋∠C＝180°の等式より考えなくて，等号を記入した図形から考えている。これは図形と等式とが一体になっていなく，しかも図形から考えることがやさしいからである。図形は図形，等式は等式で孤立しており，その間に何の関連もないようである。その図形の性質を抽象して表わしたのが，∠A＋∠B＋∠C＝180°の等式である。その等式から最初の目標（下位目標）の∠Aを導き出せばよいのに，わざわざ思考の初めにさかのぼって図形から∠Aを考えている。その思考はいっそう複雑になろう。しかし，それでも，生徒D_1ととっては，図形からの操作がやさしいのである。数学的思考でたいせつなのは筋道がとおっており，いつもふり返ってみて，．とおってきた経過を考え，初め設定した目標を見失わないようにすることである。ところで，操作が複雑になるとこの目標を見失って，何らかの理由によって最初の目標が他のものに置き替えられてしまっている。
- 指導前と同じように，合同の条件を2回も適用しようとしているようである。「同様に辺BC，EF上の二つの角は二角夾辺が等しいと合同になるので」がそれである。この誤りを，先にも是正しようと努力して指導したのであるが効果がなかった。
- 指導について

以上の考察から次のように指導を強化した。

問題解決の見とおしを内面的にもたせて，説明をさせること。説明は図形によること。

下位目標（∠A＝∠D）を記述させること。

図形と式とコトバがはなればなれにならないようにすること。

概念形成につとめること。

できるだけ具体的に操作させるようにつとめること。

<142> 教材（18）に対する生徒D_1の，再び指導した後の応答

（仮　定）

AB＝DE

∠B＝∠E

∠C＝∠F

（結　論）

△ABC≡△DEF

（証　明）

∠A＋∠B＋∠C＝180°

∠D＋∠E＋∠F＝180°

∠A＝180°－∠B－∠C

∠D＝180°－∠E－F（∠F）

∠Aと∠Dが等しい

仮定により

AB＝DE

∠B＝∠E

∠C＝F（∠F）

∴ △ABC≡△DEF

<143> 教材（18）に対する生徒D_1の再び指導した後の応答の考察とその指導

- 「∠Aと∠Dが等しい」の命題の前に，「仮定より∠B＝∠E，∠C＝∠F」の項の必要な理由を理解させる。
- 「∠C＝∠F」の必要でない理由を理解させる。
- 以上の指導を繰り返したのち，自分だけの力による応答が次の<144>である。
- この応答<144>は完全なものであるが，正しく理解しての正答であるか，形だけの模倣にすぎないものか疑問である。
- この指導は詰め込みの傾向があるように感じられないこともない。しかし，子どもに説明を多くさせることによって，この詰め込込みの傾向を少なくすることができる。図形の論証のような論理的思考を伸ばすためには，自然の成熟だけではじゅうぶんでない。厳密な定義や分析や証明の指導から始めなければならないと思われる。

<144> 教材（18）に対する生徒D_1の，3たび指導した後の応答

（仮　定）

AB＝DE

∠B＝∠E

∠C＝∠F

（結　論）

△ABC≡△DEF

（証　明）

∠A＋∠B＋∠C＝180°

∠D＋∠E＋F（∠F）＝180°

∠A＝180°－∠B－∠C

∠D＝180°－∠E－∠F

仮定により　∠B＝∠E

∠C＝∠F

∴ ∠A＝∠D

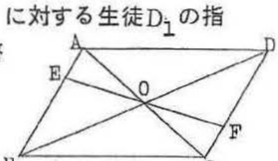
仮定により　AB＝DE

∠B＝∠E

二角夾辺が等しいので

∴ △ABC≡△DEF

<145> 教材（5）に対する生徒D_1の指導前の応答



（仮　定）

EFで交わらせる

（結　論）

Oは線分EFの中点

（証　明）

定理から対角線は他を二等分するので

仮定よりその交点をOとしてあるので

EFが交わればしたがって交点OはEFの中点

∴ Oは線分EFの中点

<146> 教材（5）に対する生徒D_1の指導前の応答の考察とその指導

- 調査問題(5)に対して生徒D_1は白紙の応答であった。
- カードによって平行四辺形の条件を復習させたのち，調査問題(5)と同一の教材(5)に応答させたのが前掲<145>である。
- この応答を分析しても，これまでの指導の効果は，かなめのところには現われていない。
- しかし，仮定，結論，証明と3段階に分けて考えていること，結論を正しく記述していることなどで，学習効果の転移は多少とも認めないわけにはいかない。
- 平行四辺形ABCDを仮定であると認めることは，子どもにとってはむずかしい。
- これまでの問題と違って，この問題のむずかしいところは，平行四辺形という新しい内容がはいってきたことである。これまでは，三角形に関する問題であったため，それだけの知識の適用でよかったわけである。つまりこの問題は，内容が複雑になったのでむずかしくなったのである。
- これまでの問題においてもそうであったのであるが，特にこの問題においては，解決方法としていわゆる「問題の定式変え」がおこなわれなければならない。この操作をしなければならないことが子どもに明確に意識されていないと，このように複雑化された問題は解けない。
- 要するに教材(5)は，平行四辺形という新しい内容と，問題の定式変えという新しい操作が加わったのでむずかしいのである。
- 教材(5)の問題の結論は「Oは線分EFの中点である。」であるが，これを定式変えをすれば，EO＝OFとなる。
EO＝OFの証明がなされるために△AEO≡△OCFが論証されなければならない。
- 教材(5)を基本問題，定式変えした問題を補助問題というならば，この補助問題は次のようになる。

平行四辺形ABCDの対角線の交点Oを通る1つの直線を引き，平行四辺形の2つの辺と右の図のようにE，Fで交わらせると△AEOと△CFOは合同である。

- この補助問題を解くことが，この2つの問題（基本問題と補助問題）の相互代替性によって基本問題の解決にいたるのである。

・ この定式変えの操作が教材(5)に特に必要であり，この観点が子どもの身についていなければならないのである。

・ 以上の考えによって解法を次のように指導した。

子どもに記述させ，問答を繰り返しながら解答をすすめた。

「□ ABCDは平行四辺形である。」ことが仮定であることを理解させる。

対頂角，対角線，錯角などの概念を形成させることにつとめ，その知識が活用されるように特に留意した。

証明過程の思考様式を身につけさせることにつとめる。

・ 以上のように指導してから子どもに応答させたものを次にかかげる。

<147> 教材（5）に対する生徒D_1の指導後の応答

（仮　定）

四角形ABCDは平行四辺形

（結ろん）

EO=OF

（証　明）

AO=OC　（対角線）

∠AOE=∠FOC　（対頂角）

∠EAO=∠OCF　（さっ角）

二角夾辺で等しいので

（△AEO≡△CFO）

∴　EO=OF

∴　Oは線分EFの中点である

<148> 教材（5）に対する生徒D_1の指導後の応答の考察

・ 証明過程のかっこ内の文字は，助言によって記入させたものである。

・ △AEO≡△CFO　の記述を忘れたことは下位目標を見失ったことになる。証明過程でたいせつなことは，いつもたどってきた過程をふり返ってみること，目標を忘れないことである。生徒D_1は上位目標を銘記しているが，下位目標は見失ってしまった。いわゆる可逆的思考がじゅうぶん発達していない。

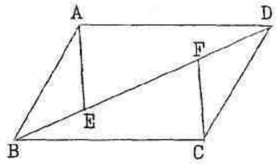
・ 対角線，対頂角，錯角などのようにその等式の成立の理由を書くように指導することは，ふり返ってみる態度を形成させることに効果があると考える。

<149> 教材（7）に対する生徒D_1の指導前の応答

（仮　定）

四角形ABCDは平行四辺形

BE=DF



（結　論）

AE=FC

AE∥FC

（証　明）

△ABEと△CFDにおいて

AB∥DC

AB=DC

∠AEB=∠CFD　（さっ角）

∴　AE∥FC

AE=FC

<150> 教材（7）に対する生徒D_1の指導前の応答の考察とその後の指導

・ 教材(7)は教材(5)と類似の問題である。したがって教材(5)の練習効果がたいそう現われている。仮定や結論に書かれてあることがらも正しい。

・ 証明過程においても，その書かれた内容はたいそう不完全ではあるが，証明の筋道はとおっているように思われる。

・ まず，補助問題を設定して，その合同の証明をおこなうように計画をたてている。補助問題の要求より問題条件の分析をおこなって，補助問題の要求に答えようとしているのだが，問題が複雑であるため，三角形合同の条件を分析できない。不用な条件が混入しており，錯角も誤解している。

・ 指導について

AE=FC　の問題の要求に答えるため補助問題を設定して，その目標（△ABE≡△CDF）を実現させるため教材(5)のときのような指導をおこなった。

・ この問題は，結論が2つある。2つの問題がまとめられて1つの問題のように形を変えたものである。

・ 第2の結論AE∥FCは角の等値関係の操作を必要とするが，これには，教材(11)，(18)のときと同じ指導を繰り返しておこなった。

・ このような指導の結果の記録を，生徒D_1に見せて整理させたものが，次の応答である。

<151> 教材（7）に対する生徒D_1の指導後の応答

（仮　定）

四形（角）形ABCDは平行四辺形

BE=DF

（結　論）

AE=FC ……(1)

AE∥FC ……(2)

（証　明）

(1)

△ＡＢＥと△ＣＦＤにおいて

ＡＢ∥ＤＣ

ＡＢ＝ＤＣ

ＢＥ＝ＤＦ

∠ＡＢＥ＝∠ＦＤＣ

△ＡＢＥ≡△ＣＦＤ

ＡＥ＝ＦＣ

(2)

∠ＡＥＢ＋∠ＡＥＦ＝１８０°

∠ＤＦＣ＋∠ＢＦＣ＝１８０°

∠ＡＥＦ＝２∠Ｒ−∠ＡＥＢ

∠ＢＦＣ＝２∠Ｒ−∠ＤＦＣ

∠ＡＥＢ＝∠ＤＦＣ

∴　∠ＡＥＦ＝∠ＢＦＣ

さっ角が等しいから

∴　ＡＥ∥ＦＣ

(ハ)　生徒D_1の第３回の実験的学習指導の記録

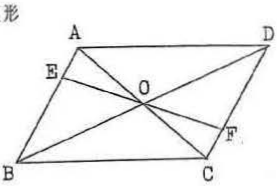
<１５２>　教材（５）に対する生徒D_1の指導前の応答

〔仮　定〕

四辺形ＡＢＣＤは平行四辺形

〔結ろん〕

Ｏは線分ＥＦの中点



〔証　明〕

ＡＢ∥ＤＣ

ＡＤ∥ＢＣ

△ＯＡＥと△ＯＦＣにおいて

ＯＣ＝ＡＣ（ＡＯ）

ＯＥ＝ＯＦ

∠ＡＯＥ＝∠ＦＣＯ（∠ＦＯＣ）

∴　△ＯＡＥ≡△ＯＦＣ

∴　Ｏは線分ＥＦの中点である。

<１５３>　教材（５）に対する生徒D_1の指導前の応答の考察とその指導

- この応答は，この教材(5)を指導してから約１週間後，生徒D_1が自分の力で応答したものである。
- 証明の段階で，問題の条件のＡＢ∥ＤＣ，ＡＤ∥ＢＣを記述しているが，これは問題解決に直接結びついたいわゆる求められる条件ではない。この求められる条件は，問題の条件を問題の要求と相互的に関係づけることによって選択されなければならない。生徒D_1は，問題の要求と関係づけなくて，単に条件分析をおこなっている。
- △ＯＡＥ≡△ＯＦＣ　の前提として　ＯＥ＝ＯＦ　をかかげているが，これは論点窃取の誤りである。この誤りをおかさないためには，結論に「Ｏは線分ＥＦの中点」と書き表わすだけでなくＯＥ＝ＯＦ　と定式変えさせて，問題の要求を銘記させておく必要があり，証明過程においては，たえずうしろをふり返ってみて，この目標を忘れないようにつとめさせることが肝要である。
- △ＯＡＥ≡△ＯＦＣ　であれば，どうしてＯは線分ＥＦの中点であるのか，その理由が省略されている。これも明らかに，書かせなければならない。
- 以上のことがらを指導したのち，子どもの力で解答させたものを次にかかげる。

<１５４>　教材（５）に対する生徒D_1の指導後の応答

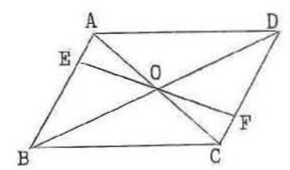
（仮　定）

四辺形ＡＢＣＤは

平行四辺形

（結ろん）

Ｏは線分ＥＦの中点



（証　明）

△ＯＡＥと△ＯＣＦ　において

ＯＡ＝ＯＣ

ＥＯ＝ＦＯ

∠Ａ＝∠Ｃ

∠ＡＯＥ＝∠ＣＯＦ

二辺夾角で

△ＯＡＥ≡△ＯＣＦ

<１５５>　教材（５）に対する生徒D_1の指導後の応答の考察とその指導

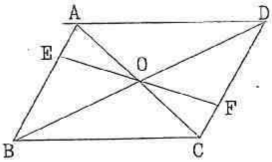
- 生徒D_1は三角形合同の条件の知識が確かでない。したがって解決過程が複雑になると，その知識を正しく適用することができない。
- 誤れる推論（ＥＯ＝ＯＦ）も繰り返している。
- 問題の要求（ＥＯ＝ＯＦ）も忘れている。
- 合同の条件をカードによって復習させ，先の指導を問答によって繰り返したのちの応答を次にかかげる。

<１５６>　教材（５）に対する生徒D_1の再び指導した後の応答

（仮　定）

四辺形ABCDは

平行四辺形



（結ろん）

Oは線分EFの中点

（EO＝FO）

（証　明）

AB∥DC

△OAEと△OCFにおいて

OC＝AO

AE＝FC

EO＝FO

∠EAO＝∠FCO

∠AOE＝∠FOC

∴　△OAE≡△OCF

∴　Oは線分EFの中点

<157>　教材（5）に対する生徒D_1の再び指導した後の応答の考察とその指導

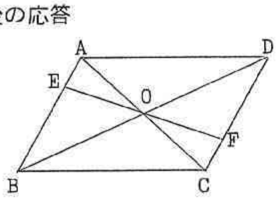
- 条件の過剰の証明を繰り返している。
- 誤れる推論（EO＝FO）も繰り返している。
- したがって，三角形合同の条件を繰り返し復習させ，問題要求をふり返ってみるように指導した。また式（OC＝AOなど）の成立する理由もかっこに入れて明記するように指導を繰り返した。それらの指導の繰り返しによって，次にかかげるようにようやく満足できる応答を得た。文字の誤りが2つあるので訂正してかっこに入れておく。

<158>　教材（5）に対する生徒D_1の3度指導した後の応答

（仮　定）

四辺形ABCDは

平行四辺形



（結　論）

Oは線分EFの中点

（証　明）

AB∥DC

△AEOとCFO（△CFO）において

AO＝CO　（対角線）

∠OAE＝∠OCF　（錯角により）

∠EOF（∠EOA）＝∠COF　（対頂角）

二辺夾辺により

∴　△OAE≡△OFC

∴　OE＝OF

∴　Oは線分EFの中点である

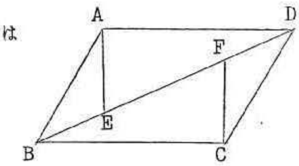
<159>　教材（7）に対する生徒D_1の指導前の応答

（仮　定）

四辺形ABCDは

平行四辺形

BE＝DF



（結ろん）

AE＝FC

AE∥FC

（証　明）

△ABEと△CFDにおいて

AB＝DC

∠F＝∠E

∠D＝∠B

仮定より　DF＝BE

FC＝AE

∴　△ABE≡△CFD

∴　FC＝AE

<160>　教材（7）に対する生徒D_1の指導前の応答の考察とその指導

- この応答は，教材(5)の指導前の応答に比べて，たいそうすぐれている。仮定，結論も正しく記述している。証明も不完全ではあるが，証明しようとする意図も推測できる。
- 教材(7)でたいせつであることは，問題の要求が2つあること，つまり子どもからみれば仕事が2つあることである。子どもとしては，これを銘記して証明にかからなければならない。指導前の応答<159>では，生徒D_1は仕事の1つを忘れている。したがって，応答では結論のところで目標を明記させ，証明過程においても仕事の内容を2つに分けて明記させるように指導する。
- 等式（AB＝DCなどの式）の成立する理由を明記させること，たとえば，かっこをして，「仮定より」，「錯角」などのようにかならず書かせることにする。
- 書き方のよくない点を特に指導する。たとえば，このような図形では∠Bと書いてもどの角であるのかわからない。∠ABEと書かなければならないというようなことを。
- 角の等式関係の操作は以前におこなったが，ここでも繰り返し指導した。
- 以上のことがらを，助言を与えながら子どもに記述させ，問答を繰り返し指導した。
- 問答の1つ。

T（教師）「∠AEFと∠EFCが等しいことを証明すればよいね。どうです。等してわけがわかりますか？」

D_1（生徒）「錯角だから等しい。」

T（教師）「この錯角が等しいことを証明するんでしょう？」

AE∥FC の論証のために∠AEF＝∠EFCを証明しようとしているのである。ところで，「錯角だから等しい。」と返答する。理由と帰結を明確に分析して思考することが困難である。直観的思考と論理的思考が混在しているのである。

• 以上のことがらを指導したのち，その記録を整理させたものを次にかかげる。

<161> 教材（7）に対する生徒D_1の指導後の応答

（仮 定）

四辺形ABCDは平行四辺形

BE＝DF

（結 論）

AE＝FC …… (1)

AE∥FC …… (2)

（証 明）

(1)について

△ABEと△CFDにおいて

AB＝DC （平行四辺形の対辺）

BE＝DF （仮定により）

∠ABE＝∠CDF （錯角）

二辺夾角相等で

△ABE≡△CFD

∴ AE＝FC …… (1)

(2)について

∠AEB＋∠AEF＝180°

∠CFD＋∠CFE＝180°

∠AEF＝180°−∠AEB

∠CFE＝180°−∠CFD

∠AEB＝∠CFD

∴ ∠AEF＝∠CFE

錯角が等しいので

AE∥FC

（2） 生徒D_2の実験的学習指導の記録

（イ） 生徒D_2の第1回の実験的学習指導の記録

<162> 生徒D_2に対する平行四辺形の条件などの指導

平行四辺形の条件
三角形合同の条件
角の名称（同位角，対頂角，錯角）
} を指導する。

指導上特に注意したこと。

• コトバと図形と式が，同じ意味を表わしていることを理解させること。

• 1つの表現から他の2つの表現をさせること。

たとえば，2辺夾角相等の図形をみて，それを式でも，文章でも書かれるようにする。

• 2つの図形の位置関係を変えたり，裏返しした図形によったりして，条件の理解を一般化させること。

• 図形は，コンパスや定規を使って，正確にかかせる。

生徒D_2の学力

• 平行線の書き方を知らない。

• 2つの三角定規で平行四辺形をかくことがむずかしい。

• 裏返しの合同の三角形をかくことがむずかしい。それに文字，記号を入れるのも容易でない。

• 裏返しの三角形の合同の式を，図形で表わすことはいっそうむずかしい。

（ロ） 生徒D_2の第2回の実験的学習指導の記録

<163> 生徒D_2に対する前回の復習

前日の学習を繰り返す。つまり，

• 平行四辺形の条件などを，記述させる。

• 平行四辺形などの図形をかかせて，等号や平行記号などを記入させる。

• その図形の意味を式で書かせる。

• 以上のことがらを説明させる。

このように復習させてから，教材(5)，つまり調査問題5)を生徒D_2の力で応答させたものを次にかかげる。

<164> 教材（5）に対する生徒D_2の指導前の応答

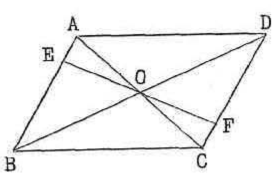
仮 定

AB＝DC

AD＝BC

結 論

EO＝FO



証　明

AB=DC

AD=BC

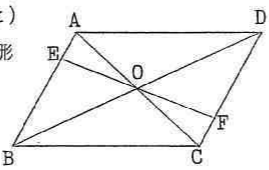
$$\therefore \left\{\begin{array}{l} EO=FO \\ BO=DO \\ AO=CO \end{array}\right.$$

∴　EO=FO

<165> 教材（5）に対する生徒D_2の指導前の応答の考察

- 教材(5)の応答は調査問題(5)のときの応答と比較して，たいそうすぐれている。仮定も結論も正しく書いている。また，証明過程においても，三角形の合同を証明しようとしている生徒D_2の考えを推測できるようである。
- 生徒D_2にこの応答を説明させてから，教材(5)の解決過程を，助言しながら生徒D_2に記述させる。

<166> 教材（5）に対する生徒D_2の指導による応答



仮　定　（わかっていること）

□ABCDは平行四辺形

結　論　（証明すること）

Oは線分EFの中点であること

（EO=FO）

証　明

$\boxed{EO=OF}$

$\boxed{\triangle EOA \equiv \triangle FCO}$

AO=OC　（対角線）

∠AOE=∠CFO　（対ちょう角）

∠EAO=∠FCO　（さっ角）

∴　△EOA≡△FCO

∴　EO=FO

Oは線分EFの中点である。

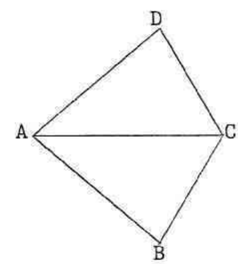
<167> 教材（5）に対する生徒D_2の応答の指導

- 仮定のことを「わかっていること」と言い替える。
- 「□ABCDは平行四辺形である。」を「わかっていること」であると教える。仮定から，「何がわかるか」を考えさせる。
- 結論を「証明すること」と言い替えて教える。
- 「証明すること」は，問題の文章のとおり書かせ，同時にそれを定式変えした（EO=FO）を書きそえさせる。
- 証明においては，再度，$\boxed{EO=FO}$ と問題の要求をかかげ，仕事（証明の操作）の目標を忘れないようにさせる。
- 問題を定式変えさせて，$\boxed{\triangle EOA \equiv \triangle FCO}$ とする。つまり，三角形合同の補助問題をつくることになる。
- 三角形合同の問題要求の分析を介して条件分析をおこなわせる。
- 生徒D_2は，この条件分析が困難であるので，三角形合同の単純な問題から指導を始めることにする。
- 平行四辺形の条件と三角形合同の条件を，3つの表わし方（文章，図形，式）で書いてくることを宿題にした。

（ハ）　生徒D_2の第3回の実験的学習指導の記録

<168> 教材（19）

右の図の四角形ABCDで，AB=AD，BC=DCならば，対角線ACによって分けられる△ABCと△ADCの角，∠BACと∠DACは等しいことを証明せよ。



<169> 教材（19）に対する生徒D_2の指導前の応答

仮　定

AB=AD

BC=DC

結　論

∠BAC=∠DAC

証　明

△ABCと△ADC　において

∠BAC=∠DAC

AB=AD

BC=CD

∴ ∠BAC=∠DAC

<170> 教材（19）に対する生徒D_2の指導後の応答

仮　定

AB=AD

BC=DC

結　論

∠BAC=∠DAC

証 明

△ABCと△ADCは合同

△ABC≡△ADC

△ABC≡△ADC

∵ AB=AD

BC=DC

AC=共通

∴ ∠BAC=∠DAC

<171> 教材（19）に対する生徒D_2を再び指導した後の応答

仮 定

AB=AD

BC=DC

結 論

∠BAC=∠DAC

証 明

△ABC≡△ADC

$$\because \begin{cases} AB=AD \\ BC=CD \\ AC=共通 \end{cases}$$

∴ ∠BAC=∠DAC

<172> 教材（19）に対する生徒D_2の応答の考察とその指導

- 指導前の応答<169>の考察

仮定に，「四角形ABCDにおいて」をつけ加えると，いっそうよいと思われるが，仮定，結論の書き方は，おおよそ正しい。

証明においては，2つ三角形の合同を論証しようとする意図はわかるが，「△ABC≡△ADC」というたいせつな目標を書き忘れている。なお，三角形合同の条件にあげてある「∠BAC=∠DAC」はこの問題の結論であるので，この論証は循環論法をおこなっていることになる。

- その指導

図形に，問題の条件の記号を入れさせる。

ABとAD，BCとDCにそれぞれ等号を入れさせる。

図形に，赤鉛筆で結論を記入させる。

∠DACと∠CAB に赤鉛筆で等号を入れさせる。

目標を前に書いて理由を後に書くようにさせる。（指導後の応答のように）

以上のような指導のねらいは，条件分析を容易にすること，循環論証をふせぐこと，仕事の目標（証明の目標）を忘れないようにさせることなどである。

- 指導後の応答<170>の考察

証明の最初に無意味な2行が書かれているが，これは新しく指導した，結論と理由を逆に書くことになれないためと思われる。

- その後の指導

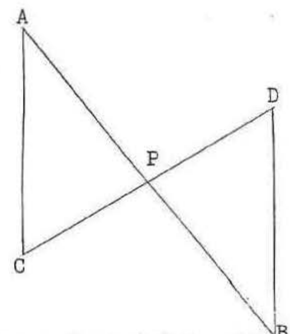
この指導後の応答を生徒D_2といっしょに検討するとともに，条件分析のときは，問題の文章を吟味したり，図形を見たりして考えなければならないことを指導する。

- 再び指導した後の応答<171>の考察

生徒D_2は第3回で（指導してから2回目）ほぼ正しい応答をした。

<173> 教材（20）

2つの線分AB，CDが，点Pで交わり，AP=BP，CP=DPならば，AとC，BとDを結んだ線分ACとBDは等しいことを証明せよ。



<174> 教材（20）に対する生徒D_2の指導前の応答

仮 定

AP=BP

CP=OP

結 論

AC=BD

証 明

△ACP≡△DBP

$$\because \begin{cases} AP=BP \\ CP=OP \\ \angle APC=\angle DPB \quad (対頂角) \end{cases}$$

∴ AC=BD

<175> 教材（20）に対する生徒D_2の指導前の応答の考察とその指導

- 応答の考察

文字の誤りが2つある。（DPをOPと書いている。）

この応答はほとんど完全である。

- その指導

$$\left.\begin{array}{l} AP=BP\ (仮定) \\ CP=DP\ (仮定) \end{array}\right\}$$ など，証明過程の等式に，その式の成立する理由を書くことを徹底させるようにした。

生徒D_2は解法を書くとき，深く考えなく，早のみするようである。このような子どもには，おちついて問題を解く態度を身につけさせたいものである。

- 問題の考え方や解き方は，次のように指導したい。

△ 問題の文章は，早のみ込みしないように，おちついて読み，重要なところ（仮定，結論など）に線をひかせる。

△ 次に，仮定や結論を，文章や式で書かせる。

△ 条件（仮定）を図形に，記号で書きこませる。結論の記号を図形に赤鉛筆で書きこませる。

△ 「証明」と書いて何を証明すればよかったのか，ふり返ってみさせる。

△ 結論（AC＝BD）を導くためにはどうすればよいか。

△ 問題を定式変えして補助問題（△ACP≡DBP）を考えさせる。

——AC＝BDを証明するには△ACP≡△DBPを証明すればよいと考えさせること。

△ 補助問題を解けるかどうかを考えさせる。

△ 条件分析させる。わかっていることは何か。

仮定をみさせる。図形をみさせる。

AP＝BP，CP＝DP　がわかる。

△ 問題の要求を介して条件分析させる。

△ 問題の要求に答えるためにはどの合同条件を適用すればよいか。そのためには，何がわかればよいかと考えさせる。

そして，∠APC＝∠DPBがわかってくる。

△ 見とおしがついたら，仕事の目的（△ACP≡△DBP）を書かせる。

△ 証明させる。目的を忘れないようにたえずふり返ってみさせる。

△ 等式が成立する理由を書かせる。

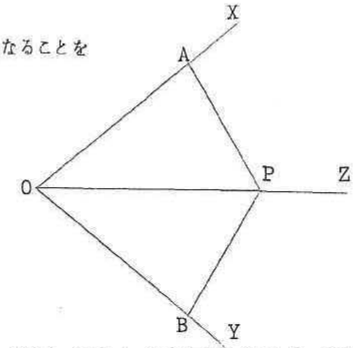
——AP＝BP　（仮定）などのように。

△ 仕事の目的（補助問題の証明）を達したとき，その仕事が終わったことを確認させ，その仕事（補助問題の証明）は，なんのためにやったのかふり返ってみさせる。（直接的には補助問題の証明で，間接的には基本問題の証明である。）

- このように指導してから，再び応答させた。その応答は完全であった。
- このように正しく応答した場合においても，問題の考え方が身につくように指導を繰り返した。

<176>　教材（21）

∠XOYの二等分線OZを引き，その上に一点Pをとる。Pから角の二辺にそれぞれ垂線PA，PBをおろせば，PA＝PBとなることを証明せよ。



<177>　教材（21）に対する生徒D_2の指導前の応答

仮　定

∠XOZ＝∠YOZ

PB⊥OY

PA⊥OX

結　論

PA＝PB

証　明

△AOP≡△BOP

$$\because \begin{cases} \angle XOZ = \angle YOZ \\ OP \ \text{共通} \\ \angle APO = \angle BPO \end{cases}$$

∴　PA＝PB

<178>　教材（21）に対する生徒D_2の指導前の応答の考察とその指導

- 生徒D_1は2角夾辺の条件を正しく適用している。
- しかし，∠APO＝∠BPOの条件を正しい推論で求めたものか，直観的思考によって求めたものか疑問である。
- したがって，各角を次のような記号で表わして求める角（△）の等しくなる理由を説明させる。
  - +∟+△＝180°
  - +∟+△＝180°
- 次に各角を文字で表わして求める角が等しくなる理由を説明させる。

∠AOP+∠OAP+∠OPA＝2∠R

∠BOP+∠OBP+∠OPB＝2∠R

∴ ∠OPA＝2∠R−∠AOP−∠OAP

∠OPB＝2∠R−∠BOP−∠OBP

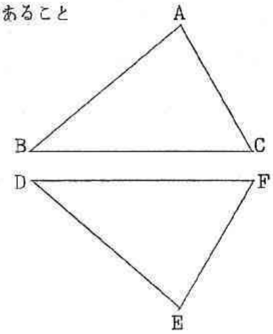
∴　∠OPA＝∠OPB

- 等式変換から，新しい等値関係を導く操作は困難であるが，角の大きさを文字で表わしたときは，いっそう困難になる。とにかく以上の指導をして，教材(21)に再び応答させたところ，指導前のものと同様の応答になった。

(二)　生徒D_2の第4回の実験的学習指導の記録

<179>　教材（22）

△ABCと△DEFにおいて，
AB＝DE，∠ABC＝∠EDF，
∠BCA＝∠EFDであると，この2つの三角形は合同であることを証明せよ。



<180>　教材（22）に対する生徒D_2の指導前の応答

仮　定

△ABC≡△DEF

結　論

∠ABC＝∠EDF
∠BCA＝∠EFD
AB＝DE

証　明

△ABC≡△DEF　において

∵ $\left\{\begin{array}{l}\angle ABC=\angle EDF\\ \angle BCA=\angle EFD\\ AB=DF\end{array}\right.$

∴　AB＝DF
∠ABC＝∠EDF
∠BCA＝∠EFD

<181>　教材（22）に対する生徒D_2の指導前の応答の考察とその指導

- 前回の指導より約1週間ののち教材(21)と類似問題である 教材(22)に応答させた。
- ところで，この応答は教材(21)の指導前の応答より誤りが多くなっている。
- 誤りの第1は，仮定と結論を反対に書いていることである。これは問題を仮定と結論に分析できないのでなく，考え違いであろう。この子どもはおちつきがなく早のみ込みをする性質である。問題を静かにおちついて読む態度ができていない。
- 誤りの第2は，証明の初めに「△ABC≡△DEFにおいて」と書いていることである。この誤りは，この実験的指導の前までに，「△ABCと△DEFにおいて」と書き始める習慣が形成されていたのに，「△ABC≡△DEF」と結論を先に書くように，前回新しく指導したため，この2つの様式が混乱したのである。
- 誤りの第3は，証明過程に，同じようなことを2回も書いていることである。この誤りもまた，これまでの様式と新しく指導された様式とが混乱しているのである。
- 指導について

　したがって，問題解決の考え方を指導して再び応答させた。

<182>　教材（22）に対する生徒D_2の指導後の応答

仮　定

∠ABC＝∠EDF
∠BCA＝∠EFD
AB＝DE

結　論

△ABC≡△DEF

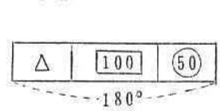
証　明

△ABCと△DEFにおいて
∠ABC＝∠EDF
∠BCA＝∠EFD
AB＝DE
∴　△ABC≡△DEF

<183>　教材（22）に対する生徒D_2の指導後の応答の考察とその指導

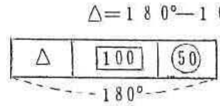
- 考え方だけ指導して応答させたところ，教材(21)の指導前と同じ誤り，つまり2角夾辺相等の条件の適用を誤っている。
- したがって，1週間前の指導の効果が1つも現われていないことになる。
- そこで，先に指導した等式変換から新しい等値関係を導く操作の指導を繰り返した。前回の指導はむずかしすぎるように思われたので，こんどは図形によるとともに，角の表示も簡単にし，式もさらに1本略して指導した。

上



△＝180°−100°−50°

下



△＝180°−100°−50°

$\angle A = 2\angle R - \angle B - \angle C$

$\angle E = 2\angle R - \angle D - \angle F$

$\therefore\ \angle A = \angle E$

- このように指導したのち，応答させたが，前と同じ誤りをおかしたので，助原を与えて次のように応答させた。

<184> 教材（22）に対する生徒D_2の指導による応答

仮定　結論　省略する

証明

$\angle A = 2\angle R - \angle B - \angle C$

$\angle F = 2\angle R - \angle D - \angle F$

$\therefore\ \angle A = \angle F$

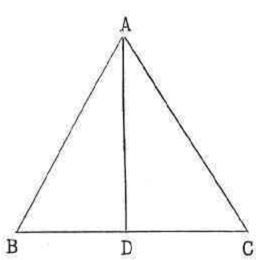
$\angle ABC = \angle EDF$　（仮定）

$AB = DE$　（仮定）

$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

<185> 教材（23）

二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺の中点を通り，底辺に垂直である。



<186> 教材（23）に対する生徒D_2の指導による応答

仮定

$AB = AC$

$\angle BAD = \angle CAD$

結論

$BC \perp AD$　　$BD = DC$

証明

$\triangle ABD$と$\triangle ADC$において

$AB = AC$

$\angle BAD = \angle CAD$

AD 共通

$\therefore\ \triangle ABD \equiv \triangle ACD$

$\therefore\ BD = DC$

$BC \perp AD$

$\therefore\ \angle ADB = \angle ADC = \angle R$

$\therefore\ BC \perp AD$

<187> 教材（23）に対する生徒D_2の指導による応答の考察とその指導

- 生徒D_2は，2等分と2分の区別がはっきりわかってない。また，頂角の二等分線の定式変えが困難である。また，底辺の中点の定式変えも困難である。したがって，これらのことを指導して，$\angle BAD = \angle CAD$，$BD = DC$と定式変えできるようにした。
- 証明について

「$\triangle ABD \equiv \triangle ADC$において」と記述するので，合同の記号を，「と」と訂正させる。

$BC \perp AD$

$\therefore\ \angle ADB = \angle ADC = \angle R$

$\therefore\ BC \perp AD$

のように循環論証をおこなっているので，$\angle ADB = \angle ADC = \angle R$の理由を説明させ，$BC \perp AD$の成立することを話しコトバで証明させる。

- このように指導したのち教材(23)を，自分の力で応答させた。

<188> 教材（23）に対する生徒D_2の指導後の応答

仮定

$AB = AC$

$\angle BAD = \angle CAD$

結論

$BD = DC$

$BC \perp AD$

証明

$\triangle ABD$と$\triangle ADC$において

$AB = AC$

$\angle BAD = \angle CAD$

$\therefore\ BD = DC$

$BC \perp AD$

$\therefore\ \angle ADB = \angle ADC = \angle R$

$\therefore\ BC \perp AD$

<189> 教材（23）に対する生徒D_2の指導後の応答の考察とその指導

- 仮定，結論は正しく書けるようになったが，証明においては，

AD 共通

$\therefore\ \triangle ABD \equiv \triangle ADC$

がおちている。

$BC \perp AD$

$\therefore\ \angle ADB = \angle ADC = \angle R$

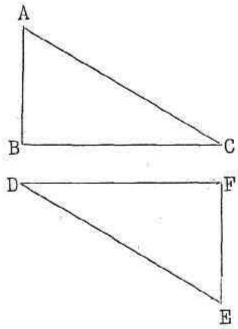
$\therefore\ BC \perp AD$

と，同じ誤りを繰り返している。

• 以上のような誤りに対しては，2辺夾角相等の合同の条件や，平行の条件の指導を繰り返す。

<190> 教材（24）

直角三角形ABCと直角三角形DEFにおいて，∠ABCと∠DFEは直角で，∠ACBと∠FDEは等しい。またACとDEも等しい。この2つの直角三角形は合同であることを証明せよ。



<191> 教材（24）に対する生徒D_2の指導前の応答

仮 定

∠ABC=∠DFE

∠ACB=∠FDE

AC=ED

結 論

△ABC≡△FED

証 明

△ABCと△FEDにおいて

∠ABC=∠DFE=∠R

∠ACB=∠FDE

AC=ED

∴ △ABC≡ FED

<192> 教材（24）に対する生徒D_2の指導前の応答の考察とその後の指導

• 2角夾辺相等の条件を，また誤って適用している。

• したがってかつての指導をまた繰り返した。すなわち，問題の条件を図形に書きこませること，三角形合同のどの条件を選択すればよいか考えさせること，どの角がわからなければならないか考えさせること，その求められる条件（∠BAC=∠DEF）を図形に記入させることなど。

<193> 教材（24）に対する生徒D_2の指導後の応答

• この指導後の応答は，指導前の応答とまったく同じであったので省略する。

<194> 教材（24）に対する生徒D_2の指導後の応答の考察とその後の指導

• この応答を考察すると，指導前の応答に対する指導の効果が，ほとんど現われていない。

• 生徒D_2は過去経験によって，問題解決のとき利用する条件は，問題の文章に書かれてある条件だけであるように考えているらしい。そして，その解決の過程が思考様式として固定しているように思われる。問題によっては，そこに書かれている条件だけでは足りないことがあるわけで，そのときには，必要な条件（∠A=∠E）を求めなければならない。このかくされている条件を探し求める操作が，問題解決における思考過程の論理操作に正しく位置づけられていないのである。言い替えれば，古い論理操作の体系のなかに，新しい論理操作が加算されて，一段と複雑な新しい論理操作の体系がつくられていないのであって，いつまでも古い体系によってだけ操作がおこなわれているのである。これはいわゆる紋切り型の応答である。

したがって，三角形合同の条件の1つである2角夾辺等の条件を，コトバと図形と式が一体になるように指導しても，その効果が問題解決には現われてこないのである。

• 指導について

教材(24)は問題要求より，かくされた条件である∠A=∠Eを求めなければならないこと，∠A，∠Eの求め方について，特に指導を繰り返してから応答させた。

<195> 教材（24）に対する生徒D_2を再び指導した後の応答

再び指導したのちの応答<195>は，指導後の応答<193>とまったく同じであったので省略する。

<196> 教材（24）に対する生徒D_2を再び指導した後の応答の考察とその後の指導

• 再び指導したのちの応答は，指導後の応答とまったく同じであった。次にかかげる指導による応答は，助言を与えながら応答させたものである。

<197> 教材（24）に対する生徒D_2の指導による応答

仮 定

∠ABC=∠DFE=∠R

∠ACB=∠FDE

AC=DE

結 論

$\triangle ABC \equiv \triangle FED$

証　明

$\angle A = 2\angle R - \angle B - \angle C$

$\angle E = 2\angle R - \angle F - \angle D$

$\therefore\ \angle A = \angle E$

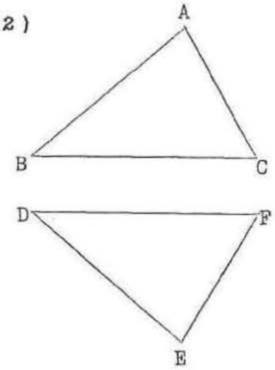
$\angle ACB = \angle FDE$

$AC = DF$

$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle FED$

<198>　教材（22）

$\triangle ABC$と$\triangle DEF$において，$AB=DE$，$\angle ABC=\angle EDF$，$\angle BCA=\angle DFE$，であると，この2つの三角形は，合同であることを説明せよ。



<199>　教材（22）に対する生徒D_2の指導前の応答

仮　定

$\angle ABC = \angle EDF$

$\angle BCA = \angle DFE$

$AB = DE$

結　論

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

証　明

$\triangle ABC$と$\triangle DEF$において

$\angle ABC = \angle EDF$

$\angle BCA = \angle DFE$

$AB = DE$

$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

<200>　教材（22）に対する生徒D_2の指導前の応答の考察とその後の指導

- 生徒D_2は問題解決における操作の一定の様式ができあがっている。それは，2つの三角形の合同の証明においては，まず，「$\triangle ABC$と$\triangle DEF$において」と記述して，次に，表われている条件を書きつらね，「$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle DEF$」として証明を終わるのである。
- このような紋切り型の思考は，表われている条件だけで解決できる単純な問題においては正答になるが教材(22)のように，かくされた条件のある複雑な問題解決には，適用しない。しかし，生徒D_2は，その紋切り型の思考をもって，複雑な問題をも解決しようとして誤答しているのである。
- 指導について

$\angle BCA = \angle DFE$は表われている条件ではあるが，求められる条件ではない。求められる条件は問題の要求より考えて，$\angle A = \angle E$である。したがって，次のような指導を繰り返した。

$\angle A = 2\angle R - \angle B - \angle C$

$\angle E = 2\angle R - \angle D - \angle F$

$\therefore\ \angle A = \angle E$

<201>　教材（23）に対する生徒D_2の応答

仮　定

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

$AB = AC$

$\angle ABD = \angle ACD$　　$\angle BAD = \angle CAD$

結　論

$BD = DC$

$BC \perp AD$

証　明

$\triangle ABD$と$\triangle ACD$において

$AB = AC$

$\angle ABD = \angle ACD$

AD　共通

$\therefore\ BD = DC$

$BC \perp AD$

<202>　教材（23）に対する生徒D_2の応答の考察

- この応答は，さきの教材(23)の応答と比較してたいそう誤りが多くなっている。学習を長い時間（約1時半）重ねることによって疲労し，思考が混乱してきたものと思われる。助言を与えて応答を訂正し，本日の指導を終わる。

(ホ)　生徒D_2の第5回の実験的学習指導の記録

<203>　教材（11）に対する生徒D_2の指導前の応答

仮　定

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$

結　論

　∠C=∠F

証　明

　△ABCと△DEFにおいて

　∠C=2∠R−∠B−∠A

　∠F=2∠R−∠E−∠D

　∴ ∠C=∠E

<204>　教材（11）に対する生徒D_2の指導前の応答の考察とその指導

- この応答は正答といってよいと思われる。
- しかし，∠A=∠D，∠B=∠Eの条件が省略されているので，この省略されていることに気づかせて，さらに応答させた。

<205>　教材（11）に対する生徒D_2の指導後の応答

仮　定

　∠A=∠D

　∠B=∠E

結　論

　∠C=∠F

証　明

　∠C=2∠R−∠B−∠A

　∠F=2∠R−∠E−∠D

　　∠A=∠D

　　∠B=∠E

　∴ ∠C=∠F

<206>　教材（11）に対する生徒D_2の指導後の応答の考察とその後の指導

- このように正しい応答は，すぐれた子どもであっても，むずかしいのである。
- 角の表わし方を詳しく書くようにして，再び応答させた。

<207>　教材（11）に対する生徒D_2の，再び指導した後の応答

仮　定

　∠BAC=∠EDF

　∠ABC=∠DEF

結　論

　∠ACB=∠DFE

証　明

　∠BCA=2∠R−∠ABC−∠BAC

　∠EFD=2∠R−∠DEF−∠EDF

　∠BAC=∠EDF

　∠ABC=∠DEF

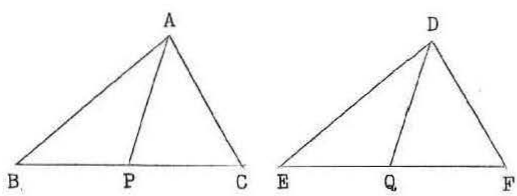
　∴ ∠ACB=∠DFE

<208>　教材（11）に対する生徒D_2の，再び指導した後の応答の考察

- この問題においては，∠A，∠Bのように角を表わしてよいのであるが，複雑な問題においては，∠BAC，∠ABCのように書かなければならない。したがって，劣る子どもの指導においては，単純な問題の指導から，このように詳しい角の表わし方になれさせる必要があるように思われる。
- しかし，生徒D_2は，このように詳しい角の表わし方によっても，正しく応答できるようになった。

<209>　教材（25）

下の図で，△ABC≡△DEF，PはBCの中点，QはEFの中点であると，AP=DQであることを証明せよ。



<210>　教材（25）に対する生徒D_2の指導前の応答

仮　定

　△ABC≡△DEF

　　BP=PC

　　BC⊥AP

　　EQ=QF

　　EF⊥DQ

結　論

　AP=DQ

証　明

　△ABCと△DEFにおいて

$$\because \begin{cases} BP=PC \\ EQ=QF \\ BC\perp AP \\ EF\perp DQ \end{cases}$$

　∴ AP=DQ

<211> 教材（25）に対する生徒D_2の指導前の応答の考察とその後の指導

- この生徒D_2は，先にも述べたとおり，紋切り型に問題を解決している。つまり三角形合同の証明では，まず，「△ABCと△DEFにおいて」と書く。次に，表われている条件を書き，最後に結論を述べる。
- この証明過程は生徒D_2の過去の学習と新しい学習との結果が混乱している。

過去の学習の思考様式	新しい学習の思考様式
△ABPと△DEQにおいて	△ABP≡△DEQ
AB=DE	∵ AB=DE
BP=EQ	BP=EQ
∠B=∠E	∠B=∠E
∴ △ABP≡△DEQ	

- ところで，単純な問題のときは，この思考様式の混乱はおきいようであるが，問題が複雑になると，この2つの形式が混乱して，<210>のような誤りをおかすのである。

<212> 教材（25）に対する生徒D_2の指導による応答

仮定

△ABC≡△DEF

BP=PC

EQ=QF

結論

AP=DQ

証明

△ABPと△DEQにおいて

AB=DE

BP=EQ

∠B=∠E

∴ △ABP≡△DEQ

∴ AP=DQ

<213> 教材（25）に対する生徒D_2の指導後の応答

指導による応答<212>とまったく同じであり，正しく応答されたので省略する。

<214> 教材（25）に対する生徒D_2の指導後の応答の考察

- 角の表わし方は，単純な問題においても，∠B，∠Eのように簡単に書かせることがよいようである。しかし劣る子どもは，複雑な問題にはいる以前に∠ABC，∠DEFと詳しく書き表わすことになれさせることが肝要と思う。
- 証明過程の思考様式を形成させるためには，一時的に，証明過程は，その要点だけを書きとどめさせることもやむを得ないように思われる。たとえば，BP=EQの等式が成立する前提としては，

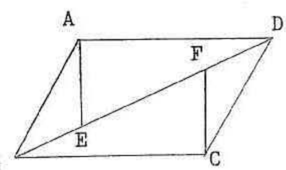
BC=EF

$BP=\frac{1}{2}BC$

$EQ=\frac{1}{2}EF$

との等式が成立し，したがって，BP=EQとなるわけであるが，この過程の記述は省略するのもやむを得ないように思われる。

<215> 教材（7）に対する生徒D_2の指導前の応答



仮定

BE=DF

AB=DC

AD=BC

結論

AE=FC

証明

△ABEと△CFDにおいて

BE=DF

AB=DC

AD=BC

∴ AE=FC

∠ABE=∠CDF

△ABE≡△CDF

∴ AE=FC

<216> 教材（7）に対する生徒D_2の指導

T（教師）	何を証明するの？
D_2（生徒）	AE=FC
T	そのために，何を証明するの？
D_2	△ABE≡△FCD
T	どうして合同になりますか？
D_2	AB=CD，BE=DF，AE=CF，
T	AE=CFを証明するんでしょう。AE=CFはまだわかってない。
T	AE=CFを証明するために何を証明するのですか？
D_2	△ABE≡△FCD

・ 以上の問答のとおり，生徒D_2は，循環論証をおこなっている。
・ 問題要求を明確にすることや，等式の成立する理由を記入させることなどを指導しながら，次のように応答させた。

＜217＞ 教材（７）に対する生徒D_2の指導による応答

仮 定

ＢＥ＝ＤＦ
ＡＢ＝ＤＣ ⎫
ＡＤ＝ＢＣ ⎭ □ＡＢＣＤが平行四辺形だから

結 論

ＡＥ＝ＦＣ………(1)
ＡＥ∥ＦＣ………(2)

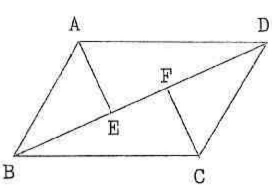
証 明

△ＡＢＥと△ＣＦＤにおいて
ＢＥ＝ＤＦ　（仮定によって）
ＡＢ＝ＤＣ　（仮定）
∠ＡＢＥ＝∠ＣＤＦ　（さっ角で等しい）
２辺夾角が等しいので
△ＡＢＥ≡△ＣＤ
∴　ＡＥ＝ＦＣ
∠ＡＥＦ＝∠ＥＦＣ
さっ角が等しいので
∴　ＡＥ∥ＦＣ

＜218＞ 教材（８）に対する生徒D_2の指導前の応答

仮 定

ＡＤ＝ＢＣ
ＡＢ＝ＤＣ
∠Ｅ＝∠Ｆ



結 論

ＡＥ＝ＣＦ
ＡＥ∥ＣＦ

証 明

△ＡＢＥと△ＣＤＦにおいて
∠Ｅ＝∠Ｆ
ＡＢ＝ＤＣ
∠ＡＢＥ＝∠ＣＤＦ
△ＡＢＥ≡△ＣＤＦ
∴　ＡＥ＝ＣＦ
　　∠Ｅ＝∠Ｆ
∴　ＡＥ∥ＣＦ

＜219＞ 教材（８）に対する生徒D_2の指導前の応答の考察とその後の指導

・ この応答においても，２角夾辺相等の条件を誤って適用している。この誤りに対しては，かっての指導を繰り返す。
・ 等式成立の理由を書かせる指導について

Ｔ（教師）　∠ＡＥＢと∠ＣＦＤはどうして等しいか？
D_2（生徒）　直角であるから。
Ｔ　どうして直角になるのですか？
D_2　錯角だから。
Ｔ　錯角？
D_2　△ＡＢＥと△ＣＤＦは合同だから等しい。
Ｔ　どうして？　文章をよく読みなさい。
D_2　（問題の文章を読む。）
Ｔ　どうですか？
D_2　ＡＥとＣＦは長さが等しくて……
Ｔ　それは結論でしょう。
D_2　アー
Ｔ　（仮定の∠Ｅ＝∠Ｆに，＝∠Ｒと書き加える。）
D_2　ＡＥとＣＦは平行で……
　∠ＡＥＦと∠ＣＦＥで，平行で等しい。
Ｔ　それで？
D_2　ＡＥとＣＦは平行で等しい。
Ｔ　平行で等しいのですか？　文章をよく読んでください。
D_2　（問題の文章を読む。）
Ｔ　∠ＡＥＢと∠ＣＦＤはどうして，直角ですか？
D_2　錯角。
Ｔ　Ａ，Ｃから垂線を引いたからでしょう。ここ（問題の文章で示す）に書いてある。そうでしょう。それではそこに（証明の∠Ｅ＝∠Ｆのところ）に，「仮定」と書きましょう。

・ このように助言を与えながら，次のように応答させた。

＜220＞ 教材（８）に対する生徒D_2の指導による応答

仮 定

ＡＤ＝ＢＣ
ＡＢ＝ＤＣ
∠Ｅ＝∠Ｆ＝∠Ｒ

結 論

ＡＥ＝ＣＦ………(1)
ＡＥ∥ＣＦ………(2)

証 明

△ＡＢＥと△ＣＤＦにおいて
∠Ｅ＝∠Ｆ　（仮定によって）

$AB=DC$ (仮定)

$\angle ABE=\angle CDF$ (さっ角で)

$\angle BAE=2\angle R-\angle B-\angle E$

$\angle DCF=2\angle R-\angle F-\angle D$

$\therefore\ \angle BAE=\angle DCF$

2角夾辺が等しいので

$\triangle ABE\equiv\triangle CDF$

$\therefore\ AE=CF$

$\angle AEF=\angle CFE$

さっ角が等しいので

$\therefore\ AE /\!\!/ CF$

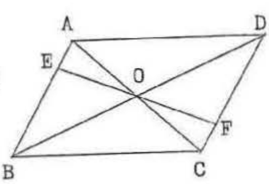
(3) 生徒D_3の実験的学習指導の記録

(イ) 生徒D_3の第1回の実験的学習指導の記録

<221> 生徒D_3に対する三角形合同の条件などの指導

- 三角形の合同の条件を理解させることにつとめる。
  - 話しコトバで表現させる。
  - 文章で書かせる。
  - 図形をかかせる。 ― コンパスで正確にかかせる。
    裏返しの三角形，位置を変えた三角形もかかせる。
    等号も記入させる。
  - 式を書かせる。 例 $\left.\begin{array}{l} AB=A'B' \\ BC=B'C' \\ AC=A'C' \end{array}\right\}$
- 平行四辺形の条件を理解させることにつとめる。
  - 三角形合同の条件の場合と同様に指導する。
  - 話しコトバ，書きコトバ，図形，式の4つは表現は違っても，同じ意味のことを別な形式で表現したものにすぎないことを理解させる。（三角形の場合も同様である。）
- 平行線と交差する直線との関係を理解させることにつとめる。
  - 対頂角，同位角，錯角の性質を理解させる。

<222> 教材（5）に対する生徒D_3の指導による応答



仮 定

□ABCDは平行四辺形

$\begin{pmatrix} AB=DC \\ AD=BC \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} AB /\!\!/ DC \\ AD /\!\!/ BC \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} AO=OC \\ BO=OD \end{pmatrix}$

結 論

Oは線分EFの中点である

$(EO=OF)$

$(\triangle AOE\equiv\triangle FOC)$

証 明

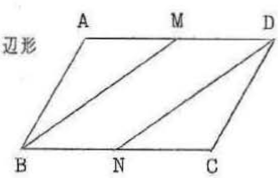
$\triangle AOE\equiv\triangle FOC$

$\because\ \left\{\begin{array}{ll} AO=OC & \text{(対角線の中点)} \\ \angle EAO=\angle OCF & \text{(さっ角)} \\ \angle EOA=\angle FOC & \text{(対頂角)} \\ \text{2角夾辺が等しい} & \end{array}\right.$

$\therefore\ EO=OF$

$\therefore$ Oは線分EFの中点である

<223> 教材（6）に対する生徒D_3の指導による応答



仮 定

四辺形ABCDは平行四辺形

$\begin{pmatrix} AB=DC \\ AD=BC \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} AB /\!\!/ DC \\ AD /\!\!/ BC \end{pmatrix}$

ADとBCの中点をM，Nとすれば，

$\begin{pmatrix} AM=MP \\ BN=NC \end{pmatrix}$

結 論

□MBNDは平行四辺形である

$\begin{pmatrix} MD=BN \\ BM=DN \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} MD /\!\!/ BN \\ BM /\!\!/ DN \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} BM=ND \\ BM /\!\!/ ND \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{pmatrix} BN=MD \\ BN /\!\!/ MD \end{pmatrix}}$

証 明

$\boxed{\begin{array}{l} BN=MD\cdots\cdots\cdots(1) \\ BN /\!\!/ MD\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}}$

$\boxed{(1)\ BN=MD}$

AD＝BC　(平行四辺形の対辺)

$MD=\frac{1}{2}AD$　(仮定)

$BN=\frac{1}{2}BC$　(仮定)

∴　BN＝MD

$\boxed{② \ BN /\!/ MD}$

AD∥BC　(平行四辺形の対辺)

∴　BN∥MD

1組の対辺が等しくて平行であるから

四辺形MBNDは平行四辺形である

<224>　教材(5)，(6)に対する生徒D_3の指導

- 第1に，コンパスを使って図形を正確にかかせる。
- わかっていることを図形に記入させる。
- 次に，仮定を書かせる。
- 図形を見ながら仮定を分析して，わかったことをかっこに入れて書かせる。
- 結論は，問題を定式変えしないで，文章のとおりに書かせる。次に，教材(5)においては，結論を定式変えさせ，かっこに入れて，EO＝OFと書かせる。再び定式変えさせて，補助問題(△AOE≡△FOC)を考えさせ，これを証明すればよいことを確認させる。

  教材(6)においては，結論を分析させ，考えられるあらゆる場合を思いおこさせ，かっこに入れて書かせる。最も適切な条件を選んで四角に囲ませる。
- 「証明」の段階においては，

  教材(5)では，目標(△AOE≡△FOC)を，最初に書き前提を後に書かせる。等式成立の理由をかっこに入れて書かせる。

  教材(6)では，下位目標が2つあるので，(1)と(2)と番号をつけて四角で囲み，仕事が2つあることを確認させる。

  仕事が2つあるので，まず，その1つを書き出して四角で囲ませ，目標を確認させてから仕事を始めさせる。

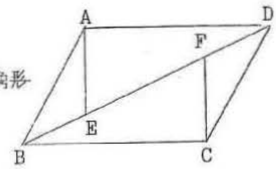
  等式，平行式の成立には，その理由を，かっこして書かせる。
- 生徒の思考を尊重し，発見的に指導する。
- 指導後の感想

  話しコトバによる表現は，比較的容易であるが，同一の内容も書きコトバで表現することはたいそうむずかしい。コトバと図形と式とが，たやすく結びつかない。

  問題解決の見とおしがむずかしい。目標や条件をその要素に分析することはむずかしい。

(ロ)　生徒D_3の第2回の実験的学習指導の記録

<225>　教材(7)に対する生徒D_3の指導による応答



仮　定

四角形ABCDは~~四角形~~

平行四辺形

$\begin{pmatrix} AB=DC \\ AB /\!/ DC \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} AD=BC \\ AD /\!/ BC \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} AB=DC \\ AD=BC \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} AD /\!/ BC \\ AB /\!/ DC \end{pmatrix}$

BE＝DF

~~結　論~~

結　論

AE＝FC ………(1)

AE∥FC ………(2)

証　明

~~∠EAB≡∠FCD~~

~~∠EAB∥∠FCD~~

△ABE≡△~~CDE~~

~~DEC~~

DFC

$\because \begin{cases} AB=CD \\ BE=DF \\ \angle ABE=\angle CDF \end{cases}$

∴　AE＝FC

∠AEB＝∠DFC

∴　∠AED＝∠BFC

∴　AE＝FC

<226>　教材(7)に対する生徒D_3の指導による応答の考察とその指導

- 生徒D_3は，コトバと対象とが特殊な結合をしている。

  調査問題「平行四辺形の条件に関する問題」の応答においては，平行四辺形の図形をかかなければならないのに，正方形の図形をかいており，しかも書きコトバにおいても，「平行四辺形」と書かなければならないのに，「四角形」と書いている。

  この教材(7)の応答においても，生徒D_3は，「ABCDは四角形」と書いて，前日に学習した平行四辺形のことを考えているの

である。つまり，生徒D_3は，四角形というコトバと，正方形の図形がたいそう強く結合している。なお，平行四辺形というコトバと正方形の図形，四角形というコトバと平行四辺形の図形も結合している。つまり，四角形や正方形，平行四辺形の概念が明確でないのである。

- 教材(7)の第1の仕事は，AE＝FCを証明するために定式変えをして，△ABE≡△CDFの補助問題をつくるのであるが，この仕事がむずかしい。しかしこの仕事は助言によってはできるのであるが，自分から考えだすことができない。
- 三角形合同の証明はどう考えればよいかわからない。三角形合同の条件は知っているが，それが問題解決の観点として現われてこない。
- ∠AEB＝∠DFCから，∠AED＝∠BFCを導く操作が，話しコトバでも，書きコトバでもたいそうむずかしい。

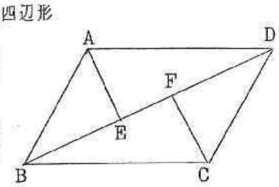
次に教材(7)の指導を述べる。

- 子どもが，自分で考え，自分で困難点を打開していくようにさせた。誤りはそのたびごとに訂正させ，子どもがゆきづまると助言を与えて自ら打開していくように指導した。
- 四角形，正方形，平行四辺形の概念を明確にするため，それぞれの図形をかかせ，それらの図形の性質を比較考察させた。
- 2つの三角形合同の条件や2つの直線の平行の条件は，1日目に生徒D_3が書いた用紙を見せながら考えさせた。
- 等式変換の操作は，図や式によって説明させたり，式に書かせたりして理解させることにつとめた。

<227> 教材（8）に対する生徒D_3の指導による応答

仮　定

□ABCDは平行四辺形



（AB＝DC
AD＝BC）

（AD∥BC
AB∥DC）

~~AE＝FC~~

AE⊥BD

CF⊥DB

結　論

AE＝CF

AE∥CF

証　明

AB＝CD

~~∠DFC⊥BEA~~

∠ABE＝∠CDF

∠EAB＝∠FCD

△ABE≡△~~DFC~~
CDF

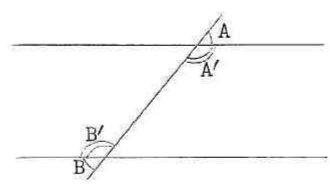
∴　AE＝FC

∠AED＝∠CFB

∴　AE≠FC
∥

<228> 教材（8）に対する生徒D_3の指導による応答の考察とその指導

- 教材(8)の図形を正しくかけない。（最初は図形を見せずに，問題の文章を読ませてから図形をかかせる。）
- 垂線の意味がわからない。直角と垂直の関係がわからない。
- AE＝FCを証明するには，△ABE≡△CDFを証明すればよいことがわからないようだ。
- 次のような等式変換から，新しい等値関係を導く操作がむずかしい。



∠A＝∠B

∠A＋∠A′＝2∠R

∠B＋∠B′＝2∠R

∠A′＝2∠R−∠A

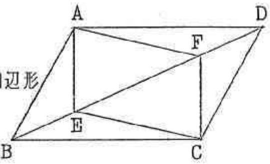
∠B′＝2∠R−∠B

∴　∠A′＝∠B′

- 2直線が平行になるための条件を知っていても，その知識を，2直線が平行であることの証明に適用することができない。
  つまり，習得した知識の適用練習が必要になる。
- これらに対する指導は，形式的論理的思考を具体的直観的思考に対応させながら，書きコトバによる表現と話しコトバによる表現によって習得させるようにしなければならないと思われる。言い替えれば，図形をかいて，それに名称や記号を記入させ，話しコトバによってその論理を発表させたり，式に書かせたりして説明させるようにする。
- 知識が観点として働くためには，問題場面に適用する経験を積み重ねて，絶えず反省させ，可逆的思考になれさせることであろう。この場合，書きコトバによる表現を話しコトバによって表現させるのである。言い替えれば，記述した論証過程を子どもに説明させるのである。

(ハ) 生徒D_3 の第3回の実験的学習指導の記録

＜229＞ 教材（2）に対する生徒D_3の指導による応答



仮 定

□ABCDは平行四辺形

BE=DF

結 論

□AECFは平行四辺形

(AE=CF………①

AF=CE………②)

証 明

① AB=CD （仮定）

BE=DF （仮定）

∠ABE=∠CDE （さっ角）

∴ △ABE≡△CDF 2角夾辺が等しいから

∴ AE≢=CF

② △ADF≡△CBE

AB=BC

AD=BC （仮定）

BE=DF （仮定）

∠ADF=∠CBE （さっ角）

∴ △A 2角夾辺が等しいから

∴ AF=EC

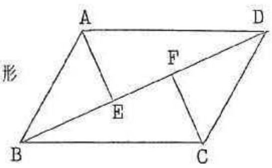
∴ □AECFは平行四辺形である

二組の辺がそれぞれ等しいから

＜230＞ 教材（2）に対する生徒 の指導による応答の考察

- 仮定，結論と書くことを忘れている。
- 証明という漢字を忘れている。
- 等号（二），合同の記号（三），平行の記号（∥）を誤って使っている。
- 問題解決のとき，初めから「この辺とこの辺が等しく，この辺とこの辺が等しく」などと言いだす。何を証明するのか目標をはっきりとつかんでいない。ただ意味のない操作を機械的に繰り返しているようである。しかし「何を証明しようとするの?」と尋ねるとしばらく考えてから正しく答えられる。つまり内言語としては目標をもってるのであるが，それが外言語としては，容易に表われない。したがって，考えを発表させる練習が重要と思われる。
- AB=CD，BE=DFと記述しているので，「なぜ，AB=CD，BE=DFなのですか?」と尋ねても答えられない。したがって，理解して記述しているのではなく単に以前の操作を断片的に思い出して機械的に，自分にとっても意味のわからない操作を繰り返しているのである。そこで，AB=CDなどの等式の成立する理由を説明して理解させたり，また，（仮定より），（錯角）などのように， 等式に，その等式の成立する理由を記入させる。

＜231＞ 教材（3）に対する生徒D_3の指導による応答



仮 定

□ABCDは平行四辺形

~~BE=DF~~

AE⊥BE

DF⊥CF

結 論

□AECFは平行四辺形

(AE=FC………①

AF=EC………②)

証 明

① AB=DC （仮定）

~~BE=DF~~

∠ABE=∠CDF （さっ角）

∠EAB=∠FCD

∴ △ABE≡△CDF 2角夾辺が等しいから

∴ AE=CF

② AD=BC （仮定）

BE=DF （三角形合同）

~~∠DAF=∠BCE~~

∠ADF=∠CBE （さっ角）

∴ △DAF≡△BCE 2辺夾角が等しいから

∴ AF=CE

∴ □AECFは~~二辺とその間の角が等しい~~ことで平行

二組のむかいあった辺がそれぞれ等しい四辺形である。

＜232＞ 教材（3）に対する生徒D_3の指導による応答の考察

- 生徒D_3は，おちついてしっかり考えることのできない子どものようである。したがって問題の文章を吟味することなく，直ちに前問題の解法を思いおこして問題解決にとりかかる。

（BE=DFなど）

• 垂直の意味を尋ねると，直角に交わることであると答えられるが，AE⊥BE，DF⊥CFのように式で書くことができない。
• 証明過程を自由に書かせると，新しい学習の思考様式によらないで，過去の学習の思考様式による<211>。
• 思考が断片的で，全体を見とおすことが，たいそうむずかしい。

<233> 教材（5）に対する生徒D_3の指導による応答

仮　定

□ABCDは平行四辺形

~~ACとBDの交点をOとする~~

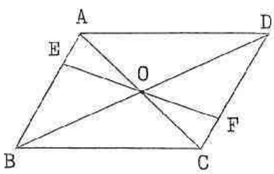
結　論

~~AD＝BC~~

~~AB＝DC~~

AO＝OC

~~BO＝OD~~



∠EAO＝∠FCO

∠EOA＝∠FOC

∴　△OAE≡△FOC

∴　EO＝OF

<234> 教材（5）に対する生徒D_3の指導による応答の考察

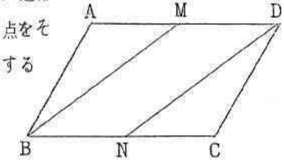
• この問題は第1回に指導した。
• 応答を説明させると，誤りをおかしながらも，しだいに順序だてて，話すことができるようになる。
• 記述させると，前掲の応答のように誤りも多いが，それにしても調査問題(5)の応答と比較して格段の進歩がみられる。
• 記述する場合は，必要な条件でもない，ただ知っていることを，つぎつぎと書きならべる傾向がある。

<235> 教材（6）に対する生徒D_3の指導前の応答

仮　定

ABCDは平行四辺形

AD，BCの中点をそれぞれM，Nとする



結　論

MB＝DN

証　明

AB＝DC

AM＝MD

BN＝NC

MD＝BN

∴　MB＝DN

∴　MBNDは平行四辺形

<236> 教材（6）に対する生徒D_3の指導による応答

仮　定

□ABCDは平行四辺形

AD，BCの中点をそれぞれM，Nとする

（AM＝MD，BN＝NC）

結　論

□MBNDは平行四辺形

（BM＝ND………(1)

MD＝BN………(2)）

証　明

AB＝DC　（仮定）

AM＝NC

∠BAM＝∠DCN　（対角）

∴　~~BM＝ND~~　二辺夾角等しいから

∴　△BAM≡△DCN

∴　BM＝ND

また　MD＝BN

∴　□BMDNは平行四辺形である

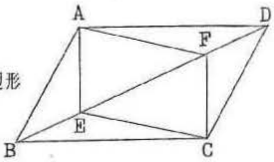
むかいあった辺がそれぞれ等しいから

<237> 教材（6）に対する生徒D_3の指導による応答の考察

• 劣る子どもの中の上位の子ども（これをC群の子どもという。）は，解決の方向をしめし，つまずきに助言を与えると，自分の力で問題解決の操作をすすめることができるようであるが，生徒D_3のように，劣る子どもの中の下位の子ども（これをD群の子どもという。）は，それだけの指導では，操作がすすまない。
• たとえば，教材(6)を，2組の対辺相等の条件によって解いているが，これは助言を与えながら操作をすすめさせたものである。また，条件分析も，かって指導されたことを繰り返しているにすぎない。
• 平行四辺形に関する問題解決のとき，どの条件を適用すればよいかと考えられるのは，C群の子どもであって，D群の子どもは，このような条件の選択，つまり観点の変更はむずかしい。
• しかしこれまでの指導によって，生徒D_3は，「よくわかった。おもしろくなった。ためになった。」と言っていた。

(二)　生徒D_3の第4回の実験的学習指導の記録

<238> 教材（2）に対する生徒D_3の指導前の応答



仮　定

ＡＢＣＤは平行四辺形

ＢＥ＝ＤＦ

結　論

（ＡＥ＝ＦＣ………①
ＡＦ＝ＥＣ………②）

証　明

①　ＡＥ⊥ＢＥ

ＣＦ⊥ＤＦ

ＡＢ＝ＣＤ

∠ＡＢＥ＝∠ＤＦ

∴　ＡＥ＝ＦＣ

②　ＡＤ＝ＢＣ

ＢＥ＝ＦＤ

∠ＥＢＣ＝∠ＦＤＡ

∠ＤＡＦ＝∠ＢＣＥ

∴　ＡＦ＝ＥＣ

∴　ＡＥＣＦは平行四辺形

<239> 教材（2）に対する生徒D_3の指導前の応答の考察とその後の指導

- この教材(2)を前回は，助言しながら応答させた。しかし，その練習の効果が，この応答に現われていない。
- 仮定という漢字を忘れている。しかし，「仮定とはなんのことか?」と尋ねると「わかっていること」と答えられる。
- 証明において，「ＡＥ⊥ＢＥ，ＣＦ⊥ＤＦ」と書いている。これはかって応答した経験のある類似問題の条件を思い出して，うかつに書いているのであろう。問題の文章を深く読まない。
- しかし，それとは別に，△ＡＢＥと△ＣＤＦの合同を証明しようと考えていることは，子どもの問答によって推測できるが，これとて，問題の文章を読解し，図形を見て，推論をすすめ，この2つの三角形の合同を証明をしなければならないと判断してのものかどうか疑問である。
- 生徒D_3は，「合同」のことを「等しい」と言う。
- 証明の前半においては，合同の条件が正しくそなわっていない。それにしても，今回は，何を証明しようとしているのか目標（ＡＥ＝ＦＣ）を明確に言うことができた。そのために何を証明すればよいのか（△ＡＢＥ≡△ＣＤＦ）の質問にも正しく答えることができた。
- しかし，合同の条件を正しくあげていない。合同の条件を考える場合，「仮定」や「図形」の分析を忘れて，ただ考えているだけである。問題を解くとき，「仮定」より必要な条件を分析しなければならないという心構えが身についていない。「仮定をよくみて」と注意すると気づいて，仮定の分析を始める。
- 証明の後半も，2つの三角形の合同を証明しようとしている意図は推測できる。ただ，∠ＤＡＦ＝∠ＢＣＥの不当の等式を記述していることによって，合同の条件の操作が正しく身についていないことがよくわかる。
- 証明の前半においても，後半においても，△ＡＢＥ≡△ＣＤＦ，△ＢＣＥ≡△ＡＦＤという2つの下位目標が省略されている。このような誤りは劣る子どもの特徴であろう。
- それにしても，見とおしをもって問題解決を考えられるようになったと思われる。
- これからの指導

助言を与えながら，子どもに考えさせ，発表させ，記述させ，理由を説明させて応答させる。特に重要なことは，証明過程をふり返ってみさせること，自分の前の応答と，助言による応答とを，比較させることである。

<240> 教材（2）に対する生徒D_3の指導による応答

仮　定

□ＡＢＣＤは平行四辺形　　ＢＥ＝ＤＦ

結　論

□ＡＥＣＦは平行四辺形

（ＡＥ＝ＦＣ………①
ＡＦ＝ＥＣ………②）

証　明

①　$\boxed{\text{ＡＥ＝ＦＣ}}$

ＡＢ＝ＣＤ　（仮定）

ＢＥ＝ＤＦ　（仮定）

∠ＡＢＥ＝∠ＣＤＦ　（さっ角）

2辺とはさむ角が等しい

∴　△ＡＢＥ≡△ＤＦＣ

∴　ＡＥ＝ＦＣ

②　$\boxed{\text{ＡＦ＝ＥＣ}}$

ＡＤ＝ＢＣ　（仮定）

ＢＥ＝ＤＦ　（仮定）

∠ＡＤＦ＝∠ＥＢＣ　（さっ角）

2辺とはさむ角が等しい

∴　△ＡＦＤ≡△ＢＥＣ

∴　ＡＦ＝ＥＣ

むかいあった辺がそれぞれ等しい

∴ □ＡＥＣＦは平行四辺形

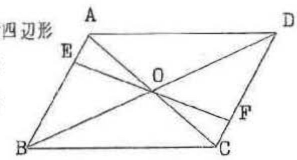
<241> 教材（5）に対する生徒D_3の指導前の応答

仮　定

ＡＢＣＤは平行四辺形

ＡＯ＝ＯＣ

ＢＯ＝ＯＣ



結　論

ＥＯ＝ＯＦ

証　明

ＡＯ＝ＯＦ

∠ＡＯＥ＝∠ＦＯＣ

ＡＥ＝ＣＦ

∠ＯＡＥ＝∠ＯＣＦ

∴ △ＡＥＯ＝ＣＦＯ

∴ ＥＯ＝ＯＦ

<242> 教材（5）に対する生徒D_3の指導前の応答の考察とその指導

- この問題は，かって2回も指導した。したがって，この応答は，前のものに比べて，格段の進歩がみられる。三角形の合同については，筋道をたてて考えているように思われる。ただし，この応答はＡＥ＝ＣＦという過剰の条件をつけ加えている。

Ｔ（教師）　これは，何を証明しようとしているの？

D_3（生徒）　これと，これが等しい。（△ＡＯＥ≡△ＣＦＯ）

Ｔ　そうですね。

しかし，ＡＥとＣＦはどうして等しいのですか？

D_3　これとこれが等しいためには，（2つの三角形が合同であること）これとこれが等しい。（ＡＥ＝ＣＦのこと）

Ｔ　いまは，これとこれ（2つの三角形のこと）が合同だということを証明するのですね。それにはこれとこれ（ＡＯとＯＣ）が等しい。この角とこの角（対頂角）が等しい。もう1つどれが等しくなければならないのですか？

D_3　（返答なし）

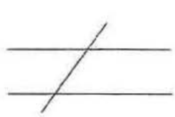
Ｔ　この角とこの角（∠ＥＡＯと∠ＯＣＦ）はどうですか？

D_3　同位角

Ｔ　同位角？

D_3　錯角

Ｔ　錯角ですね。

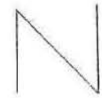


（教師は右のような図形を書く。）

Ｔ　どれが錯角ですか？

D_3　（正答）

（教師は右の図のような図形をかく。）



Ｔ　この図では，どれが錯角ですか？

D_3　（正答）

Ｔ　1辺と両端の角が等しいから，この2つの三角形は合同ですね。

それで？

D_3　ＥＯ＝ＯＦ

Ｔ　そうですね。

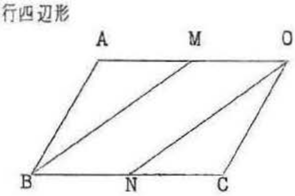
<243> 教材（6）に対する生徒D_3の指導前の応答

仮　定

ＡＢＣＤは平行四辺形

ＡＭ＝ＭＤ

ＢＮ＝ＮＣ



結　論

ＭＢ＝ＤＮ

証　明

ＡＭ＝ＭＤ

ＢＮ＝ＮＣ

ＡＢ＝ＤＣ

∠ＭＡＢ＝∠ＮＣＤ

∴ ＭＢ＝ＤＮ

<244> 教材（6）に対する生徒D_3の指導前の応答の考察

- この教材も，かって2回も指導したのであるが，生徒D_3は，このように思考段階が2回ある問題においては，証明過程の全体を見とおして考えることが困難である。
- 結論として，ＭＢ＝ＤＮをあげているが，これは，問題要求の成立する1つの条件にすぎない。
- 「この問題を証明するにはどうすればよいですか？」との問いには，「ＢＮ∥ＭＤ，ＢＭ∥ＮＤを証明すればよい。」と答えられる。「まだその外に？」との問いには，「ＢＭ＝ＮＤ，ＭＤ＝ＢＮ」とも答えられる。口頭では正しく答えることができるのであるが，自分の力で文章で書き表わすことができない。

<245> 教材（6）に対する生徒D_3の指導による応答

仮　定

□ＡＢＣＤは平行四辺形

ＡＭ＝ＭＤ

ＢＮ＝ＮＣ

結　論

□MBNDは平行四辺形

$$\left(\begin{array}{l}MD=BN\cdots\cdots\cdots(1)\\BM=ND\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}\right)$$

証　明

(1) $\boxed{MD=BN}$

AM＝MD　(仮定)

BN＝NC　(仮定)

AD＝BC　(仮定)

∴　MD＝BN

(2) $\boxed{BM=ND}$

AB＝DC　(仮定)

AM＝NC

∠MAB＝∠NCD　(対角)

∴　△ABM≡△DCN

∴　BM＝ND

∴　□MBNDはむかいあった辺がそれぞれ等しいことから平行四辺形

＜246＞　教材（６）に対する生徒D_3の指導による応答の考察

- 仕事の(1)である「MD＝BN」を証明しなければならないのであるが，このことを尋ねると「それはもうわかっている。」と言う。「なぜですか？」の問いに対しては，問題の文章の仮定のところを読んで答える。「それでは，図について説明してください。」

「MはADの中点だから，これとこれ（AMとMD）は，等しいでしょう。NはBCの中点だから，これとこれ（BNとNC）は等しいでしょう。だから，これとこれ（MDとBN）は等しいでしょう。」と言う。これは，AD＝BC　が前提になっているのであるが，AD＝BC　は外言語として出てこない。助言によって，「AD＝BCであるから」と答える。

- したがって，指導前の応答においては，MD＝BNの証明は省略されているが，生徒D_3にとっては，それは当然なのであって，ことさら書かなくても，わかりきっているものなのである。論証の表現形式になれていないということがいえる。
- 証明の(2)の仕事については 筋道をたてて考えているが，その目標（△ABN≡△NCD）が省略されている。

T　なにを証明しなければならないの？

D_3　三角形ABMと三角形DCNの合同

T　それでは，どの辺とどの辺が等しくなければなりませんか？

D_3　AB＝CD，MD＝BN

T　もう1つなにか等しくなければなりませんね。

D_3　これとこれ（∠Aと∠C）

T　等しいわけは？

P　これとこれ（△ABMと△DCN）が等しくなるためには，2辺とはさむ角が等しくなければならないから，これとこれ（∠Aと∠C）が等しい。（循環論証）

T　平行四辺形の対角は？

D_3　等しい。

T　だから，これとこれ（∠Aと∠C）は等しいのですね。

D_3　そう。

T　この三角形とこの三角形（△ABMと△DCN）の合同のわけは？

D_3　2辺とそのはさむ角が等しいから。

T　それで？

D_3　BM＝ND

T　であるから？

D_3　□MBNDは，むかいあった辺が，それぞれ等しいことから，平行四辺形。

T　そうですね，たいそうよくわかってきました。

（4）　生徒C_1の実験的学習指導の記録

（イ）　生徒C_1の第1回の実験的学習指導の記録

省略する。

（ロ）　生徒C_1の第2回の実験的学習指導の記録

＜247＞　教材（9）に対する生徒C_1の指導による応答

仮　定

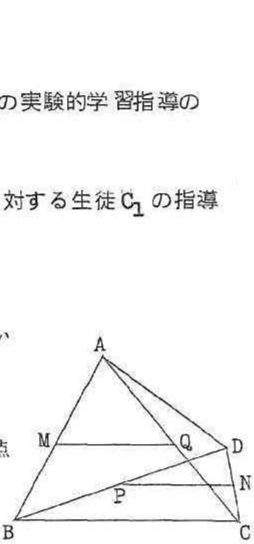
AB　BCが平行でない

AM＝MB

DN＝NC

対角線BD　ACの中点

$$\left(\begin{array}{l}AQ=QC\\BP=PD\end{array}\right)$$



結　論

MQ＝PN………(1)

MQ∥PN………(2)

証 明

$\boxed{MQ=PN\cdots\cdots\cdots(1)}$

$\triangle ABC \backsim \triangle AMQ$

$$\because \begin{cases} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} \\ \angle BAC=\text{共通} \end{cases}$$

$\therefore\ \frac{1}{2}BC=MQ$

$\triangle DBC \backsim \triangle DPN$

$$\because \begin{cases} \dfrac{DP}{DB} = \dfrac{DN}{DC} \\ \angle BDC=\text{共通} \end{cases}$$

$\therefore\ \frac{1}{2}BC=PN$

$\therefore\ MQ=PN$

$\boxed{MQ\parallel PN\cdots\cdots\cdots(2)}$

$\triangle ABC$と$\triangle AMQ$において

$\angle AMQ=\angle ABC$

$\therefore\ MQ\parallel BC$

$\triangle DBC$と$\triangle DPN$において

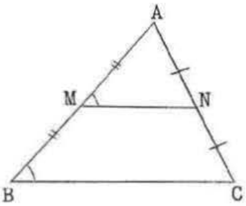
$\angle DPN=\angle DBC$

$\therefore\ PN=BC$

$\therefore\ MQ\parallel PN$

<248> 教材（9）に対する生徒C_1の指導による応答の考察

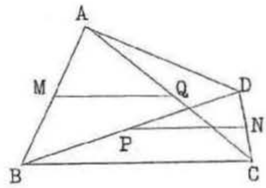
- この応答は，中点連結の定理を指導したのちに書かせたものであるが，その中点連結の定理を適用しようとしないで，初めから証明をおこなっている。これは，クリカエシの証明である。この応答では正しく書かれているが，指導前の応答においては$\frac{1}{2}BC=MQ$， $\frac{1}{2}BC=PN$， $\therefore MQ=BC$，$\therefore PN\parallel BC$を書きおとしていた。このように問題が複雑になると目標（この場合では下位目標）を書きおとすことが多いようである。
- 教材(9)に応答させる前に中点連結の定理を指導したので，そのさいのつまずきについて次に述べる。



$\triangle AMN \backsim \triangle ABC$の証明ののち，

T　「どういうわけで，$MN\parallel BC$になりますか？」

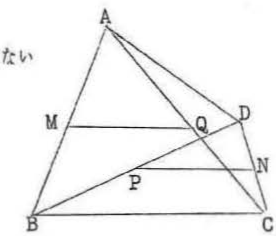
C_1　「同位角が等しいから」， T「それでは，$\angle M$と$\angle B$の等しいわけは？」の質問には答えることができない。



左の図で，MQはBCの半分であり，PNはBCの半分であると，MQとPNは等しいことは，説明することはできる。しかし，この操作を次のように式で表わすことができない。

$\frac{1}{2}BC=MQ$，$\frac{1}{2}BC=PN$　$\therefore$　$MQ=PN$

<249> 教材（9）に対する生徒C_1の指導による応答



仮 定

AD，BCが平行でない

$AM=MB$

$DN=NC$

$AQ=QC$

$BP=PD$

結 論

$MQ=PN\cdots\cdots\cdots(1)$

$MQ\parallel PN\cdots\cdots\cdots(2)$

証 明

中点連結の定理により

$MQ\parallel BC$

$MQ=\frac{1}{2}BC$

$PN=\frac{1}{2}BC$

$PN\parallel BC$

中点連結の定理により

$MQ\parallel BC$

$PN\parallel BC$

$\therefore\ MQ\parallel PN$

中点連結の定理により

$MQ=\frac{1}{2}BC$

$PN=\frac{1}{2}BC$

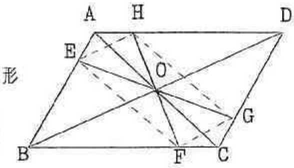
$\therefore\ MQ=PN$

<250> 教材（9）に対する生徒C_1の指導による応答の考察

- この応答の形式はまずいと思われるが，指導の最初としては止むを得ない。
- 知っている定理は問題解決に適用すると能率的であることを経

験をとおして理解させなければならない。

<251> 教材（10）に対する生徒C_1の指導前の応答の前半



仮　定

ABCDは平行四辺形

$\begin{pmatrix} AO=OC \\ BO=OD \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} EO=OG \\ FO=OH \end{pmatrix}$

結　論

EFGHを結ぶと平行四辺形

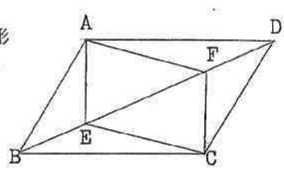
$\begin{pmatrix} HO=OF \\ EO=OG \end{pmatrix}$

<252> 教材（10）に対する生徒C_1の指導前の応答の考察

- 条件分析において，EO＝OG，FO＝OHとしているのは，直観的思考によるものと思われる。
- 結論において，HO＝OF，EO＝OGと正しく目標分析をおこなっているのは，単なる経験の再生と思われるが，新しい問題において，このように正しく目標分析をおこなえるなら，すぐれた子どもにも劣らない学力をもっているといってよい。

(ハ) 生徒C_1の第3回の実験的学習指導の記録

<253> 教材（2）に対する生徒C_1の指導による応答



仮　定

□ABCDは平行四辺形

対角線BDに2点E，F

をとる。

BE＝DF

結　論

□AECFは平行四辺形

$\begin{pmatrix} AE /\!/ FC \\ AF /\!/ EC \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{pmatrix} AE=FC \\ AF=EC \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots\cdots(1) \\ \cdots\cdots(2) \end{matrix}}$

証　明

$\boxed{(1)\quad AE=FC}$

△ABE≡△FCD

$$\because \begin{cases} AB=DC & \text{（仮定）} \\ BE=DF & \text{（仮定）} \\ \angle ABE=\angle CDF & \text{（錯角）} \end{cases}$$

∴　AE＝FC

$\boxed{(2)\quad AF=EC}$

△ADF≡△BFC

$$\because \begin{cases} BC=AD & \text{（仮定）} \\ BE=FD & \text{（仮定）} \\ \angle EBC=\angle ADF & \text{（錯角）} \end{cases}$$

∴　AF＝EC

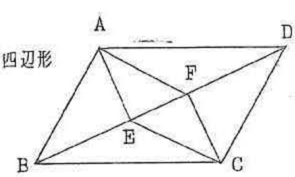
あい対する2辺が等しいから

∴　□AECFは平行四辺形

<254> 教材（2）に対する生徒C_1の指導による応答の考察とその指導

- 仮定を分析して，その結果を結論に書いている。つまり仮定と結論とを，とり違えて分析している。
- 条件の分析の結果を図形に記入させる。
- 次に，結論を分析させる。分析した結果を説明させる。分析したことの中で，必要と思われるものを2つ，3つ記述させる。その記述させた目標分析の結果をなかだちにして，図形を見ながら観点の変更をおこなわせる。

<255> 教材（3）に対する生徒C_1の指導による応答



仮　定

□ABCDは平行四辺形

(AB $\underline{/\!/}$ CD)

(AD $\underline{/\!/}$ BC)

BF⊥AE

DE⊥CF

結　論

□AECFは平行四辺形

(AE $\underline{/\!/}$ FC)

証　明

$\boxed{(1)\quad AE=FC}$

△ABE≡△DFC

$$\because \begin{cases} AB=DC \quad \text{（仮定）} \\ \angle AEB=\angle DFC=\angle R \quad \text{（仮定）} \\ \angle ABE=\angle FDC \quad \text{（錯角）} \end{cases}$$

∴　AE＝FC

② AE∥FC

∠AEB=∠DFC=∠R

∠AEF=∠CFD　(さっ角)

∴　AE∥FC
　　AF=FC　} から□AECFは平行四辺形

<256> 教材（3）に対する生徒C_1の指導による応答の考察

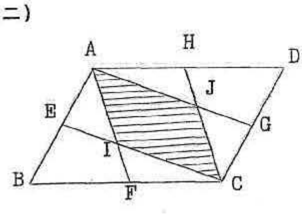
- ①の証明は，直角三角形合同の条件を適用しないで，2角夾辺相等の条件を誤って適用している。
- 次のような等式変換によって，新しい等値関係を導くことがたいそうむずかしい。

∠B=∠D
∠A+∠B=∠R
∠D+∠C=∠R
∴ ∠A=∠R−∠B
　∠C=∠R−∠D
∴ ∠A=∠C

∠A=∠D
∠B=∠F
∠A+∠B+∠E=2∠R
∠D+∠F+∠C=2∠R
∴ ∠E=2∠R−∠A−∠F
　∠C=2∠R−∠D−∠F
∴ ∠E=∠C

(二) 生徒C_1の第4回の実験的学習指導の記録

<257> 教材（二）



右の図の平行四辺形ABCDで，E，F，G，Hは各辺の中点である。斜線を引いた図形が平行四辺形になることを証明せよ。

（調査問題（二）と同一問題であるが，ここに教材（二）としてかかげる）

<258> 教材（二）に対する生徒C_1の指導前の応答

仮　定

ABCDは平行四辺形
　AE=EB
　BF=FC
　CG=GD
　DH=HA

結　論

AICJは平行四辺形

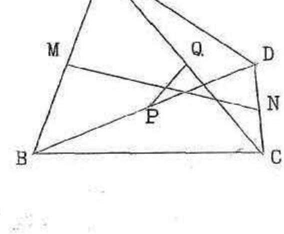
証　明

△ABF≡△HCD
{ AB=DC
　∠ABF=∠CDH
　BF=HD }
∴ ∠AFB=∠DHC
　∠DHC=∠HCF　(さっ角)
　∠AFB=∠HCF　(同位角)
∴　AI∥JC

<259> 教材（二）に対する生徒C_1の指導前の応答の考察

- 結論「□AICJは平行四辺形」を分析して
　(AI∥JC………①
　　AJ∥IC………②)
のように書くことは，新しく指導したのであるが，いまだに身についていない。目標分析をしていないので，2つの下位目標（AI∥JC，AJ=IC）が，はっきりとわかっていない。したがってこの応答で証明しているのは，下位目標の1つであるAI∥JCだけである。生徒C_1は，AI∥JCの証明だけで，仕事を終わったと考えている。
- 1つの下位目標だけでも，この応答のように，筋道をたてて考えられるようになったことは，生徒C_1にとっては大きな進歩である。
- このように思考段階が2回ある問題においては，最初，全体を見とおし，次に順序正しく部分を解決し，最後に全体をまとめなけ誠ばならないが，このような操作は，たいそうむずかしい。

<260> 教材（4）に対する生徒C_1の指導による応答



仮　定

AM=MB
DN=NC
AQ=QC
BP=PD

結　論

AB，CD

の中点を結ぶ線分と2つの対角線AC，BDの中点を結ぶ線とはたがいに他を2等分する。

$$\begin{pmatrix} MO=ON \\ PO=OQ \end{pmatrix}$$

証　明

MPNQを結ぶ

□MPNQは平行四辺形

$$\begin{pmatrix} MQ \parallel PN \cdots\cdots\cdots ① \\ MQ=PN \cdots\cdots\cdots ② \end{pmatrix}$$

① MQ∥PN

中点連結の定理によって

BC∥MQ

BC∥PN

∴ MQ∥PN

② MQ=PN

$\frac{1}{2}$BC=MQ

$\frac{1}{2}$BC=PN

∴ MQ=PN

一辺が等しくて平行だから

□MPNQは平行四辺形である

∴ MN，PQはたがいに他を二等分する

<261> 教材（4）に対する生徒 C_1 の指導による応答の考察

- 調査問題(4)の正答者は，92名中，3人にすぎなかった。
- 結論を定式変えして，MO=ON，PQ=OQと書き，この2つの条件を満足させようとして問題解決にあたった子どもが多くいたがこの問題のむずかしいところは，基本問題を，定式変えして，□MPNQは平行四辺形であるという補助問題に置き替えることにある。この操作の助言をうければ，中点連結の定理を知っている子どもにとっては，それほどむずかしい問題ではない。

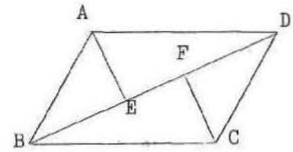
（5） 生徒 C_2 の実験的学習指導の記録

（イ） 生徒 C_2 の第1回の実験的学習指導の記録

<262> 教材（8）に対する生徒 C_2 の指導による応答

仮　定

□ABCDは平行四辺形



AE⊥BE

FC⊥FD

結　論

AE=FC………①

AE∥FC………②

証　明

△ABE≡△FDC

$$\because \begin{cases} AB=DC \\ AE\perp BE \quad FC\perp FD \\ \angle AEB=\angle R \\ \angle DFC=\angle R \\ \angle ABE=\angle FDC \quad (\text{さっ角}) \\ \angle BAE=\angle FCD \end{cases}$$

∴ AE=FC

∠AED=∠R

∠BFC=∠R

∴ AE∥FC

<263> 教材（8）に対する生徒 C_2 の指導による応答の考察

- 思考の切り替えが困難である。△ABE≡△CDFの証明においては最初，平行四辺形ABCDに着目し，条件分析をおこなって，AB=CD，∠AEB=∠DFCを抽象し，次にまた思考の切り替えをおこなって，△ABE，△CDFに着目し，∠BAE=∠FCDの証明を考えなければならない。このように思考を切り替えることは，図形の構造を再構成することになり，また，図形の各線分の機能を転換することにもなる。たとえば，△ABE≡△CDFにならないかと考えるときは，AB，CDは，それぞれの三角形の1辺の働きをしているが，AB=CDではないかと考えるときは，AB，CDは，平行四辺形の対辺としての働きをしているのである。
- このように，思考の切り替えをして図形を再構成することは，すぐれた子どもは容易であるとしても，劣る子どもはたいそう困難であり，かりに思考の切り替えがおこなわれたとしても，それは見とおしによるものでなく，断片的な経験の再生のように思われる。
- 書きコトバにおいて，論点窃取の誤りをおかした場合は，書かれた応答を調査することによって直ちにその誤りを教師は発見できるのであるが，問題解決における予想のたて方は，書かれた応答だけではわからない。劣る子どもの予想のたて方は，直前に解答した問題の予想のたて方を再生しているように思われる。言い替えれば目標分析や条件分析をおこなわず，直前の問題の解き方や過去経験の操作を単に再生しているように思われることが多い。

(ロ) 生徒C_2の第2回の実験的学習指導の記録

<264> 教材（1）に対する生徒C_2の指導前の応答

仮 定

四角形ＡＢＣＤは平行四辺形

ＡＭ＝ＭＤ

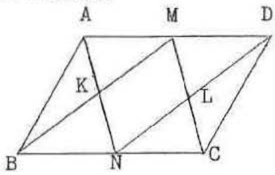
ＢＮ＝ＮＣ

ＡＫ＝ＮＫ

ＢＫ＝ＫＭ

ＭＬ＝ＬＣ

ＮＬ＝ＬＤ



結 論

四角形ＭＫＮＬは平方四辺形

（ＫＭ＝ＮＬ………①
　ＫＮ＝ＭＬ………②）

証 明

① △ＡＫＭ≡△ＮＣＬ

∵ {ＡＭ＝ＮＣ, ＡＫ＝ＬＣ, ∠ＭＡＫ＝∠ＬＣＭ}

∴ ＭＫ＝ＬＮ

② △ＢＮＫ≡△ＭＬＤ

∵ {ＢＮ＝ＭＤ, ＢＫ＝ＤＬ, ∠ＫＢＮ＝∠ＭＤＬ}

∴ ＫＮ＝ＭＬ

∴ 四角形ＫＭＬＮは二組の対辺がそれぞれ等しいから平行四辺形

<265> 教材（1）に対する生徒C_2の指導前の応答の考察

- 仮定や証明に書かれているＡＫ＝ＮＫ，ＢＫ＝ＫＭ，ＭＬ＝ＬＣ，ＮＬ＝ＬＤ，∠ＭＡＫ＝∠ＬＣＮ，∠ＫＢＮ＝∠ＭＰＬは，直観的思考によったもので，不当仮定や証明しない誤りである。図形が単純なときにはこのような誤りをおかさなくても，複雑になるとこのような誤りをおかすようになる。
- この応答を見ると，この論点窃取の誤りをおかしてはいるが，正しく目標分析をおこなって，見とおしをたてているのである。

(ハ) 生徒C_2の第３回の実験的学習指導の記録

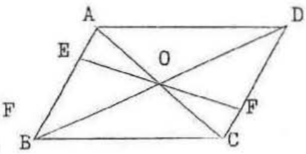
<266> 教材（5）に対する生徒C_2の指導前の応答

仮 定

□ＡＢＣＤは平行四辺形

結 論

ＥＯ＝ＯＦ



証 明

△ＥＢＯ≡△ＯＤＦ

∵ {ＢＯ＝ＯＤ, ∠ＥＯＢ＝∠ＤＯＦ　（対頂角）, ∠ＥＢＯ＝∠ＯＤＦ}

∴ ＥＯ＝ＯＦ

<267> 教材（5）に対する生徒C_2の指導前の応答の考察

- △ＥＢＯ≡△ＯＦＤの証明をする理由が，生徒C_2にはわからない。ただ前にやった操作を思い出して，似た操作を繰り返しているのである。

<268> 教材（6）に対する生徒C_2の指導前の応答

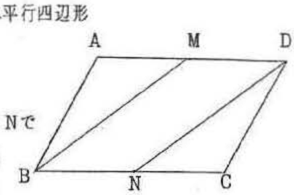
仮 定

ＡＢＣＤは平行四辺形

結 論

四角形ＭＢＮＤは平行四辺形

ＡＢ∥ＤＣ



証 明

△ＡＭＢと△ＤＣＮで

{ＡＢ∥ＤＣ, ＡＭ∥ＮＣ, ∠ＢＡＭ＝∠ＤＣＮ}

∴ ＢＭ∥ＤＮ

∴ 四角形ＭＢＮＤは平行四辺形

<269> 教材（6）に対する生徒C_2の指導前の応答の考察

- 教材(6)も第1回に指導したのであるが，自分の力で応答させると，このような応答になる。
- 目標分析が誤っている。
- 「△ＡＭＢと△ＤＣＮで」の書きだしは，過去の学習の思考様式の表われである。

{ＡＢ∥ＤＣ, ＡＭ∥ＮＣ, ∠ＢＡＭ＝∠ＤＣＮ}

の書き方は新しい学習の思考様式である。

- 目標分析，条件分析を正しくおこなって，△ＡＭＢと△ＤＣＮの合同の証明をしようと考えたものでなく，単に第1回の経験を再生しての操作のように思われる。
- 観点が身についていないから，どの観点を選ぶかはむずかしい。

- 以前に指導した問題をのちに，自由に応答させると，つまずきがはっきりとわかる。経験した操作を単に思いおこして書きつらねているのであって，見とおしをもって操作していないことが多い。劣る子どもが類似の問素を解いたときは，見とおしをもって解いたものか，または，単に操作を繰り返したものか，判断のつかないことが多い。

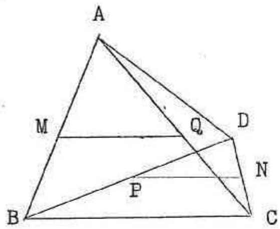
(6) 生徒C_3の実験的学習指導の記録

(イ) 生徒C_3の第1回の実験的学習指導の記録

省略する。

(ロ) 生徒C_3の第2回の実験的学習指導の記録

<270> 教材 (9) に対する生徒C_3の指導による応答



〔仮　定〕

AM＝BM

DN＝CN

BP＝PD

AQ＝CQ

〔結　論〕

MQ＝PN

MQ∥PN

〔証　明〕

中点連結の定理によって

MQ∥BC

$\frac{1}{2}$BC＝MQ

中点連結の定理によって

PN∥BC

$\frac{1}{2}$BC＝PN

∴　MQ＝PN

MQ∥BC

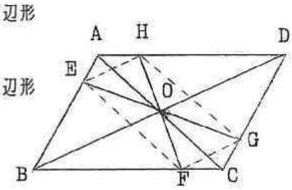
PN∥BC

∴　MQ∥PN

<271> 教材 (9) に対する生徒C_3の指導による応答の考察

- この教材は第1回に指導してあり，中点連結の定理も知っている。ところで，この教材を新しく解く場合に，知っている筈の中点連結の定理を適用しないで，初めから証明しようとする。つまり，中点連結の定理の証明から仕事を始めるのである。これは，知っている定理を問題解決に利用すると能率的であることをじゅうぶん理解していない。いわゆるクリカエシの証明をおこなうのはこのためである。
- 式によるより図による推論が容易である。

<272> 教材 (10) に対する生徒C_3の指導による応答



仮　定

□ABCDは平行四辺形

結　論

□EFGHは平行四辺形

証　明

△OBF≡△ODH

∵ OB＝OD, ∠HDO＝∠FBD, ∠HOD＝∠BOF

△BEO≡△GDO

∵ OD＝BO, ∠EOB＝∠DOG, ∠EBO＝∠GDO

∴　EO＝GO

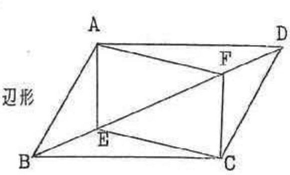
対角線はたがいに他を二等分するので

□EFGHは平行四辺形

<273> 教材 (10) に対する生徒C_3の指導による応答の考察

- 適切な条件を図形からは選択できない。図形と，書かれた仮定，結論とを交互に見比べることによって判断しなければならない。図形と式と文章が1つになっていなければならないのである。
- 仮定，結論ともこの応答は，文章で書かれているが，生徒C_3は図形だけ見て考えている。
- 仮定，結論とも，定式変えして，式で書くことが，思考を容易にすると思う。
- 生徒C_3は，第2回（3日目）の応答では，自分の力だけで正解している。

<274> 教材 (2) に対する生徒C_3の指導による応答



〔仮　定〕

□ABCDは平行四辺形

BE＝DF

〔結　論〕

□AECFは平行四辺形

証 明

△ABE≡△CDF

$$\because \begin{cases} BE=DF \\ \angle ABE=\angle CDF \\ AB=CD \end{cases}$$

∴　AE＝CF

∠AEF＝∠CFE

∴　AE∥CF

一組の対辺が平行で等しいから

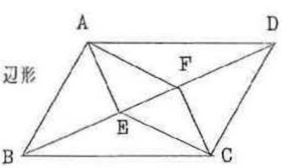
□AECFは平行四辺形である。

<275> 教材（2）に対する生徒C_3の指導による応答の考察

• ∠AEF＝∠CFEは，前提が省略されているので，論証形式としては，証明しない誤りをおかしていることになる。しかし，心的操作はおこなっているのであった。論証の形式になれていないのである。表現技能を身につけさせる必要がある。論証の書きコトバはたいそう論理的で，生活用語と，かけ離れていることが多いがこの論証形式になれさせることによって，論理的思考を伸ばすようにしなければならない。

(ハ) 生徒C_3の第3回の実験的学習指導の記録

<276> 教材（3）に対する生徒C_3の指導による応答



〔仮 定〕

□ABCDは平行四辺形

BD⊥AE

BD⊥CF

〔結 論〕

□AECFは平行四辺形

〔証 明〕

△ABE≡△CDF

$$\because \begin{cases} AB=CD \\ \angle ABE=\angle CDF \\ \angle BAE=\angle DCF \end{cases}$$

∴　AE＝CF

∠CFE＝∠AEF

∴　AE∥CF

∴　□AECFは一辺が等しく平行であるから平行四辺形

<277> 教材（3）に対する生徒C_3の指導による応答の考察

• AB＝CD，∠ABE＝∠CDFの等式の成立する理由を尋ねると正しく答えられる。

• ∠BAE＝∠DCFと最初は正しく記述しないで，∠AEB＝∠CFDとしていた。2角夾辺相等の条件を最初は正しく適用していなかった。助言によって訂正させた。

• ∠BAE＝∠DCFの等式の成立する理由については，「ABとCDが平行で，AE，CFがBDに垂直だから等しい」と直観的に判断する。これは理論的には次のように整理されなければならない。

∠A＋∠B＋∠E＝2∠R

∠D＋∠C＋∠F＝2∠R

∴　∠A＝2∠R－∠B－∠E

∠C＝2∠R－∠C－∠F

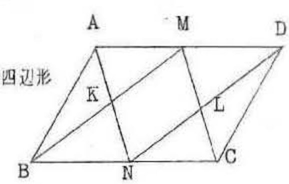
$$\left.\begin{matrix} \angle B=\angle C \\ \angle E=\angle F \end{matrix}\right\}\text{であるので}$$

∴　∠A＝∠C

このような等式変換やこのような操作から新しい等値関係を導くことは，話しコトバによる場合は比較的容易であるが，式で表現することはたいそうむずかしい。

• 結論においては，「1組の対辺が平行で等しいので….」と書かなければならない。条件もこのように正しく表現できるようにならなければならない。

<278> 教材（1）に対する生徒C_3の指導による応答



〔仮 定〕

□ABCDは平行四辺形

AM＝DM

BN＝CN

〔結 論〕

□KNLMは平行四辺形

$$\begin{pmatrix} MK/\!/LN \cdots\cdots\text{①} \\ ML/\!/KN \cdots\cdots\text{②} \end{pmatrix}$$

〔証 明〕

①　MK∥LN

四辺形MBNDは平行四辺形

MD＝BN

MD∥BN

∴　相対する辺が等しくて平行であるから四辺形MBNDは平行四辺形である。

∴　MK∥LN

②	KN∥ML □ANCMは平行四辺形

AM＝NC

AM∦NC

∴　□ANCMは平行四辺形

∴　KN∥ML

∴　□KMLMは二組の対辺が平行であるから平行四辺形

<279> 教材（1）による生徒C_3の指導による応答の考察

- この問題はいろいろの解法があるので，どの観点にたつかは，慎重に考えなければならない。ところで生徒C_3は，これまでの経験によって，簡単に観点を決定して解決を始める。問題解決においては，まず，条件分析をおこない，見とおしをたて，その条件を使って，証明できるかどうか心的操作をおこなわなければならない。
- ところでこの教材(1)は，思考段階が2回ある問題であるから，下位目標と上位目標を定め，下位目標が解決できるかどうか，考えなければならない。しかも下位目標が2つに分かれるので，心的操作だけでは困難になる。心的操作だけで下位目標の解決まで見とおせる子どもは，すぐれた子どもでも少ないと思われる。